Corrigé : Examen Mécanique Analytique 2021

Paolo De Los Rios

Exercice 1

a) On choisit comme coordonnées généralisées z_1, ϕ_1, z_2 et ϕ_2 de sorte que :

$$x_1 = R_1 \cos\phi_1 \quad y_1 = R_1 \sin\phi_1 \tag{1}$$
$$x_2 = R_2 \cos\phi_2 \quad y_2 = R_2 \sin\phi_2 \tag{2}$$

b) $L = T - V$, on commence par l'énergie cinétique :

$$\dot{x}_1 = -R_1\dot{\phi}_1 \sin\phi_1 \quad \dot{y}_1 = R_1\dot{\phi}_1 \cos\phi_1 \tag{3}$$
$$\dot{x}_2 = -R_2\dot{\phi}_2 \sin\phi_2 \quad \dot{y}_2 = R_2\dot{\phi}_2 \cos\phi_2 \tag{4}$$
$$\tag{5}$$

Donc

$$T = \frac{1}{2}m_1(R_1^2\dot{\phi}_1^2 + \dot{z}_1^2) + \frac{1}{2}m_2(R_2^2\dot{\phi}_2^2 + \dot{z}_2^2)$$

Enfin le potentiel du ressort est définie par $V = \frac{1}{2}k(l-l_0)^2$ où

$$l = \sqrt{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2 + (z_1-z_2)^2} \tag{6}$$
$$= \sqrt{R_1^2 + R_2^2 - 2R_1R_2(\cos\phi_1\cos\phi_2 + \sin\phi_1\sin\phi_2) + (z_1-z_2)^2} \tag{7}$$
$$= \sqrt{R_1^2 + R_2^2 - 2R_1R_2\cos(\phi_1-\phi_2) + (z_1-z_2)^2} \tag{8}$$

On obtient donc finalement

$$L = \frac{1}{2}m_1(R_1^2\dot{\phi}_1^2 + z_1^2) + \frac{1}{2}m_2(R_2^2\dot{\phi}_2^2 + z_2^2) - \frac{1}{2}k(\sqrt{R_1^2 + R_2^2 - 2R_1R_2\cos(\phi_1-\phi_2) + (z_1-z_2)^2} - l_0)^2 \tag{9}$$

Equations d'Euler-Lagrange : $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$.

$$m_1R_1^2\ddot{\phi}_1 + kR_1R_2\sin(\phi_1-\phi_2)\frac{(l-l_0)}{l} = 0 \tag{10}$$
$$m_2R_2^2\ddot{\phi}_2 - kR_1R_2\sin(\phi_1-\phi_2)\frac{(l-l_0)}{l} = 0 \tag{11}$$
$$m_1\ddot{z}_1 + k(z_1-z_2)\frac{(l-l_0)}{l} = 0 \tag{12}$$
$$m_2\ddot{z}_2 - k(z_1-z_2)\frac{(l-l_0)}{l} = 0 \tag{13}$$

avec $l = \sqrt{R_1^2 + R_2^2 - 2R_1R_2\cos(\phi_1-\phi_2) + (z_1-z_2)^2}$

c) Les quantités conservées sont :

- Invariance par translation selon l'axe z. La transformation $z_i \to z_i + s$ n'entraîne pas de modification du Lagrangien : $z_1 - z_2 \to z_1 - z_2$ et $\dot{z}_i \to \dot{z}_i$. Par le théorème de Noether

$$C_1 = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{z}_i}\frac{\partial z_i}{\partial s} = m_1\dot{z}_1 + m_2\dot{z}_2 = M\dot{Z} \tag{14}$$

  est une quantité conservée, où $M = m_1 + m_2$ et $Z = \frac{m_1\dot{z}_1 + m_2\dot{z}_2}{m_1+m_2}$. L'impulsion total selon z $P_z = M\dot{Z}$ est donc une grandeur conservée.

- Similairement, on observe une invariance par rotation autour de l'axe z. La transformation $\phi_i \to \phi_i + s$ ne modifie pas le Lagrangien. Donc

$$C_2 = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}_i} \frac{\partial \phi_i}{\partial s} = m_1 R_1^2 \dot{\phi}_1 + m_2 R_2^2 \dot{\phi}_2 = I\Phi \tag{15}$$

  est conservé, avec $I = m_1 R_1^2 + m_2 R_2^2$ et $\Phi = \dfrac{m_1 R_1^2 \dot{\phi}_1 + m_2 R_2^2 \dot{\phi}_2}{m_1 R_1^2 + m_2 R_2^2}$. Le moment cinétique total est donc conservé.
- Le système est isolé, l'hamiltonien h (l'énergie totale du système) est donc une quantité conservée.

d) Pour passer du Lagrangien à l'Hamiltonien on utilise les formules suivantes :

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \tag{16}$$

$$H(q_i, p_i, t) = \sum_k \dot{q}_k p_k - L(q_i, \dot{q}_i, t) \tag{17}$$

On obtient donc

$$\begin{aligned} p_{\phi_1} &= m_1 R_1^2 \dot{\phi}_1 & p_{\phi_2} &= m_2 R_2^2 \dot{\phi}_2 & \Longrightarrow \quad \dot{\phi}_1 &= \frac{p_{\phi_1}}{m_1 R_1^2} & \dot{\phi}_2 &= \frac{p_{\phi_2}}{m_2 R_2^2} \\ p_{z_1} &= m_1 \dot{z}_1 & p_{z_2} &= m_2 \dot{z}_2 & \Longrightarrow \quad \dot{z}_1 &= \frac{p_{z_1}}{m_1} & \dot{z}_2 &= \frac{p_{z_2}}{m_2} \end{aligned}$$

$$H = \frac{p_{\phi_1}^2}{m_1 R_1^2} + \frac{p_{\phi_2}^2}{m_2 R_2^2} + \frac{p_{z_1}^2}{m_1} + \frac{p_{z_2}^2}{m_2} - \frac{1}{2}\left(\frac{p_{\phi_1}^2}{m_1 R_1^2} + \frac{p_{\phi_2}^2}{m_2 R_2^2} + \frac{p_{z_1}^2}{m_1} + \frac{p_{z_2}^2}{m_2}\right) \tag{18}$$

$$+ \frac{1}{2} k(\sqrt{R_1^2 + R_2^2 - 2R_1 R_2 \cos(\phi_1 - \phi_2) + (z_1 - z_2)^2} - l_0)^2 \tag{19}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{p_{\phi_1}^2}{m_1 R_1^2} + \frac{p_{\phi_2}^2}{m_2 R_2^2} + \frac{p_{z_1}^2}{m_1} + \frac{p_{z_2}^2}{m_2}\right) + \frac{1}{2} k(\sqrt{R_1^2 + R_2^2 - 2R_1 R_2 \cos(\phi_1 - \phi_2) + (z_1 - z_2)^2} - l_0)^2 \tag{20}$$

Les équations canoniques sont définies par

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \tag{21}$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \tag{22}$$

ce qui nous donne :

$$\begin{aligned} \dot{\phi}_1 &= \frac{p_{\phi_1}}{m_1 R_1^2} & \dot{\phi}_2 &= \frac{p_{\phi_2}}{m_2 R_2^2} & \dot{p}_{\phi_1} &= -k\frac{l - l_0}{l} R_1 R_2 \sin(\phi_1 - \phi_2) & \dot{p}_{\phi_2} &= k\frac{l - l_0}{l} R_1 R_2 \sin(\phi_1 - \phi_2) \\ \dot{z}_1 &= \frac{p_{z_1}}{m_1} & \dot{z}_2 &= \frac{p_{z_2}}{m_2} & \dot{p}_{z_1} &= -k\frac{l - l_0}{l}(z_1 - z_2) & \dot{p}_{z_2} &= k\frac{l - l_0}{l}(z_1 - z_2) \end{aligned}$$

avec $l = \sqrt{R_1^2 + R_2^2 - 2R_1 R_2 \cos(\phi_1 - \phi_2) + (z_1 - z_2)^2}$.

e) Le changement de variable $q_i \to Q_i$ et $p_i \to P_i$ est canonique si $\{Q_i, P_j\}\big|_{q_i,p_i} = \delta_{ij}$ et $\{Q_i, Q_j\}\big|_{q_i,p_i} = \{P_i, P_j\}\big|_{q_i,p_i} \forall i, j$.
On calcule donc :

$$\{Z, P_Z\} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} + \frac{m_2}{m_1 + m_2} = 1 \qquad \{z, p_z\} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} + \frac{m_1}{m_1 + m_2} = 1$$

$$\{\Phi, P_\Phi\} = \frac{m1 R_1^2}{m1 R_1^2 + m2 R_2^2} + \frac{m2 R_2^2}{m1 R_1^2 + m2 R_2^2} = 1 \qquad \{\phi, p_\phi\} = \frac{m2 R_2^2}{m1 R_1^2 + m2 R_2^2} + \frac{m1 R_1^2}{m1 R_1^2 + m2 R_2^2} = 1$$

$$\{Z,z\}=0 \qquad \{Z,p_z\}=\frac{m_1}{m_1+m_2}\frac{m_2}{m_1+m_2}+\frac{m_2}{m_1+m_2}\frac{-m_1}{m_1+m_2}=0 \quad \{Z,\Phi\}=0 \qquad \{Z,P_\Phi\}=0$$

$$\{Z,\phi\}=0 \qquad \{Z,p_\phi\}=0 \qquad \{z,P_Z\}=1-1=0 \qquad \{z,\Phi\}=0 \qquad \{z,P_\Phi\}=0 \qquad \{z,\phi\}=0 \qquad \{z,p_\phi\}=0$$

$$\{\Phi,P_Z\}=0 \qquad \{\Phi,p_z\}=0 \qquad \{\Phi,\phi\}=0 \qquad \{\Phi,p_\phi\}=0 \qquad \{\phi,P_Z\}=0 \qquad \{\phi,p_z\}=0 \qquad \{\phi,p_\Phi\}=1-1=0$$

La transformation est donc bien canonique.
On veut maintenant exprimer l'Hamiltonien dans ce nouveau set de coordonnées. On exprime les anciennes coordonnées en fonction des nouvelles :

$$z_1=\frac{MZ+m_2z}{M} \qquad z_2=\frac{MZ-m_1z}{M} \tag{23}$$

$$p_{z_1}=\frac{m_1P_Z+Mp_z}{M} \qquad p_{z_2}=\frac{m_2P_Z-Mp_z}{M} \tag{24}$$

$$\phi_1=\frac{I\Phi+m_2R_2^2\phi}{I} \qquad \phi_2=\frac{I\Phi-m_1R_1^2\phi}{I} \tag{25}$$

$$p_{\phi_1}=\frac{m_1R_1^2P_\Phi+Ip_\phi}{I} \qquad p_{\phi_2}=\frac{m_2R_2^2P_\Phi-Ip_\phi}{I} \tag{26}$$

$$\tag{27}$$

avec $M=m_1+m_2$ et $I=m_1R_1^2+m_2R_2^2$. En utilisant les égalités précédentes, on calcule T et V :

$$T=\frac{1}{2}\left(\frac{p_{\phi_1}^2}{m_1R_1^2}+\frac{p_{\phi_2}^2}{m_2R_2^2}+\frac{p_{z_1}^2}{m_1}+\frac{p_{z_2}^2}{m_2}\right) \tag{28}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{P_Z^2}{M}+\frac{p_z^2M}{m_1m_2}+\frac{P_\Phi^2}{I}+\frac{p_\phi^2I}{m_1m_2R_1^2R_2^2}\right) \tag{29}$$

$$V=\frac{1}{2}k(\sqrt{R_1^2+R_2^2-2R_1R_2\cos(\phi_1-\phi_2)+(z_1-z_2)^2}-l_0)^2 \tag{30}$$

$$=\frac{1}{2}k(\sqrt{R_1^2+R_2^2-2R_1R_2\cos(\phi)+z^2}-l_0)^2 \tag{31}$$

On obtient donc pour finir :

$$H=\frac{1}{2}\left(\frac{P_Z^2}{M}+\frac{p_z^2M}{m_1m_2}+\frac{P_\Phi^2}{I}+\frac{p_\phi^2I}{m_1m_2R_1^2R_2^2}\right)+\frac{1}{2}k(\sqrt{R_1^2+R_2^2-2R_1R_2\cos(\phi)+z^2}-l_0)^2 \tag{32}$$

Exercice 2

a) Le potentiel V(q) est dessiné dans la figure 1.

b) Pour une énergie fixée E, on a

$$p=\pm\sqrt{2mE-2mV(q)}=\pm\sqrt{2mE}\cdot\sqrt{1-\frac{V(q)}{E}} \tag{33}$$

Calculons les points de rebroussement, i.e. $\pm\bar{q}$ définis par $V(\pm\bar{q})=E$. Cela correspond à $p=0$ dans le portrait de phase.

$$E<\beta q_0 \Rightarrow \pm\bar{q}=\pm\frac{E}{\beta} \tag{34}$$

$$E>\beta q_0 \Rightarrow \pm\bar{q}=\pm\frac{1}{\alpha}\left[E+(\alpha-\beta)q_0\right] \tag{35}$$

Portrait de phase :

$$p=\pm\sqrt{2mE}\cdot\sqrt{1-\frac{V(q)}{E}} \tag{36}$$

Deux cas de figure sont à distinguer : $E<\beta q_0$ et $E>\beta q_0$.

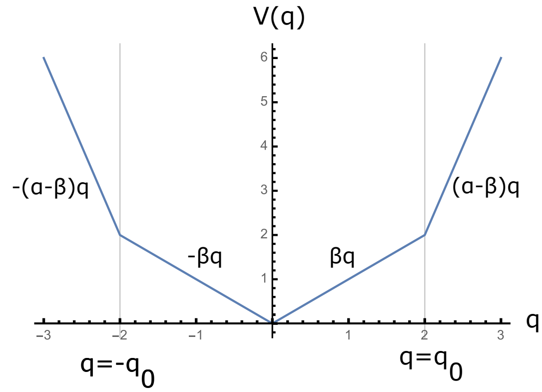

FIGURE 1 – Potentiel $V(q)$ auquel est soumis le système. Dans cet exemple, les paramètres sont $\alpha = 4, \beta = 1, m = 1, q_0 = 2$.

— $\boxed{E \leq \beta q_0}$
Dans ce cas, $\bar{q} < q_0$ est la trajectoire est entièrement contenue dans le domaine $q < q_0$

$$V(q) = \beta|q| \Rightarrow p = \pm\sqrt{2mE} \cdot \sqrt{1 - \frac{\beta}{E}|q|} \tag{37}$$

— $\boxed{E > \beta q_0}$
La trajectoire est définie par morceau, en fonction de la valeur du potentiel

$$\begin{cases} V(q) = \alpha q - (\alpha - \beta)q_0 & \Rightarrow p = \pm\sqrt{2mE} \cdot \sqrt{1 - \frac{\alpha q - (\alpha-\beta)q_0}{E}} & \text{pour } q > q_0 \\ V(q) = \beta|q| & \Rightarrow p = \pm\sqrt{2mE} \cdot \sqrt{1 - \frac{\beta}{E}|q|} & \text{pour } |q| < q_0 \\ V(q) = -\alpha q - (\alpha - \beta)q_0 & \Rightarrow p = \pm\sqrt{2mE} \cdot \sqrt{1 - \frac{-\alpha q - (\alpha-\beta)q_0}{E}} & \text{pour } q < -q_0 \end{cases} \tag{38}$$

L'ensemble des cas possible est illustré graphiquement dans la figure 2

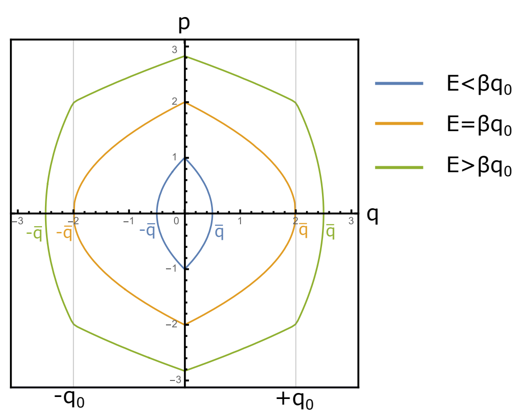

FIGURE 2 – Portrait de phase du système. Les paramètres sont les mêmes que ceux de la figure 1. Les deux familles de trajectoires sont dessinées, i.e. $E < \beta q_0$ (en bleu) et $E > \beta q_0$ (en vert), ainsi que le cas limite $E = \beta q_0$ (en orange)

c) **Calcul des périodes :**
Pour le calcul des périodes, nous utilisons la symétrie du problème pour ne faire le calcul explicite que dans le cadran $p, q > 0$. De nouveau, distinguons les deux familles de trajectoires définies par $E < \beta q_0$ et $E > \beta q_0$.

— $\boxed{E \leq \beta q_0}$

$$I = \frac{1}{2\pi} \oint pdq \tag{39}$$
$$= \frac{2}{\pi} \int_0^{E/\beta} \sqrt{2mE}\sqrt{1 - \frac{\beta}{E} q} dq \tag{40}$$
$$= \frac{2}{\pi}\sqrt{2mE}\frac{E}{\beta} \int_0^1 \sqrt{1-x}dx \tag{41}$$
$$= \frac{2}{\pi}\sqrt{2mE}\frac{E}{\beta} \left[-\frac{2}{3}(1-x)^{3/2}\right]_0^1 \tag{42}$$
$$= \frac{2}{\pi}\frac{\sqrt{2m}}{\beta}E^{3/2}\frac{2}{3} \tag{43}$$
$$= \frac{4}{3\pi}\frac{\sqrt{2m}}{\beta}E^{3/2} \tag{44}$$
$$\tag{45}$$

L'inversion de l'expression 44 afin d'exprimer $E(I)$ puis calculer la période donne :

$$E = \left(\frac{3\pi}{4}\frac{\beta}{\sqrt{2m}}\right)^{2/3} I^{2/3} \tag{46}$$

$$T = 2\pi \left(\frac{dE}{dI}\right)^{-1} \tag{47}$$
$$= 2\pi \left(\frac{4}{3\pi}\frac{\sqrt{2m}}{\beta}\right)^{2/3} \frac{3}{2} I^{1/3} \tag{48}$$
$$= 3\pi \left(\frac{4}{3\pi}\frac{\sqrt{2m}}{\beta}\right)^{2/3} \left(\frac{4}{3\pi}\frac{\sqrt{2m}}{\beta}\right)^{1/3} E^{1/2} \tag{49}$$
$$T = 4\frac{\sqrt{2m}}{\beta}E^{1/2} \tag{50}$$

Comme attendu, la période augmente avec l'énergie. De plus, lorsque β augmente, la période diminue

— $\boxed{E > \beta q_0}$

$$I = \frac{1}{2\pi} \oint pdq \tag{51}$$
$$= \frac{2}{\pi}\sqrt{2mE}\left\{\int_0^{q_0} \sqrt{1 - \frac{\beta}{E}q}\, dq + \int_{q_0}^{\bar{q}} \sqrt{1 - \frac{\alpha q - (\alpha-\beta)q_0}{E}}\, dq\right\} \tag{52}$$
$$= \frac{2}{\pi}\sqrt{2mE}\left\{\left[-\frac{E}{\beta}\frac{2}{3}\left(1 - \frac{\beta}{E}q\right)^{3/2}\right]_0^{q_0} + \sqrt{1 + \frac{\alpha-\beta}{E}q_0}\int_{q_0}^{\bar{q}} \sqrt{1 - \frac{\alpha q}{E + (\alpha-\beta)q_0}}\, dq\right\} \tag{53}$$
$$= \frac{2}{\pi}\sqrt{2mE}\left\{\frac{2}{3}\frac{E}{\beta}\left(1 - \left(1 - \frac{\beta q_0}{E}\right)^{3/2}\right) + \sqrt{1 + \frac{\alpha-\beta}{E}q_0} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{E + (\alpha-\beta)q_0}{\alpha} \cdot \left(1 - \frac{\alpha q_0}{E + (\alpha-\beta)q_0}\right)^{3/2}\right\} \tag{54}$$
$$\tag{55}$$

Où nous avons utilisé pour la dernière équation la définition de $\bar{q}$ trouvée en 35. Ainsi l'évaluation du dernier terme entre crochet en $\bar{q}$ s'annule.

$$I = \frac{2}{\pi}\sqrt{2mE}\left\{\frac{2}{3}\frac{E}{\beta}\left(1-\left(1-\frac{\beta q_0}{E}\right)^{3/2}\right)+\frac{2}{3}\cdot\frac{[E+(\alpha-\beta)q_0]^{3/2}}{\alpha\sqrt{E}}\cdot\left(1-\frac{\alpha q_0}{E+(\alpha-\beta)q_0}\right)^{3/2}\right\} \tag{56}$$

$$= \frac{2}{\pi}\sqrt{2mE}\left\{\frac{2}{3}\frac{E}{\beta}\left(1-\left(1-\frac{\beta q_0}{E}\right)^{3/2}\right)+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{\alpha\sqrt{E}}\cdot(E-\beta q_0)^{3/2}\right\} \tag{57}$$

$$= \frac{2}{\pi}\sqrt{2mE}\frac{2}{3}E\left\{\frac{1}{\beta}\left(1-\left(1-\frac{\beta q_0}{E}\right)^{3/2}\right)+\frac{1}{\alpha}\cdot\left(1-\frac{\beta q_0}{E}\right)^{3/2}\right\} \tag{58}$$

$$= \frac{4}{3\pi}\sqrt{2m}E^{3/2}\left\{\frac{1}{\beta}+\left(-\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\alpha}\right)\left(1-\frac{\beta q_0}{E}\right)^{3/2}\right\} \tag{59}$$

$$I = \frac{4}{3\pi}\frac{\sqrt{2m}E^{3/2}}{\beta}\left\{1+\frac{\beta-\alpha}{\alpha}\left(1-\frac{\beta q_0}{E}\right)^{3/2}\right\} \tag{60}$$

$$\tag{61}$$

De nouveau, la période est définie par

$$T = 2\pi\left(\frac{dE}{dI}\right)^{-1} = 2\pi\frac{dI}{dE} \tag{62}$$

Donc finalement

$$T = 4\frac{\sqrt{2m}}{\beta}E^{\frac{1}{2}}\left[1+\frac{\beta-\alpha}{\alpha}\left(1-\frac{\beta q_0}{E}\right)^{\frac{3}{2}}\right]+4\frac{\sqrt{2m}}{\beta}E^{\frac{3}{2}}\frac{\beta-\alpha}{\alpha}\left(1-\frac{\beta q_0}{E}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{\beta q_0}{E^2} = \tag{63}$$

$$= 4\frac{\sqrt{2m}}{\beta}E^{\frac{1}{2}}\left[1+\frac{\beta-\alpha}{\alpha}\left(1-\frac{\beta q_0}{E}\right)^{\frac{3}{2}}+\frac{\beta-\alpha}{\alpha}\frac{\beta q_0}{E}\left(1-\frac{\beta q_0}{E}\right)^{\frac{1}{2}}\right] = \tag{64}$$

$$= 4\frac{\sqrt{2m}}{\beta}E^{\frac{1}{2}}\left(1-\frac{\beta q_0}{E}\right)^{\frac{1}{2}}\left[\left(1-\frac{\beta q_0}{E}\right)^{-\frac{1}{2}}+\frac{\beta-\alpha}{\alpha}\right] = \tag{65}$$

$$= 4\frac{\sqrt{2m}}{\beta}E^{\frac{1}{2}}\left[1+\frac{\beta-\alpha}{\alpha}\left(1-\frac{\beta q_0}{E}\right)^{\frac{1}{2}}\right] \tag{66}$$

Exercice 3

a) Pour une fonction $z(\phi)$ donnée, la longueur de la corde pour faire deux tours est définie par

$$L = R\int_0^{4\pi}\sqrt{1+\frac{z'^2}{R^2}}\,\mathrm{d}\varphi = \tag{67}$$

$$= R\int_0^{4\pi}\sqrt{1+\frac{a^2}{R^2}}\,\mathrm{d}\varphi = \tag{68}$$

$$= 4\pi R\sqrt{1+\frac{a^2}{R^2}} \tag{69}$$

Ainsi, nous pouvons calculer le paramètre a qui correspond à une longueur L fixée :

$$\Rightarrow \frac{L^2}{16\pi^2R^2} = 1+\frac{a^2}{R^2} \tag{70}$$

$$\Rightarrow a^2 = \frac{L^2}{16\pi^2} - R^2 \tag{71}$$

$$\Rightarrow a = \sqrt{\frac{L^2}{16\pi^2} - R^2} \tag{72}$$

b) Calculons le potentiel gravitationnel V_g qui s'exerce sur l'ensemble de la corde

$$V_g = \mu g R \int_0^{4\pi} z\sqrt{1+\frac{z'^2}{R^2}}\,\mathrm{d}\varphi \tag{73}$$

$$= -\mu g R a\sqrt{1+\frac{a^2}{R^2}}\int_0^{4\pi}\varphi\,\mathrm{d}\varphi \tag{74}$$

$$= -\mu g R a\sqrt{1+\frac{a^2}{R^2}}\frac{1}{2}16\pi^2 \tag{75}$$

$$(72) \to = -8\pi^2\mu g R\sqrt{\frac{L^2}{16\pi^2}-R^2}\frac{L}{4\pi R} \tag{76}$$

$$= -2\pi\mu g L\sqrt{\frac{L^2}{16\pi^2}-R^2} \tag{77}$$

Le potentiel total que nous cherchons à minimiser est donc

$$V_{tot} = -2\pi\mu g L\sqrt{\frac{L^2}{16\pi^2}-R^2}+\frac{1}{2}kR^2 \tag{78}$$

$$\frac{\mathrm{d}V_{tot}}{\mathrm{d}R} = 0 \tag{79}$$

$$\Rightarrow \frac{2\pi\mu g L R}{\sqrt{\frac{L^2}{16\pi^2}-R^2}}+kR = 0 \tag{80}$$

$$\Rightarrow R = 0 \tag{81}$$