Corrigé: Examen Mécanique Analytique 2019

Paolo De Los Rios

Exercice 1

a) Le système ne possède qu'un degré de liberté en θ.

b) La position de la particule est donnée par:

$$\begin{aligned} x &= (R + r\cos\theta)\cos\varphi \\ y &= (R + r\cos\theta)\sin\varphi \\ z &= r\sin\theta \end{aligned}$$

En prenant la dérivée temporelle, on trouve les vitesses:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -r\dot{\theta}\sin\theta\cos\varphi - (R + r\cos\theta)\dot{\varphi}\sin\varphi \\ \dot{y} &= -r\dot{\theta}\sin\theta\sin\varphi + (R + r\cos\theta)\dot{\varphi}\cos\varphi \\ z &= r\dot{\theta}\cos\theta \end{aligned}$$

L'énergie cinétique s'écrit: $T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$ et l'énergie potentielle, $V = 0$.

$$L = \frac{1}{2}m\left[r^2\dot{\theta}^2 + \omega_0^2(R + r\cos\theta)^2\right]$$

où l'on a posé $\dot{\varphi} = \omega_0$.
Equation de Lagrange:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial\theta} = 0 \Longrightarrow mr^2\ddot{\theta} + m\omega_0^2 r(R + r\cos\theta)\sin\theta = 0$$

c) Positions d'équilibre, donc $\dot{\theta} = 0$ et $\ddot{\theta} = 0$.
Pour satisfaire l'équation de Lagrange, on cherche θ^* tel que:

$$\begin{gathered} \sin\theta^* = 0 \longrightarrow \theta^* = 0 \text{ ou } \pi; \\ (R + r\cos\theta^*) = 0 \longrightarrow \text{ Impossible car } R > r. \end{gathered}$$

On a donc deux positions d'équilibre, en $\theta = 0$ et $\theta = \pi$. On identifie $\frac{1}{2}m\omega_0^2(R+r\cos\theta)^2$ comme un potentiel effectif $V_{\text{eff}}(\theta)$. Autour de la position d'équilibre, $V_{\text{eff}}(\theta) \simeq \underbrace{V_{\text{eff}}(\theta^*)}_{\text{constant}} + \underbrace{\frac{dV_{\text{eff}}}{d\theta}\Big|_{\theta^*}}_{=0}\theta + \frac{1}{2}\frac{d^2V_{\text{eff}}}{d\theta^2}\Big|_{\theta^*}\theta^2$. Au final on calcule uniquement la dérivée seconde du potentiel.

- $\theta^* = 0$, $\dfrac{d^2V_{\text{eff}}}{d\theta^2} = m\omega_0^2 r(R + r) > 0$, donc la position d'équilibre est stable.
- $\theta^* = \pi$, $\dfrac{d^2V_{\text{eff}}}{d\theta^2} = -m\omega_0^2 r(R - r) < 0$, donc la position d'équilibre est instable.

Autour de $\theta^* = 0$, le Lagrangien décrivant de petites oscillations devient:

$$L = \frac{1}{2}mr^2\left[\dot{\theta}^2 - \omega_0^2\frac{(R+r)}{r}\theta^2\right]$$

$$\ddot{\theta} = -\underbrace{\omega_0^2\frac{(R+r)}{r}}_{\omega^2}\theta \Rightarrow \theta(t) \propto e^{\pm i\omega t}$$

On trouve donc une fréquence de petites oscillations $\omega = \omega_0\sqrt{\frac{R+r}{r}}$

d) Le Lagrangien ne dépend pas du temps, la fonction hamiltonienne, h, est donc conservée.

$$h = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\dot{\theta} - L = \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta} - \frac{1}{2}m\omega_0^2(R + r\cos\theta)^2$$

e)

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta} \Rightarrow \dot{\theta} = \frac{p_\theta}{mr^2}$$

$$H = \frac{p_\theta^2}{2mr^2} - \frac{1}{2}m\omega_0^2(R + r\cos\theta)^2$$

f)

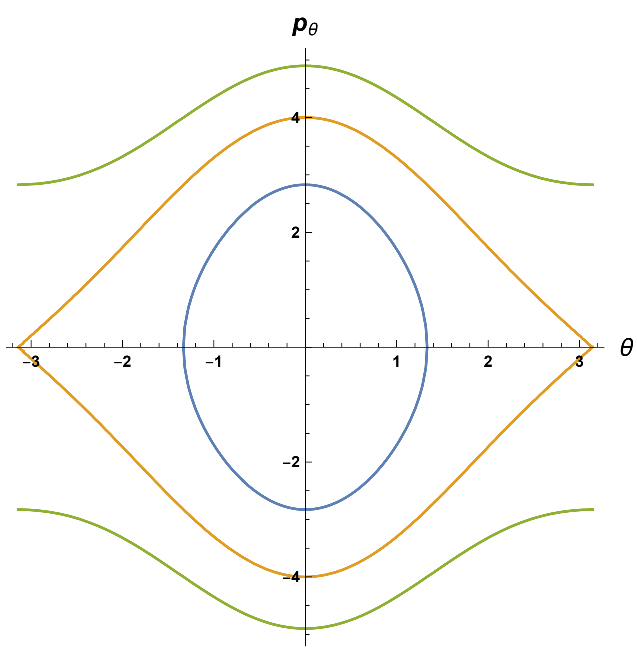

Figure 1: La ligne orange correspond au cas $E = -\frac{1}{2}m\omega_0^2(R-r)^2$. La ligne bleue $-\frac{1}{2}m\omega_0^2(R+r)^2 \leq E < -\frac{1}{2}m\omega_0^2(R-r)^2$ et la verte: $E > -\frac{1}{2}m\omega_0^2(R-r)^2$

g) On pose l'équation d'Hamilton-Jacobi:

$$H(\frac{\partial W}{\partial \theta}, \theta) = \frac{1}{2mr^2}\left(\frac{\partial W}{\partial \theta}\right)^2 - \frac{1}{2}m\omega_0^2(R + r\cos\theta)^2 = E \Longrightarrow \frac{\partial W}{\partial \theta} = \pm\sqrt{2mr^2}\sqrt{E + \frac{1}{2}m\omega_0^2(R + r\cos\theta)^2}$$

Et par definition de la variable d'action, on trouve:

$$I = \frac{1}{2\pi}\oint \frac{\partial W}{\partial \theta}d\theta = \frac{1}{\pi}\int_{-\bar{\theta}}^{\bar{\theta}} \sqrt{2mr^2}\sqrt{E + \frac{1}{2}m\omega_0^2(R + r\cos\theta)^2}d\theta$$

Il ne nous reste plus qu'à définir $\bar{\theta}$ le point de rebroussement. Celui-ci est défini par une quantité de mouvement nulle ($p_\theta = 0$), ainsi il suffit de résoudre:

$$E = -\frac{1}{2}m\omega_0^2(R + r\cos\bar{\theta})^2 \Longrightarrow \bar{\theta} = \arccos\left[\pm\sqrt{\frac{-2E}{m\omega_0^2 r^2}} - \frac{R}{r}\right]$$

Le cas $-$ est impossible car l'argument doit être compris entre -1 et 1.

f) On fait un développement limité en θ autour de zero.
Comme $(R + r\cos\theta)^2 \sim \left(R + r(1 - \frac{\theta^2}{2})\right)^2 \sim \left[(R+r)^2 - r(R+r)\theta^2\right]$, on peut facilement réécrire l'intégrale pour la variable d'action:

$$\begin{aligned}\sqrt{E + \frac{1}{2}m\omega_0^2(R + r\cos\theta)^2} &\sim \sqrt{E + \frac{1}{2}m\omega_0^2\left[(R+r)^2 - r(R+r)\theta^2\right]} \\ &= \sqrt{E + \frac{1}{2}m\omega_0^2(R+r)^2}\sqrt{1 - \frac{m\omega_0^2 r(R+r)}{2E + m\omega_0^2(R+r)^2}\theta^2}\end{aligned}$$

On calcule également le point de rebroussement $\bar{\theta}$ qui est définit par l'équation:

$$E = -\frac{1}{2}m\omega_0^2(R + r\cos\bar{\theta})^2 \sim -\frac{1}{2}m\omega_0^2\left[(R+r)^2 - r(R+r)\bar{\theta}^2\right]$$

On obtient $\bar{\theta}^2 = \dfrac{2E + m\omega_0^2(R+r)^2}{m\omega_0^2 r(R+r)}$. Ainsi,

$$\begin{aligned}I = \frac{1}{\pi}\int_{-\bar{\theta}}^{\bar{\theta}}\sqrt{2mr^2}\sqrt{E + \frac{1}{2}m\omega_0^2(R+r)^2}\sqrt{1 - \frac{\theta^2}{\bar{\theta}^2}}d\theta &= \frac{1}{\pi}\sqrt{2mr^2}\sqrt{E + \frac{1}{2}m\omega_0^2(R+r)^2}\,\bar{\theta}\underbrace{\int_{-1}^{1}\sqrt{1 - x^2}dx}_{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{1}{\omega_0}\sqrt{\frac{r}{R+r}}\left[E + \frac{1}{2}m\omega_0^2(R+r)^2\right]\end{aligned}$$

ou l'on fait le changement de variable $\frac{\theta}{\bar{\theta}} = x$.
Finalement la fréquence d'oscillation est donnée par $\omega = \frac{dE}{dI} = \omega_0\sqrt{\frac{R+r}{r}}$.

Exercice 2

a) Le changement de variable est donné par:

$$\begin{aligned}p &= qP + \eta P^2 + \lambda t \\ Q &= \frac{1}{2}q^2 + qP\end{aligned}$$

On en extrait:

$$\begin{aligned}P &= -\frac{q}{2\eta} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4\eta^2} - \frac{1}{\eta}(\lambda t - p)} \\ Q &= \frac{q^2}{2} - \frac{q^2}{2\eta} \pm q\sqrt{\frac{q^2}{4\eta^2} - \frac{1}{\eta}(\lambda t - p)}\end{aligned}$$

Une transformation est canonique si $\{Q,P\} = \frac{\partial Q}{\partial q}\frac{\partial P}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p}\frac{\partial P}{\partial q} = 1$.

$$\begin{aligned}
\{Q,P\} = &\left(q(1-\frac{1}{\eta}) \pm \sqrt{\frac{q^2}{4\eta^2} - \frac{1}{\eta}(\lambda t - p)} \pm \frac{q^2}{4\eta}\frac{1}{\sqrt{\frac{q^2}{4\eta^2} - \frac{1}{\eta}(\lambda t - p)}}\right) \times \left(\pm\frac{1}{2\eta}\frac{1}{\sqrt{\frac{q^2}{4\eta^2} - \frac{1}{\eta}(\lambda t - p)}}\right) \\
&- \left(\pm\frac{q}{2\eta}\frac{1}{\sqrt{\frac{q^2}{4\eta^2} - \frac{1}{\eta}(\lambda t - p)}}\right) \times \left(-\frac{1}{2\eta} \pm \frac{q}{4\eta}\frac{1}{\sqrt{\frac{q^2}{4\eta^2} - \frac{1}{\eta}(\lambda t - p)}}\right) \\
&= \pm\frac{1}{2\eta a}(q - \frac{q}{\eta}) + \frac{1}{2\eta} + \frac{q^2}{8\eta^2 a^2} - \left(\mp\frac{q}{4\eta^2 a} + \frac{q^2}{8\eta^2 a^2}\right) \\
&= \frac{1}{2\eta} \pm \frac{q}{2\eta a}(1 - \frac{1}{2\eta}) = 1 \text{ si } \eta = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

où on a posé $a = \sqrt{\frac{q^2}{4\eta^2} - \frac{1}{\eta}(\lambda t - p)}$ pour alléger la notation.

b) Le changement de variables devient

$$\begin{aligned}
&p = qP + \frac{P^2}{2} + \lambda t && \Longrightarrow F_2(q,P,t) = \frac{q^2P}{2} + \frac{qP^2}{2} + q\lambda t + f(P,t) \\
&Q = \frac{1}{2}q^2 + qP && \Longrightarrow F_2(q,P,t) = \frac{q^2P}{2} + \frac{qP^2}{2} + g(q,t)
\end{aligned}$$

On obtient donc $F_2(q,P,t) = \frac{q^2P}{2} + \frac{qP^2}{2} + q\lambda t$.

c) Par Hamilton-Jacobi, $K(P,Q,t) = H(p,q,t) + \frac{\partial F_2}{\partial t} = 0 \Longrightarrow H(p,q,t) = -\frac{\partial F_2}{\partial t} = -\lambda q$.

d)

$$\begin{aligned}
\dot{q} &= \frac{\partial H}{\partial p} = 0 \longrightarrow q(t) = q(0) \\
\dot{p} &= -\frac{\partial H}{\partial q} = \lambda \longrightarrow p(t) = \lambda t + p(0)
\end{aligned}$$

Exercice 3

a)

$$E = \int_0^T \gamma v \cdot v \; dt = \int_0^T \gamma v^2 dt$$

b)

$$W = \int_0^T f(t) v dt$$

c) On veut minimiser $E = \int_0^T \gamma v^2 dt$ sous contrainte. On définit l'action S:

$$S = \int_0^T \underbrace{\gamma v^2 + \lambda f(t) v}_{L(v',v,t)} dt$$

S est minimisé lorsque la fonction L satisfait aux équations de Lagrange.

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial v'} - \frac{\partial L}{\partial v} = 0 \longrightarrow v = -\frac{\lambda f(t)}{2\gamma}$$

On utilise la contrainte: $W = \int\limits_0^T f(t) v dt = \int\limits_0^T -\frac{\lambda f(t)^2}{2\gamma} dt \longrightarrow \lambda = \frac{-2\gamma W}{\int\limits_0^T f(t)^2 dt}$, et au final on obtient:

$$v(t) = \frac{W}{\int\limits_0^T f(t)^2 dt} f(t)$$

d) Si $f(t) = f_0$, on peut reprendre directement le résultat précédent: $v = \frac{W}{\int\limits_0^T f_0^2 dt} f_0 = \frac{W}{f_0 T}$.

On peut aussi revenir à la définition de l'action S, qui devient

$$S \int_0^T \underbrace{\gamma v^2 + \lambda f_0 \, v}_{L(v', v, t)} \, dt$$

Ainsi L ne dépend plus explicitement de t et la fonction hamiltonienne, h, est donc conservée.

$$h = v' \frac{\partial L}{\partial v'} - L = -C \Longrightarrow L = \gamma v^2 + \lambda f_0 v = C \Longrightarrow v = -\frac{\lambda f_0}{2\gamma} \pm \sqrt{\frac{\lambda^2 f_0^2}{4\gamma^2} + \frac{C}{\gamma}}$$

On reprend la contrainte $W = \int\limits_0^T f_0 \, v \, dt = f_0 T \underbrace{\left[-\frac{\lambda f_0}{2\gamma} \pm \sqrt{\frac{\lambda^2 f_0^2}{4\gamma^2} + \frac{C}{\gamma}} \right]}_{v}$ et donc on obtient comme avant

$$v = \frac{W}{f_0 T}$$

Il existe donc deux méthodes pour calculer la vitesse; la conservation de la fonction hamiltonienne, et le fait que v' soit une variable cyclique.