Physique 202 - Mécanique analytique - exercice sur systèmes dynamiques - solutions

On considère le système dynamique suivant :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -x + y \\ \dot{y} &= -y + z - xz \\ \dot{z} &= -z + x - xy\end{aligned}$$

a) Déterminez si le système est conservatif ou dissipatif
Le système est dissipatif car div$\vec{F} = -3$.
b) Déterminez ses points fixes
Il y en a deux : $(0,0,0)$ et $(2,2,-2)$.
c) Déterminez la stabilité de ses points fixes
1) On linéarise le système dynamique proche de $(0,0,0)$:

$$\begin{aligned}\delta\dot{x} &= -\delta x + \delta y \\ \delta\dot{y} &= -\delta y + \delta z \\ \delta\dot{z} &= -\delta z + \delta x\end{aligned}$$

La matrice de stabilité est donc

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{1}$$

Le polynôme caractéristique de M est $-\lambda(\lambda^2 - 3\lambda + 3)$ et les valeur propres de M sont donc $\lambda = 0$ et $\lambda_\pm = -3/2 \pm i\sqrt{3}/2$. Comme les parties réelles sont nulles ou négatives, le point fixe est stable. Comme de plus le système est dissipatif, le point fixe est asymptotiquement stable.

2) On linéarise le système dynamique proche de $(2,2,-2)$:

$$\begin{aligned}\delta\dot{x} &= -\delta x + \delta y \\ \delta\dot{y} &= 2\delta x - \delta y - \delta z \\ \delta\dot{z} &= -\delta x - 2\delta y - \delta z\end{aligned}$$

Le polynôme caractéristique de M est $-\lambda^3 + 3\lambda^2 + \lambda - 4$. Il n'est pas facilement factorisable, mais numériquement on obtient les trois valeurs propres : $\lambda = -2.861$, -1.254 et 1.115. Comme une des valeurs propres a une partie réelle positive, le point fixe est instable.

(un cas entièrement soluble à la main vous serait proposé à l'examen)