# Corrigé: Examen Mécanique Analytique 2020

Paolo De Los Rios

## Exercice 1

a) Le système possède 2 degrés de liberté, $\theta_1$ et $\theta_2$.

b) Il n'y a aucune quantité conservée. Le lagrangien dépend du temps par le biais de $\varphi(t)$.

c) On définit les vecteurs positions des masses $m_1$ et $m_2$:

$$\vec{r}_1 = (R\sin\theta_1\cos\varphi(t), R\sin\theta_1\sin\varphi(t), R\cos\theta_1)$$
$$\vec{r}_2 = (R\sin\theta_2\cos\varphi(t), R\sin\theta_2\sin\varphi(t), R\cos\theta_2)$$

$$\begin{aligned}|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^2 &= R^2\cos^2\varphi(t)(\sin\theta_1 - \sin\theta_2)^2 + R^2\sin^2\varphi(t)(\sin\theta_1 - \sin\theta_2)^2 + R^2(\cos\theta_1 - \cos\theta_2)^2 \\ &= 2R^2\left[1 - \cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2\right] \\ &= 2R^2\left[1 - \cos(\theta_1 - \theta_2)\right]\end{aligned}$$

La norme de la vitesse de chaque particule vaut: $|\dot{\vec{r}_i}|^2 = R^2\dot{\theta}_i^2 + R^2\dot{\varphi}^2\sin^2\theta_i$.
Le lagrangien s'écrit finalement:

$$L(\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2, \theta_1, \theta_2, t) = \frac{1}{2}m_1R^2\left(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\varphi}^2\sin^2\theta_1\right) + \frac{1}{2}m_2R^2\left(\dot{\theta}_2^2 + \dot{\varphi}^2\sin^2\theta_2\right) - kR^2\left(1 - \cos(\theta_1 - \theta_2)\right)$$

Les équations de Lagrange deviennent:

$$m_1R^2\ddot{\theta}_1 = m_1R^2\dot{\varphi}^2\sin\theta_1\cos\theta_1 - kR^2\sin(\theta_1 - \theta_2)$$
$$m_2R^2\ddot{\theta}_2 = m_2R^2\dot{\varphi}^2\sin\theta_2\cos\theta_2 + kR^2\sin(\theta_1 - \theta_2)$$

d) Les impulsions sont $p_1 = m_1R^2\dot{\theta}_1$ et $p_2 = m_2R^2\dot{\theta}_2$, ainsi l'Hamiltonien s'écrit:

$$H = \frac{p_1^2}{2m_1R^2} + \frac{p_2^2}{2m_2R^2} - \frac{1}{2}R^2\dot{\varphi}^2(m_1\sin^2\theta_1 + m_2\sin^2\theta_2) + kR^2\left(1 - \cos(\theta_1 - \theta_2)\right)$$

e) Dans l'expression précédente, on reconnait le potentiel efficace:

$$V_{\text{eff}}(\theta) = -\frac{1}{2}R^2\dot{\varphi}^2(m_1\sin^2\theta_1 + m_2\sin^2\theta_2) + kR^2\left(1 - \cos(\theta_1 - \theta_2)\right)$$

f) Le nouveau Lagrangien s'écrit: $L(\dot{\theta}, \theta, t) = \frac{1}{2}mR^2(\dot{\theta}^2 + \omega_0^2\sin^2\theta) - \dfrac{V_0}{\sin^2\theta}$.
De même l'Hamiltonien est donné par: $H = \dfrac{p^2}{2mR^2} - \dfrac{1}{2}mR^2\omega_0^2\sin^2\theta + \dfrac{V_0}{\sin^2\theta}$. À nouveau, on identifie le potentiel efficace:

$$V_{\text{eff}}(\theta) = -\frac{1}{2}mR^2\omega_0^2\sin^2\theta + \frac{V_0}{\sin^2\theta}$$

g) Les points d'équilibre $\theta^*$ sont définis par $\dfrac{\partial V_{\text{eff}}}{\partial\theta}\Big|_{\theta^*} = 0$.

$$V'_{\text{eff}}\big|_{\theta^*} = -mR^2\omega_0^2\sin\theta^*\cos\theta^* - 2V_0\frac{\cos\theta^*}{\sin^3\theta^*} = 0 \qquad (1)$$

La seule solution est $\cos\theta^* = 0$, donc $\theta^* = \frac{\pi}{2}$ ou $\frac{3\pi}{2}$.
Pour trouver les positions d'équilibre, on peut également partir des équations du mouvement et poser $\dot{\theta}$,$\ddot{\theta}$=0.

On étudie maintenant la stabilité des positions d'équilibre.

$$V''_{\text{eff}} = -mR^2\omega_0^2\cos^2\theta + mR^2\omega_0^2\sin^2\theta + 2V_0\left(\frac{1}{\sin^2\theta} + 3\frac{\cos^2\theta}{\sin^4\theta}\right)$$

Pour $\theta = \frac{\pi}{2}$ et $\frac{3\pi}{2}$, on trouve $V''_{\text{eff}} = mR^2\omega_0^2 + 2V_0 > 0$. Donc les deux positions d'équilibre sont stables.

h) Pour de petites oscillations autour de la position d'équilibre, on développe le potentiel effectif

$$V_{\text{eff}}(\theta) \simeq \underbrace{V_{\text{eff}}(\theta^*)}_{\text{cte}} + \underbrace{V'_{\text{eff}}}_{=0}(\theta^*)\theta + \frac{1}{2}V''_{\text{eff}}(\theta^*)\theta^2 = \left(\frac{1}{2}mR^2\omega_0^2 + V_0\right)\theta^2$$

où pour la dernière égalité, on néglige les termes constants.
L'hamiltonien devient donc,

$$H = \frac{p^2}{2mR^2} + \left(\frac{1}{2}mR^2\omega_0^2 + V_0\right)\theta^2$$

Les équations d'Hamilton donne l'équation du mouvement suivante: $\ddot{\theta} = -\left(\omega_0^2 + \frac{2V_0}{mR^2}\right)\theta$, la fréquence des petites oscillations est finalement donnée par $\omega^2 = \omega_0^2 + \frac{2V_0}{mR^2}$.

i)

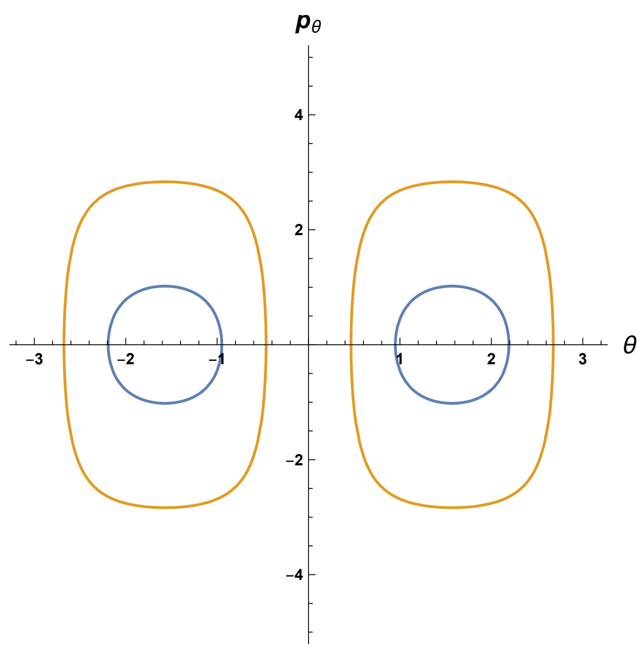


Figure 1

j) On écrit l'équation d'Hamilton-Jacobi.

$$H\left(\frac{\partial W}{\partial\theta}, \theta\right) = E \Longrightarrow \frac{\partial W}{\partial\theta} = \sqrt{2mR^2}\left[E + \frac{1}{2}mR^2\omega_0^2\sin^2\theta - \frac{V_0}{\sin^2\theta}\right]^{1/2}$$

La variable d'action est donnée par

$$I = \frac{1}{2\pi}\oint \frac{\partial W}{\partial \theta} d\theta = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\bar{\theta}}^{\bar{\theta}} \sqrt{2mR^2}\left[E + \frac{1}{2}mR^2\omega_0^2 \sin^2\theta - \frac{V_0}{\sin^2\theta}\right]^{1/2} d\theta$$

et les points de rebroussement sont les solutions de l'équation $E - \frac{1}{2}mR^2\omega_0^2 \sin^2\bar{\theta} + \frac{V_0}{\sin^2\bar{\theta}} = 0$.

A partir de l'expression pour $I(E)$, on peut calculer la fréquence des oscillations comme suit: $\omega = \frac{\partial E}{\partial I}$.

## Exercice 2

Les nouvelles coordonnées sont données par:

$$P_1 = \frac{p_1}{2Aq_1p_2 + 1} \qquad Q_1 = Aq_1^2p_2 + q_1$$

$$P_2 = p_2 \qquad Q_2 = q_2 + Aq_1^2\frac{p_1}{2Aq_1p_2 + 1}$$

a) Pour vérifier si la transformation est canonique, on vérifie que

$$\{Q_i, P_j\} = \delta_{ij} \quad \{Q_i, Q_j\} = 0 \quad \{P_i, P_j\} = 0$$

Pour l'exemple, on calcule $\{Q_1, P_1\}$.

$$\{Q_1, P_1\} = \frac{\partial Q_1}{\partial q_1}\frac{\partial P_1}{\partial p_1} - \underbrace{\frac{\partial Q_1}{\partial p_1}}_{=0}\frac{\partial P_1}{\partial q_1} + \underbrace{\frac{\partial Q_1}{\partial q_2}}_{=0}\frac{\partial P_1}{\partial p_2} - \frac{\partial Q_1}{\partial p_2}\underbrace{\frac{\partial P_1}{\partial q_2}}_{=0} = (2Aq_1p_2 + 1)\frac{1}{2Aq_1p_2 + 1} = 1$$

Si on effectue tous les calculs, on trouve en plus que

$$\{Q_2, P_2\} = 1 \quad \{Q_1, Q_2\} = 0 \quad \{P_1, P_2\} = 0x \quad \{Q_1, P_2\} = 0 \quad \{Q_2, P_1\} = 0$$

La transformation est donc bien canonique.
b)

$$\begin{aligned}
p_1 &= P_1(2Aq_1P_2 + 1) && \Longrightarrow F_2(q_1, q_2, P_1, P_2) = q_1P_1 + Aq_1^2P_1P_2 + f_1(q_1, q_2, P_2) \\
p_2 &= P_2 && \Longrightarrow F_2(q_1, q_2, P_1, P_2) = q_2P_2 + f_2(q_1, P_1, P_2) \\
Q_1 &= Aq_1^2p_2 + q_1 && \Longrightarrow F_2(q_1, q_2, P_1, P_2) = Aq_1^2P_1P_2 + q_1P_1 + f_3(q_1, q_2, P_2) \\
Q_2 &= q_2 + Aq_1^2P_1 && \Longrightarrow F_2(q_1, q_2, P_1, P_2) = q_2P_2 + Aq_1^2P_1P_2 + f_4(q_1, q_2, P_1)
\end{aligned}$$

où $f_1, f_2, f_3$ et $f_4$ sont des fonctions arbitraires. En combinant les résultats, on trouve

$$F_2(q_1, q_2, P_1, P_2) = q_1P_1 + q_2P_2 + Aq_1^2P_1P_2$$

c) De par la fonction $F_2$, on sait que $[q_1][P_1] = [A][q_1]^2[P_1][P_2]$, donc $[A] = \dfrac{1}{[q_1][P_2]}$

## Exercice 3

La corde étant attachée à l'extérieur d'un cylindre de rayon $R$, on définit comme élément de longueur de corde $dl = \sqrt{R^2d\varphi^2 + dz^2}$. On suppose $z = z(\varphi)$, on peut donc réécrire $dl = \sqrt{R^2 + z'^2}d\varphi$.
On veut minimiser l'énergie potentielle de la corde définie par

$$E = g\mu\int\limits_0^{\pi} z\sqrt{R^2 + z'^2}d\varphi$$

sous la contrainte $\int_0^\pi \sqrt{R^2+z'^2}d\varphi = L$.
La fonction

$$F(\varphi, z, z') = (z+\lambda)\sqrt{R^2+z'^2}$$

doit donc satisfaire aux équations de Lagrange. On utilise le fait que la fonction hamiltonienne est conservée.

$$z'\frac{\partial L}{\partial z'} - L = z'^2\frac{z+\lambda}{\sqrt{R^2+z'^2}} - (z+\lambda)\sqrt{R^2+z'^2} = \text{cte}$$
$$\frac{z+\lambda}{\sqrt{R^2+z'^2}} = \frac{C}{R^2} \Rightarrow z' = \frac{dz}{d\varphi} = R\sqrt{\frac{R^2(z+\lambda)^2}{C^2} - 1}$$

$$\varphi = \int\limits_0^{z(\varphi)} \frac{dz}{z'} = \frac{1}{R}\int\limits_0^{z(\varphi)} \frac{dz}{\sqrt{\frac{R^2(z+\lambda)^2}{C^2}-1}} = \frac{C}{R^2}\int\limits_{R\lambda/C}^{R(z(\varphi)+\lambda)/C} \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}dx$$
$$= \frac{C}{R^2}\left[\operatorname{arccosh}(\frac{R(z(\varphi)+\lambda)}{C}) - \operatorname{arccosh}(\frac{R\lambda}{C})\right]$$

En inversant la relation, on trouve

$$z(\varphi) = \frac{C}{R}\cosh\left(\frac{R^2}{C}\varphi(z) - \operatorname{arccosh}(\frac{R\lambda}{C})\right) - \lambda$$

Les constantes $C, \lambda$ peuvent être déterminées en posant:

$$z(0) = 0$$
$$z(\pi) = 0$$
$$\int\limits_0^\pi \sqrt{R^2+z'^2}d\varphi = L$$

mais ici on ne s'intéresse qu'à la forme de la solution.