Mécanique analytique — corrigé 8

Assistants : hugo.chkroun@epfl.ch, brenno.delucca@epfl.ch, garance.durr-legoupil-nicoud@epfl.ch fanny.eustachon@epfl.ch, solange.flatt@epfl.ch, shiling.liang@epfl.ch adelaide.mohr@epfl.ch, alexandra.shelest@epfl.ch, adrian.woyke@epfl.ch

Rappel à propos du tenseur ϵ_{ijk}

Nous avons déjà introduit le tenseur totalement antisymétrique ϵ_{ijk}, aussi appelé symbole de Levi-Civita, lors de la série 1. Ce corrigé commence par un petit rappel.

Le tenseur ϵ_{ijk} peut être défini par les règles suivantes : a) $\epsilon_{123} = 1$ b) une permutation de deux des trois indices produit un changement de signe c) $\epsilon_{ijk} = 0$ si un des indices est répété (c'est-à-dire si $i = j$ ou $j = k$ ou $i = k$). On rappelle quelques relations utiles. La première de ces relations est

$$\sum_{k=1}^{3} \epsilon_{ijk}\epsilon_{kmn} = \delta_{im}\delta_{jn} - \delta_{in}\delta_{jm},$$

qui peut s'obtenir facilement en voyant que pour que ce produit soit non nul, il faut que la paire (ij) coïncide avec la paire (mn) (puisque l'indice k est commun aux ensembles $\{i, j, k\}$ et $\{k, m, n\}$). Il y a deux façons d'associer un à un les éléments de ces paires (i avec m ou i avec n), le signe provenant de l'antisymétrie du symbole de Levi-Civita. Il découle de la relation précédente que

$$\sum_{i,j,k=1}^{3} \epsilon_{ijk}\epsilon_{ijk} = \sum_{i,j=1}^{3} (\delta_{ii}\delta_{jj} - \delta_{ij}\delta_{ji}) = 3 \cdot 3 - 3 = 6$$

Comme l'utilisation de ce symbole fait souvent intervenir des indices muets sur lesquels on somme, une façon particulièrement rapide d'écrire ces expressions est d'omettre de symbole de sommation. Une somme est donc implicite dès que deux indices sont répétés. La formule suivante sera très utile par la suite :

$$\sum_{k=1}^{3} \epsilon_{ijk}\epsilon_{kmn} = \epsilon_{ijk}\epsilon_{kmn} \tag{1}$$

Cette convention est appelée convention de sommation d'Einstein. Nous l'utiliserons dans l'exercice 1 de cette série. En combinant l'utilisation du tenseur ϵ_{ijk} et la convention de sommation d'Einstein, on simplifie potentiellement les calculs d'analyse vectorielle. En particulier, le produit scalaire et le produit vectoriel peuvent s'écrire de façon compacte sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \vec{v} \cdot \vec{w} &= v_i w_j \delta_{ij} = v_i w_i \\ \vec{v} \times \vec{w} &= \epsilon_{ijk} \hat{e}_i v_j w_k. \end{aligned}$$

Exercice 1 : Crochets de Poisson

a) Afin de montrer que si deux composantes du moment cinétique sont conservées, alors la troisième l'est aussi nous allons utiliser le fait que si deux quantités sont conservées alors leur crochet de Poisson l'est aussi. Ceci a été montré au cours et est une conséquence directe de l'identité de Jacobi. Le but est donc maintenant de calculer le crochet de Poisson de deux composantes du moment cinétique.

En utilisant le symbole de Levi-Civita défini plus haut, nous pouvons écrire

$$\vec{L} = \vec{x} \times \vec{p} \qquad \rightarrow \qquad L_i = \epsilon_{ijk} x_j p_k$$

Dès lors nous avons :

$$\begin{aligned}
\{L_i, L_j\} &= \epsilon_{iab}\epsilon_{jcd}\{x_a p_b, x_c p_d\} \\
&= \epsilon_{iab}\epsilon_{jcd}\left(x_a\{p_b, x_c p_d\} + p_b\{x_a, x_c p_d\}\right) \\
&= \epsilon_{iab}\epsilon_{jcd}(x_a x_c \underbrace{\{p_b, p_d\}}_{=0} + x_a p_d \underbrace{\{p_b, x_c\}}_{=-\delta_{bc}} + x_c p_b \underbrace{\{x_a, p_d\}}_{=\delta_{ad}} + p_b p_d \underbrace{\{x_a, x_c\}}_{=0}) \\
&= -\epsilon_{iab}\epsilon_{jbd} x_a p_d + \epsilon_{iab}\epsilon_{jca} x_c p_b = \left(\epsilon_{iab}\epsilon_{bjd} + \epsilon_{dib}\epsilon_{bja}\right) x_a p_d \\
&= \left[\left(\delta_{ij}\delta_{ad} - \delta_{id}\delta_{aj}\right) + \left(\delta_{dj}\delta_{ia} - \delta_{da}\delta_{ij}\right)\right] x_a p_d \\
&= x_a p_d \left(\delta_{ia}\delta_{jd} - \delta_{id}\delta_{ja}\right) = x_a p_d \left(\epsilon_{kij}\epsilon_{kad}\right) \\
&= \epsilon_{kij} \underbrace{\left(\epsilon_{kad} x_a p_d\right)}_{=L_k} \\
&= \epsilon_{ijk} L_k
\end{aligned}$$

Ceci nous apprend qu'étant donnés que L_i et L_j sont conservés ($i \neq j$), alors L_k l'est aussi. Notez que la façon d'effectuer ce développement n'est pas unique. L'important est de prendre son temps en calculant pour arriver à un résultat cohérent.

Le calcul précédent sans la notation d'Einstein se fait ainsi :

$$\begin{aligned}
\{L_1, L_2\} &= \{x_2 p_3 - x_3 p_2, x_3 p_1 - x_1 p_3\} \\
&= \{x_2 p_3, x_3 p_1\} - \{x_2 p_3, x_1 p_3\} - \{x_3 p_2, x_3 p_1\} + \{x_3 p_2, x_1 p_3\}
\end{aligned}$$

Ici, au lieu de calculer quatre crochets de Poisson, nous reprenons le calcul ci-dessus, lignes 1 à 4 :

$$\{x_a p_b, x_c p_d\} = -\delta_{bc} x_a p_d + \delta_{ad} x_c p_b$$

pour obtenir

$$\{L_1, L_2\} = -x_2 p_1 - 0 - 0 + x_1 p_2 = L_3$$

Le calcul en notation d'Einstein permet de faire d'un coup les crochets de Poisson pour tout couple $\{L_i, L_j\}$.

b) i. L'équation définissant le potentiel donne

$$\text{kg m}^2\ \text{s}^{-2} = \frac{[G]\ \text{kg}^2}{\text{m}} \qquad \rightarrow \qquad [G] = \text{kg}^{-1}\ \text{s}^{-2}\ \text{m}^3$$

La mesure de G se fait par exemple à l'aide d'un pendule de torsion et de la loi de Hooke, il s'agit de l'expérience de Cavendish. On trouve $G \simeq 6.67 \cdot 10^{-11}\,\text{kg}^{-1}\,\text{s}^{-2}\,\text{m}^3$.

Si l'on se trouve à une distance h de la surface terrestre, le potentiel gravitationnel est donné par :

$$V(R_\oplus + h) = -\frac{GM_\oplus m}{R_\oplus + h}$$

où $R_\oplus \simeq 6370$ km est le rayon de la terre et $M_\oplus \simeq 5.97\times10^{24}$ kg sa masse. On la détermine aussi à partir de l'expérience de Cavendish (qui n'avait pas lui-même déterminé G, mais c'est une autre histoire...). Si $h \ll R_\oplus$, on peut approximer $V(R_\oplus + h)$ par :

$$V(R_\oplus + h) \simeq V(R_\oplus) + V'(R_\oplus)h = V(R_\oplus) + m\frac{GM_\oplus}{R_\oplus^2}h \equiv V(R_\oplus) + mgh$$

où $g \equiv GM_\oplus R_\oplus^{-2} \simeq 9.81\ \mathrm{m\ s^{-2}}$. Comme $V(R_\oplus)$ est une constante, on l'omet généralement et l'on utilise donc pour des hauteurs $h \ll R_\oplus$ le potentiel approximé $V = mgh$.

ii. Afin de montrer que le moment cinétique et l'énergie sont des quantités conservées, il suffit de voir qu'elles satisfont toutes deux

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial f}{\partial t} + \{f, H\} = 0$$

L'Hamiltonien est donné par

$$H(x_j, p_j) = \frac{p_j p_j}{2m} - \frac{GMm}{\sqrt{x_j x_j}}$$

Le moment cinétique et l'Hamiltonien ne dépendent pas explicitement du temps. Le fait qu'ils soient conservés revient donc à voir que leur crochet de Poisson avec l'Hamiltonien est nul, ce qui est trivial pour l'Hamiltonien puisque $\{H, H\} = 0$. Le crochet de Poisson de la i-ème composante du moment cinétique avec l'Hamiltonien s'écrit

$$\{L_i, H\} = \epsilon_{ijk}\{x_j p_k, H\} = \epsilon_{ijk}\left(x_j\{p_k, H\} + p_k\{x_j, H\}\right)$$

Voyons tout d'abord $\{p_i, H\}$ et $\{x_i, H\}$:

$$\{p_i, H\} = \sum_{k=1}^{3}\left(\frac{\partial p_i}{\partial x_k}\frac{\partial H}{\partial p_k} - \frac{\partial p_i}{\partial p_k}\frac{\partial H}{\partial x_k}\right) = -\frac{\partial H}{\partial x_i} = -\frac{GMmx_i}{r^3}$$

$$\{x_i, H\} = \sum_{k=1}^{3}\left(\frac{\partial x_i}{\partial x_k}\frac{\partial H}{\partial p_k} - \frac{\partial x_i}{\partial p_k}\frac{\partial H}{\partial x_k}\right) = \frac{\partial H}{\partial p_i} = \frac{p_i}{m}$$

où l'on a utilisé que pour tout vecteur $\vec{t}$

$$\frac{\partial t_i}{\partial t_j} = \delta_{ij}$$

En injectant ces deux résultats dans $\{L_i, H\}$ on obtient :

$$\{L_i, H\} = \epsilon_{ijk}\left(-\frac{GMm}{r^3}x_j x_k + \frac{p_j p_k}{m}\right) = 0$$

En effet, la multiplication d'un objet symétrique en (jk) par un autre antisymétrique en (jk) donne zéro. [1]

iii. Afin de montrer que le vecteur de Laplace-Runge-Lenz est une constante du mouvement nous devons voir que son crochet de Poisson avec l'Hamiltonien est nul. Pour pouvoir utiliser les crochets de Poisson on doit d'abord exprimer $\vec{K}$ en fonction des coordonnées et impulsions. En coordonnées cartésiennes nous avons $\dot{\vec{x}} = \vec{p}/m$. La i-ème composante de $\vec{K}$ s'écrit donc

$$K_i = \frac{1}{m}\epsilon_{ijk}p_jL_k - GMm\frac{x_i}{\sqrt{x_jx_j}} = \frac{1}{m}\epsilon_{ijk}\epsilon_{kmn}x_mp_jp_n - GMm\frac{x_i}{\sqrt{x_jx_j}}$$

Voyons d'abord le crochet de Poisson du premier terme avec H :

$$\begin{aligned}\frac{1}{m}\epsilon_{ijk}\epsilon_{kmn}\{x_mp_np_j, H\} =& \frac{1}{m}\epsilon_{ijk}\epsilon_{kmn}\left(x_mp_n\{p_j,H\} + x_mp_j\underbrace{\{p_n,H\}}_{\propto x_n} + p_np_j\underbrace{\{x_m,H\}}_{\propto p_m}\right)\\ =& \frac{GM}{r^3}\left(r^2p_i - x_ix_np_n\right)\end{aligned}$$

Les deux derniers termes de la première ligne donnent zéro puisqu'ils contiennent le produit de ϵ_{kmn} et d'un objet symétrique en (mn). Voyons maintenant la deuxième partie du crochet de Poisson :

$$\begin{aligned}-GMm\left\{\frac{x_i}{\sqrt{x_jx_j}}, H\right\} &= -GMm\sum_{k=1}^{3}\left(\frac{\partial\left(\frac{x_i}{\sqrt{x_jx_j}}\right)}{\partial x_k}\frac{\partial H}{\partial p_k}\right)\\ &= -\frac{GM}{r^3}(r^2p_i - x_ix_kp_k)\end{aligned}$$

On trouve donc bien que les deux contributions se compensent et donc que le vecteur LRL est conservé.

iv. Le moment cinétique $\vec{L}$ est perpendiculaire au plan défini par les vecteurs $\vec{r}$ et $\vec{p}$, le vecteur LRL appartient lui à ce plan et est donc perpendiculaire à $\vec{L}$.

Exercice 2 : Trajectoires sur un cylindre

a) On cherche la longueur totale le long de la trajectoire. Comme d'habitude, on commence très naïvement par :

$$L = \int dL$$

pour trouver dL, on utilise Pythagore :

$$dL = \sqrt{dz^2 + R^2d\phi^2}$$

1. Prenons S_{ij} un objet symétrique en (ij) et A_{ij} antisymétrique en (ij). Leur produit, en utilisant la convention d'Einstein, vaut alors $A_{ij}S_{ij} = -A_{ji}S_{ji} = -A_{ij}S_{ij} = 0$. La première égalité découle de la symétrie de S et de l'antisymétrie de A. Comme les indices sont muets, on peut les renommer à volonté, d'où la seconde égalité.

et ensuite, on peut sortir dz^2 de la racine, et en remplaçant $d\phi/dz = \phi'$ on obtient la fonctionnelle :

$$L[\phi(z)] = \int_0^h dz \underbrace{\sqrt{1 + R^2\phi'^2(z)}}_{\Delta}$$

b) Pour minimiser L on utilise les équations d'Euler-Lagrange. Vu que Δ ne dépend pas de ϕ on a :

$$\frac{\partial \Delta}{\partial \phi'} = c = \frac{R^2\phi'(z)}{\sqrt{1 + R^2\phi'^2(z)}}$$

on en déduit $\phi' = \text{const}$, et donc :

$$\phi(z) = az + b$$

où a dépend de c et R.

Maintenant il faut imposer les conditions au bord. Pour le point de départ c'est simple :

$$\phi(0) = 0 \quad \rightarrow \quad b = 0$$

Mais pour le point d'arrivée, il faut prendre en compte que ϕ est un angle, et donc qu'on ne peut pas distinguer ϕ de $\phi + 2\pi n$:

$$\phi_n(h) = a_n h = \alpha + 2\pi n \quad \rightarrow \quad a_n = \frac{\alpha + 2\pi n}{h}$$

et donc :

$$\phi_n(z) = (\alpha + 2\pi n)\frac{z}{h}$$

On voit que n dénombre le nombre de tours autour du cylindre que fait la trajectoire. Chacune de ces trajectoires est la plus courte pour ce nombre de tours donné.

Ce type de décomposition (en secteurs topologiquement distincts) se retrouve souvent en physique, et un traitement plus général du sujet se fait grâce aux groupes d'homotopie.

Pour trouver la longeur d'une trajectoire donnée, il suffit de réintroduire l'expression pour $\phi_n(z)$ dans L :

$$L_n = \int_0^h dz\sqrt{1 + R^2 a_n^2} = \sqrt{h^2 + (\alpha + 2\pi n)^2 R^2}$$

c)

$$\begin{aligned}
L_0 &= \sqrt{h^2 + \left(\tfrac{2}{3}\pi\right)^2 R^2} \\
L_{-1} &= \sqrt{h^2 + \left(\tfrac{4}{3}\pi\right)^2 R^2} \\
L_1 &= \sqrt{h^2 + \left(\tfrac{8}{3}\pi\right)^2 R^2} \\
L_{-2} &= \sqrt{h^2 + \left(\tfrac{10}{3}\pi\right)^2 R^2}
\end{aligned}$$

On voit que L_1 et L_{-2} sont beaucoup plus longs que les deux autres, c'est parce qu'ils font un tour de plus, L_{-1} fait juste le tour dans l'autre sens.

d) La longueur à z constant est un arc de cercle : $\frac{2\pi}{3}R$ et ensuite on monte de h. La longueur de ce chemin est donc

$$L_{\text{droit}} = h + \frac{2\pi}{3}R > L_0$$

e)

$$\begin{aligned}
L_0 &= \sqrt{h^2 + (\pi)^2 R^2} \\
L_{-1} &= \sqrt{h^2 + (\pi)^2 R^2} \\
L_1 &= \sqrt{h^2 + (3\pi)^2 R^2} \\
L_{-2} &= \sqrt{h^2 + (3\pi)^2 R^2} \\
L_{\text{droit}} &= h + \pi R > L_0
\end{aligned}$$

Ici on voit que les longueurs sont à chaque fois doublement dégénérées. C'est ici aussi un résultat auquel on s'attend ; vu que le point d'arrivée est juste en face, il est égal de partir à gauche ou à droite. Pour parler en des termes un peu plus avancés, il y a une symétrie de parité $\phi \to 2\pi - \phi$ qui se retrouve dans les solutions.