# Physique générale: Électromagnétisme (SMT), examen du 16.01.2025

**Nom:**...................................................................................**No. Sciper:**.......................**No. Place:**..............

**Tableau d'attribution des points**
(pour la correction)

| | Points | Points Obtenus |
|---|---|---|
| Problème 1 | 5 | |
| Problème 2 | 6 | |
| Problème 3 | 5 | |
| Problème 4 | 6 | |
| QCMs | 8 | |
| **Total** | **30** | |

**Formules mathématiques utiles**
(selon la voie choisie pour la résolution des problèmes)

$$\int_0^{2\pi} \cos^2(x)dx = \pi \qquad \int_0^{2\pi} \cos^6(x)dx = \frac{5\pi}{8}$$

$$\frac{d}{dx}\sin^3(ax) = 3a\sin^2(ax)\cos(ax)$$

$$\int \frac{1}{c-x}dx = -\ln(c-x) + \text{const.}$$

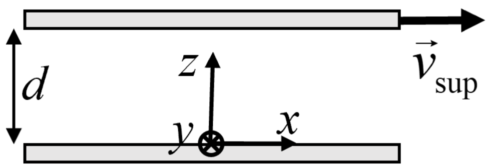
$$\int \ln\left(\frac{x}{x-c}\right)dx = c\ln(c-x) + x\ln\left(\frac{x}{x-c}\right) + \text{const.}$$

**Constants**

| | |
|---|---|
| Accélération de la pesanteur (gravité) | $g \cong 9.8$ m/s$^2$ (à la surface de la Terre) |
| Permittivité du vide | $\varepsilon_0 \cong 8.85 \times 10^{-12}$ F/m |
| Perméabilité du vide | $\mu_0 \cong 1.26 \times 10^{-6}$ H/m |
| Vitesse de la lumière dans le vide | $c \cong 3 \times 10^8$ m/s |

## Problème 1 [5 points]

Un fluide incompressible avec viscosité $\eta$ est en écoulement laminaire stationnaire unidirectionnel selon $x$ (i.e., $\vec{v} = v_x(z)\vec{e}_x$) entre deux plaques parallèles, horizontales, séparées d'une distance $d$, en présence d'un gradient de pression $\partial P/\partial x = A$, où $A$ est une constante (en Pa/m). Les plaques s'étendent à l'infini dans les directions $x$ et $y$. La plaque inférieure est immobile. La plaque supérieure se déplace à une vitesse constante $\vec{v}_{sup} = v_{sup}\vec{e}_x$. Supposer que la force de pesanteur est négligeable (i.e., $\vec{g} = 0$). La vitesse du fluide en contact avec les plaques est égale à la vitesse même des plaques (i.e., $v_x(z=0) = 0, v_x(z=d) = v_{sup}$).




Déterminer (en fonction de $v_{sup}, A, d, \eta, z$):
(a) le profil des vitesses du fluide $v_x(z)$ (en m/s),
(b) la composante selon l'axe $x$ de la force par unité de surface $f_{sup,x}$ (en N/m$^2$) exercée par le fluide sur la plaque supérieure,
(c) la composante selon l'axe $x$ de la force par unité de surface $f_{inf,x}$ (en N/m$^2$) exercée par le fluide sur la plaque inférieure.

---

Solution:
(a) $v_x(z) = \frac{A}{2\eta}z^2 + (\frac{v_{\rm sup}}{d} - \frac{A}{2\eta}d)z$ [2]
(b) $f_{sup,x} = -\eta\left(\frac{Ad}{2\eta} + \frac{v_{sup}}{d}\right)$ [2]
(c) $f_{inf,x} = \eta\left(-\frac{Ad}{2\eta} + \frac{v_{sup}}{d}\right)$ [1]
Solution détaillée:
(a) Equation de Navier-Stokes:

$$-\nabla P + \rho\vec{g} + \eta\nabla^2\vec{v} = \rho\frac{d\vec{v}}{dt}$$

Ecoulement stationnaire, gravité négligeable, fluide incompressible:

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} = 0 \qquad \vec{g} = 0 \qquad \nabla\cdot\vec{v} = 0$$

Conditions aux bords:

$$\vec{v}(z=0) = 0, \vec{v}(z=d) = v_{sup}\vec{e}_x$$

Donc:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v} = 0 + (\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v} = (\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v}$$

mais:

$$(\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v} = (v_x\frac{\partial}{\partial x} + v_y\frac{\partial}{\partial y} + v_z\frac{\partial}{\partial z})\,(v_x, v_y, v_z)$$

et:

$$v_y = v_z = 0$$

donc:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = (\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v} = v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}\vec{e}_x$$

mais:

$$\nabla\cdot\vec{v} = (\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z})$$

et:

$$\nabla\cdot\vec{v} = 0, \quad v_y = v_z = 0 \implies \frac{\partial v_x}{\partial x} = 0$$

donc:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}\vec{e}_x = 0$$

(Le fait que $\frac{d\vec{v}}{dt} = 0$ peut être déduit intuitivement en pensant au fait que, dans la situation que nous étudions, la particule fluide ne subit aucune accélération).
Donc:

$$-\nabla P \ + \eta \nabla^2 \vec{v} = 0$$

mais:

$$\nabla^2 \vec{v} = (\nabla^2 v_x, \nabla^2 v_y, \nabla^2 v_z) = \nabla^2 v_x \vec{e}_x = (\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2})\vec{e}_x = \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}\vec{e}_x$$

donc:

$$-\frac{\partial P}{\partial x}\vec{e}_x - \frac{\partial P}{\partial y}\vec{e}_y - \frac{\partial P}{\partial z}\vec{e}_z + \eta \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}\vec{e}_x = 0$$

et donc:

$$\eta \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} = \frac{\partial P}{\partial x} = A$$

Après une double intégration:

$$v_x(z) = \frac{A}{2\eta} z^2 + Bz + C$$

avec les conditions aux bords:

$$v_x(0) = 0 \Rightarrow 0 = 0 + 0 + C \Rightarrow C = 0$$

$$v_x(d) = v_{\text{sup}} \Rightarrow v_{\text{sup}} = \frac{A}{2\eta} d^2 + Bd \Rightarrow B = \frac{v_{\text{sup}}}{d} - \frac{A}{2\eta} d$$

Enfin:

$$v_x(z) = \frac{A}{2\eta} z^2 + (\frac{v_{\text{sup}}}{d} - \frac{A}{2\eta} d) z = \left( \frac{A}{2\eta}(z - d) + \frac{v_{\text{sup}}}{d} \right) z$$

Ce résultat est cohérent avec le fait qu'en l'absence de gradient de pression (c'est-à-dire pour $A = 0$), le profil de la vitesse est celui de Couette conventionnel, c'est-à-dire un profil de vitesse linéaire

$$v_x(z) = \frac{v_{\text{sup}}}{d} z$$

(b,c)

$$f_{sup,x} = -\eta \left. \frac{\partial v_x}{\partial z} \right|_{z=d}$$

$$f_{inf,x} = \eta \left. \frac{\partial v_x}{\partial z} \right|_{z=0}$$

mais:

$$\frac{\partial v_x}{\partial z} = \frac{A}{\eta} z - \frac{A}{2\eta} d + \frac{v_{sup}}{d}$$

donc:

$$f_{sup,x} = -\eta \left( \frac{Ad}{2\eta} + \frac{v_{sup}}{d} \right)$$

$$f_{inf,x} = \eta \left( -\frac{Ad}{2\eta} + \frac{v_{sup}}{d} \right)$$

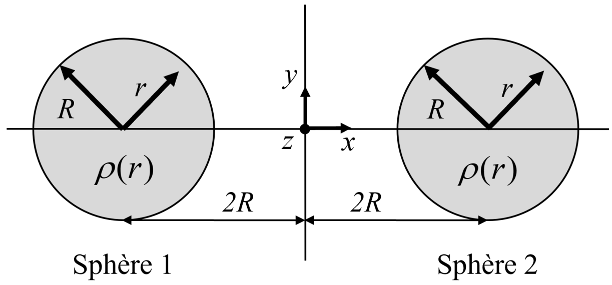
Ce résultat est cohérent avec le fait qu'en l'absence de gradient de pression (c'est-à-dire pour $A = 0$), la force agissant sur la plaque supérieure est dans la direction $-x$, tandis que celle agissant sur la plaque inférieure est dans la direction $+x$. En particulier, nous retrouvons les résultats obtenus pour l'écoulement de Coutte conventionnel:

$$f_{sup,x} = -\eta \frac{v_{sup}}{d}$$

$$f_{inf,x} = \eta \frac{v_{sup}}{d}$$

## Problème 2 [6 points]

Deux sphères isolantes identiques de rayon $R$ ont une densité de charge (en C/m$^3$) non uniforme $\rho = Ar$, où $A$ est une constante positive (en C/m$^4$) et $r$ est la distance au centre de la sphère (en m). La centre de la sphère 1 est en $(-2R, 0, 0)$. Le centre de la sphère 2 est en $(2R, 0, 0)$. La constante diélectrique relative des deux sphères est $\epsilon_r = 1$.
Déterminer (en fonction de $A$, $R$ et $y$) le champ électrique $\mathbf{E}$ (en V/m) en :
(a) $(0, 0, 0)$
(b) $(3R/2, 0, 0)$
(c) $(2R, 0, 0)$
(d) $(0, y, 0)$ (i.e., le long de l'axe $y$).




---

Solution:
(a) $\mathbf{E}(0,0,0) = 0$ [1]
(b) $\mathbf{E}(3R/2,0,0) = -\frac{33AR^2}{784\epsilon_0}\hat{\mathbf{x}}$ [2]
(c) $\mathbf{E}(2R,0,0) = \frac{AR^2}{64\epsilon_0}\hat{\mathbf{x}}$ [1]
(d) $\mathbf{E}(0,y,0) = \frac{1}{2\varepsilon_0}\frac{AR^4 y}{(4R^2+y^2)^{3/2}}\hat{\mathbf{y}}$ [2]
Solution détaillée:
Champ électrique à l'extérieur ($r > R$) et à l'intérieur ($r < R$) de chacune des deux sphères.
Pour $r > R$:

$$\oint_S \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho dV$$

$$\oint_S \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s} = \oint_S E ds = E\oint_S ds = E4\pi r^2$$

$$\frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho dV = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_0^R Ar4\pi r^2 dr = \frac{A4\pi}{\varepsilon_0}\int_0^R r^3 dr = \frac{A4\pi}{\varepsilon_0}\frac{1}{4}R^4 = \frac{\pi AR^4}{\varepsilon_0}$$

$$\left(\frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho dV = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V Arr^2\sin\theta dr d\theta d\varphi = \frac{A}{\varepsilon_0}\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^{\pi}\sin\theta\int_0^R r^3 dr = \frac{A}{\varepsilon_0}2\pi 2\frac{1}{4}R^4 = \frac{\pi AR^4}{\varepsilon_0}\right)$$

donc:

$$E4\pi r^2 = \frac{\pi AR^4}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{AR^4}{4\varepsilon_0 r^2}$$

Pour $r < R$:

$$\oint_S \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho dV$$

$$\frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho dV = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_0^r Ar4\pi r^2 dr = \frac{A4\pi}{\varepsilon_0}\int_0^r r^3 dr = \frac{A4\pi}{\varepsilon_0}\frac{1}{4}r^4 = \frac{\pi Ar^4}{\varepsilon_0}$$

$$\left(\frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho dV = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V Arr^2\sin\theta dr d\theta d\varphi = \frac{A}{\varepsilon_0}\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^{\pi}\sin\theta\int_0^r r^3 dr = \frac{A}{\varepsilon_0}2\pi 2\frac{1}{4}r^4 = \frac{\pi Ar^4}{\varepsilon_0}\right)$$

donc:

$$E4\pi r^2 = \frac{\pi Ar^4}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{Ar^2}{4\varepsilon_0}$$

(a)
Par symétrie, $E(0,0,0) = 0$.

(b)
Champ électrique produit par la sphère 1 en $(3R/2, 0, 0)$. Nous utilisons l'équation obtenue pour $r > R$:

$$r = (3R/2) + 2R = 7R/2$$

$$\mathbf{E}(3R/2, 0, 0) = \frac{AR^4}{4\varepsilon_0 (7R/2)^2}\hat{\mathbf{x}} = \frac{AR^2}{49\varepsilon_0}\hat{\mathbf{x}}$$

Remarque: Étant donné que la distribution de charge a une symétrie sphérique (bien qu'elle ne soit pas uniforme), le même résultat peut être obtenu en considérant que le champ produit par la sphère 1 à une distance $r > R$ de son centre soit égal au champ produit par la charge contenue dans la sphère 1 $(Q)$ concentrée en son centre, c'est-à-dire:

$$E(3R/2, 0, 0) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{(7R/2)^2} = \frac{AR^2}{49\varepsilon_0}$$

avec:

$$Q = \int_V \rho dV = \int_0^R Ar4\pi r^2 dr = 4\pi A \int_0^R r^3 dr = 4\pi A \frac{1}{4} R^4 = \pi A R^4$$

Champ électrique produit par la sphère 2 en $(3R/2, 0, 0)$. Nous utilisons l'équation obtenue pour $r < R$:

$$r = R/2$$

$$\mathbf{E}(3R/2, 0, 0) = -\frac{A(R/2)^2}{4\varepsilon_0}\hat{\mathbf{x}} = -\frac{AR^2}{16\varepsilon_0}\hat{\mathbf{x}}$$

Remarque : Étant donné que la distribution de charge a une symétrie sphérique (bien qu'elle ne soit pas uniforme), le même résultat peut être obtenu en considérant que le champ produit par la sphère 2 à l'intérieur, à une distance $r = R/2$ de son centre, soit égal au champ produit par la charge contenue dans une sphère de rayon $R/2$ $(Q')$ concentrée en son centre, c'est-à-dire :

$$E(3R/2, 0, 0) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q'}{(R/2)^2} = \frac{AR^2}{16\varepsilon_0}$$

$$Q' = \int_{V'} \rho dV = \int_0^{R/2} Ar4\pi r^2 dr = \frac{\pi A R^4}{16}$$

Champ électrique total en $(3R/2, 0, 0)$:

$$\mathbf{E}(3R/2, 0, 0) = \frac{AR^2}{49\varepsilon_0}\hat{\mathbf{x}} - \frac{AR^2}{16\varepsilon_0}\hat{\mathbf{x}} = -\frac{33AR^2}{784\varepsilon_0}\hat{\mathbf{x}}$$

(c)
Champ électrique produit par la sphère 1 en $(2R, 0, 0)$:

$$r = 2R + 2R = 4R$$

$$\mathbf{E}(2R, 0, 0) = \frac{AR^4}{4\varepsilon_0 (4R)^2}\hat{\mathbf{x}} = \frac{AR^2}{64\varepsilon_0}\hat{\mathbf{x}}$$

Champ électrique produit par la sphère 2 en $(2R, 0, 0)$:

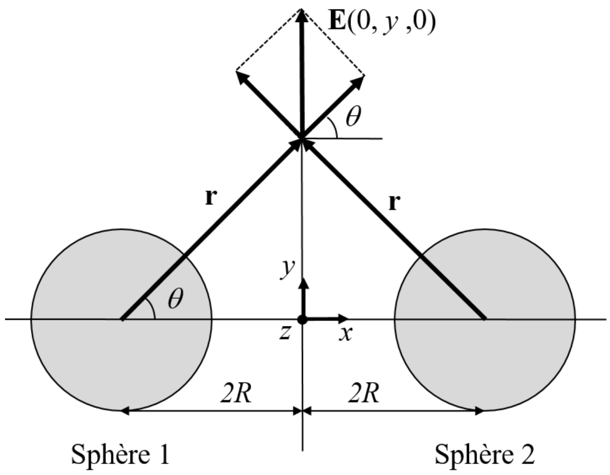
$$r = 0$$

$$\mathbf{E}(2R, 0, 0) = 0$$

Champ électrique total en $(2R, 0, 0)$:

$$\mathbf{E}(2R, 0, 0) = \frac{AR^2}{64\varepsilon_0}\hat{\mathbf{x}}$$

(d)




Le champ électrique total en $(0, y, 0)$ est dirigé le long de l'axe $y$. Il est donné par la somme des composantes le long de l'axe $y$ du champ électrique (identique) produit par les deux sphères.

$$r = \sqrt{(2R)^2 + y^2} \qquad \sin\theta = \frac{y}{\sqrt{(2R)^2 + y^2}}$$

Donc:

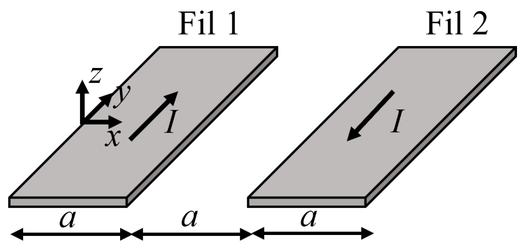
$$\mathbf{E}(0, y, 0) = 2\frac{AR^4}{4\varepsilon_0\left(\sqrt{(2R)^2 + y^2}\right)^2}\sin\theta\hat{\mathbf{y}} = \frac{AR^4}{2\varepsilon_0\left(\sqrt{(2R)^2 + y^2}\right)^2}\frac{y}{\sqrt{(2R)^2 + y^2}}\hat{\mathbf{y}} = \frac{AR^4 y}{2\varepsilon_0\left((2R)^2 + y^2\right)^{3/2}}\hat{\mathbf{y}}$$

donc:

$$\mathbf{E}(0, y, 0) = \frac{AR^4 y}{2\varepsilon_0\left((2R)^2 + y^2\right)^{3/2}}\hat{\mathbf{y}}$$

## Problème 3 [5 points]

Deux fils plats conducteurs identiques de largeur $a$, de longueur infinie et d'épaisseur négligeable, sont disposés dans le plan $xy$, tous deux parallèles à l'axe $y$ et séparés par une distance $a$. Les deux fils sont parcourus par un même courant $I$ dans la direction de l'axe $y$, mais en sens opposé. Le courant est réparti de manière uniforme sur toute la largeur $a$ des fils.




Déterminer, (en fonction de $a$ et $I$):
(a) le champ magnétique $\mathbf{B}$ en $(3a/2, 0, 0)$ (en T),
(b) la force par unité de longueur $\mathbf{f}_2$ qui agit sur le fil 2 (en N/m),
(c) la force par unité de longueur $\mathbf{f}_1$ qui agit sur le fil 1 (en N/m).

---

Solution:
(a) $\mathbf{B}(3a/2, 0, 0) = -\frac{\mu_0 I}{\pi a} \ln(3)\,\hat{\mathbf{z}}$ [2]
(b) $\mathbf{f}_2 = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi a} \ln\left(\frac{27}{16}\right)\hat{\mathbf{x}}$ [2]
(c) $\mathbf{f}_1 = -\frac{\mu_0 I^2}{2\pi a} \ln\left(\frac{27}{16}\right)\hat{\mathbf{x}}$ [1]

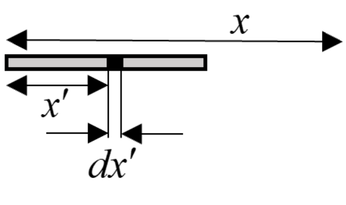
Solution détaillée:
(a) Un fil plat de longueur infinie parcouru par un courant $I$ uniformément distribué sur sa largeur et orienté dans la direction longitudinale du fil est équivalent à une série de fils de section infinitésimal disposés côte à côte, chacun portant un courant $(I/a)dx$. Le champ magnétique produit par un fil infini de section infinitésimal à une distance radiale $r$ du fil peut être calculé à l'aide de la loi d'Ampère:

$$\int_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} \Rightarrow$$

$$\int_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = B2\pi r \qquad \mu_0 \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 I \Rightarrow$$

$$B2\pi r = \mu_0 I \Rightarrow B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

Utilisons ce résultat pour calculer le champ magnétique produit par le fil 1 le long de l'axe $x$, pour $x > a$, c'est-à-dire $B(x, 0, 0)$.




$$d\mathbf{B}(x, 0, 0) = -\frac{\mu_0}{2\pi(x - x')}\frac{I}{a}dx'\hat{\mathbf{z}}$$

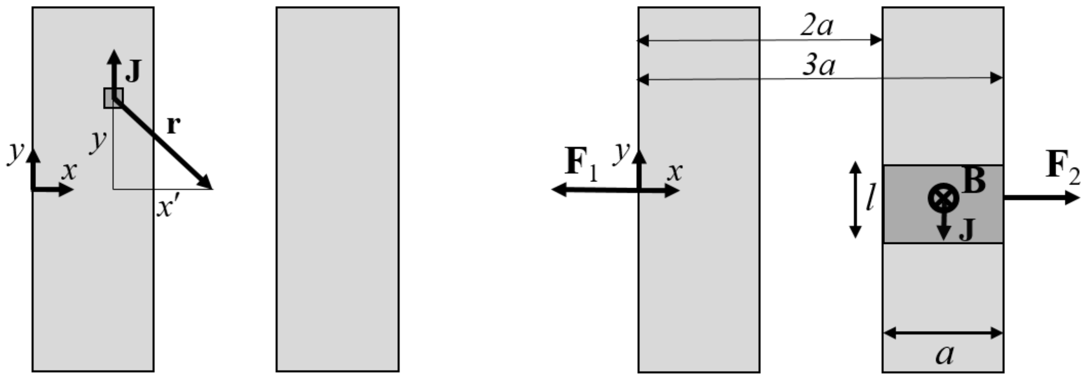
$$\mathbf{B}(x, 0, 0) = -\int_0^a \frac{\mu_0}{2\pi(x - x')}\frac{I}{a}dx'\hat{\mathbf{z}} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi a}\ln\left(\frac{x}{x - a}\right)\hat{\mathbf{z}}$$

$$\mathbf{B}(3a/2, 0, 0) = -\frac{\mu_0 I}{2\pi a}\ln\left(\frac{3a/2}{3a/2 - a}\right)\hat{\mathbf{z}} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi a}\ln(3)\,\hat{\mathbf{z}}$$

Le champ magnétique produit par les deux fils en $(3a/2, 0, 0)$ est le même. Donc, le champ magnétique total en $(3a/2, 0, 0)$ est:

$$\mathbf{B}(3a/2, 0, 0) = -\frac{\mu_0 I}{\pi a}\ln(3)\,\hat{\mathbf{z}}$$

Remarque: Le même résultat peut être obtenu en utilisant la loi de Biot-Savart:




Le même résultat peut être obtenu en utilisant la loi de Biot-Savart:

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\mathbf{J}\times\hat{\mathbf{r}}}{r^2}dV \qquad \mathbf{J} = (0, \frac{I}{adz}, 0) \qquad \mathbf{r} = (x', y, 0)$$

$$r = \sqrt{x'^2 + y^2} \qquad \hat{\mathbf{r}} = \frac{1}{\sqrt{x'^2 + y^2}}(x', y, 0)$$

donc

$$\mathbf{J}\times\hat{\mathbf{r}} = -\frac{I}{adz}\frac{x'}{\sqrt{x'^2 + y^2}}\hat{\mathbf{z}}$$

et donc

$$d\mathbf{B}(x,0,0) = -\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{1}{(x'^2+y^2)}\frac{I}{adz}\frac{x'}{\sqrt{x'^2+y^2}}dx'dydz\hat{\mathbf{z}} = -\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I}{a}\frac{x'}{\left(x'^2+y^2\right)^{3/2}}dx'dy\hat{\mathbf{z}}$$

et donc

$$\mathbf{B}(x,0,0) = -\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I}{a}\int\limits_{x-a}^{x}dx'\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x'}{\left(x'^2+y^2\right)^{3/2}}dy\hat{\mathbf{z}} = -\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I}{a}\int\limits_{x-a}^{x}dx'\frac{2x'}{x'^2}\hat{\mathbf{z}} = -\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I}{a}\int\limits_{x-a}^{x}dx'\frac{2}{x'} = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{a}\ln\left(\frac{x}{x-a}\right)\hat{\mathbf{z}}$$

(b)
La force qui agit sur une partie du fil plat 2 de longueur $l$, largeur $a$, épaisseur $dz$ (volume $V_2 = ladz$), parcouru par un courant $I$ et immergé dans un champ magnétique $\mathbf{B}$ est (voir le dessin à la page précédente):

$$\mathbf{F}_2 = \int\limits_{V_2} \mathbf{J} \times \mathbf{B} dV \qquad \mathbf{J} = (0, -\frac{I}{adz}, 0) \qquad \mathbf{B} = (0, 0, -\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{a}\ln\left(\frac{x}{x-a}\right))$$

donc

$$\mathbf{J} \times \mathbf{B} = \frac{I}{adz}\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{a}\ln\left(\frac{x}{x-a}\right)\hat{\mathbf{x}}$$

donc

$$\mathbf{F}_2 = \int\limits_{V_2} \frac{I}{adz}\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{a}\ln\left(\frac{x}{x-a}\right) dxdydz\hat{\mathbf{x}} = \int\limits_{-l/2}^{+l/2} dy \int\limits_{2a}^{3a} dx \frac{I}{a}\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{a}\ln\left(\frac{x}{x-a}\right)\hat{\mathbf{x}}$$

donc la force par unité de longueur est:

$$\mathbf{f}_2 = \int\limits_{2a}^{3a} dx \frac{I}{a}\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{a}\ln\left(\frac{x}{x-a}\right)\hat{\mathbf{x}} = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I^2}{a^2}\int\limits_{2a}^{3a}\ln\left(\frac{x}{x-a}\right)dx$$

mais (voir page 1)

$$\int \ln\left(\frac{x}{x-a}\right)dx = c\ln(a-x) + x\ln\left(\frac{x}{x-a}\right)$$

donc

$$\int\limits_{2a}^{3a}\ln\left(\frac{x}{x-a}\right)dx = \left[a\ln(a-x) + x\ln\left(\frac{x}{x-a}\right)\right]_{2a}^{3a} =$$

$$= a\ln(a-3a) + 3a\ln\left(\frac{3a}{3a-a}\right) - a\ln(a-2a) - 2a\ln\left(\frac{2a}{2a-a}\right) =$$

$$= a\left(\ln(-2a) + 3\ln\left(\frac{3}{2}\right) - \ln(-a) - 2\ln(2)\right) = a\left(\ln(-2a) + \ln\left(\frac{27}{8}\right) - \ln(-a) - \ln(4)\right) = a\ln\left(\frac{27}{16}\right)$$

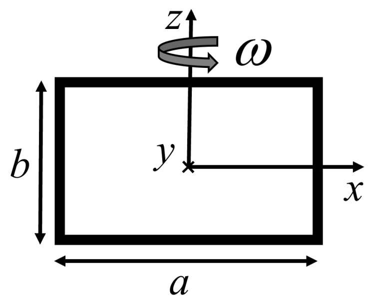
donc

$$\mathbf{f}_2 = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi a}\ln\left(\frac{27}{16}\right)\hat{\mathbf{x}}$$

(c)
La force entre les deux fils est répulsive. Par symétrie, la force qui agit sur le fil 1 est donnée par:

$$\mathbf{f}_1 = -\mathbf{f}_2 \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{f}_1 = -\frac{\mu_0 I^2}{2\pi a}\ln\left(\frac{27}{16}\right)\hat{\mathbf{x}}$$

## Problème 4 [6 points]




Une boucle conductrice rectangulaire avec des côtés $a$ et $b$, une résistance $R$, et une inductance négligeable, tourne avec une vitesse angulaire constante $\omega$ autour de l'axe $z$.
Le centre de la boucle est en (0, 0, 0). A l'instant $t = 0$, la boucle est dans le plan $xz$. Déterminer le travail mécanique $W$ (en J) nécessaire pour maintenir la boucle en rotation à vitesse angulaire constante $\omega$ pendant une rotation complète dans un champ magnétique indépendant du temps:
(a) uniforme $\mathbf{B} = B_0\hat{\mathbf{x}}$
(b) non-uniforme $\mathbf{B} = B_0\left(1 - \frac{4y^2}{a^2}\right)\hat{\mathbf{x}}$

---

Solution:
(a) $W = \frac{\pi B_0^2 \omega a^2 b^2}{R}$ [3]
(b) $W = \frac{5\pi}{8}\frac{B_0^2 \omega a^2 b^2}{R}$ [3]
Solution détaillée:
(a) La force électromotrice induite dans la boucle est:

$$\mathcal{E}(t) = -\frac{d}{dt}\int_S \mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}$$

Nous pouvons exprimer $\mathbf{B}$ et $d\mathbf{s}$ dans le système en rotation $x'y'z'$ comme:

$$\mathbf{B} = B_0(\cos(\omega t)\hat{\mathbf{x}}' + \sin(\omega t)\hat{\mathbf{y}}')$$

$$d\mathbf{s} = dx'dz'\hat{\mathbf{y}}'$$

donc

$$\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s} = B_0\sin(\omega t)dx'dz'$$

et donc

$$\int_S \mathbf{B}\cdot d\mathbf{s} = B_0\sin(\omega t)\int_{-a/2}^{a/2}dx'\int_{-b/2}^{b/2}dz' = B_0\sin(\omega t)ab$$

et donc

$$\mathcal{E}(t) = -B_0\omega\cos(\omega t)ab$$

Le courant induit dans la boucle est:

$$I(t) = \frac{\mathcal{E}(t)}{R} = \frac{B_0\omega\cos(\omega t)ab}{R}$$

La puissance dissipée dans la résistance à tout moment est donnée par:

$$P(t) = RI(t)^2$$

L'énergie totale dissipée pendant une rotation complète est l'intégrale de la puissance sur une période $T = \frac{2\pi}{\omega}$:

$$E_J = \int_0^T P(t)\,dt = \frac{B_0^2\omega^2 a^2 b^2}{R}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}}\cos^2(\omega t)dt$$

mais

$$\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}}\cos^2(\omega t)dt = (1/\omega)\int_0^{2\pi}\cos^2(\alpha)d\alpha = (1/\omega)\pi$$

avec $\alpha = \omega t$ et $dt = (1/\omega)d\alpha$. Donc l'énergie totale dissipée pendant une rotation complète est:

$$E_J = \frac{\pi B_0^2\omega a^2 b^2}{R}$$

Par conservation de l'énergie, le travail mécanique effectué pour maintenir la boucle en rotation est égal à l'énergie totale dissipée dans la résistance. Donc le travail mécanique est :

$$W = E_J = \frac{\pi B_0^2\omega a^2 b^2}{R}$$

(b) Répétons la même procédure adoptée en a), en exprimant les vecteurs dans le système $x'y'z'$. Dans ce cas, il faut également exprimer la coordonnée $y$ dans le système $x'y'z'$.

$$y = x'\sin(\omega t) + y'\sin(\omega t)$$

mais, sur la surface interne de la boucle, $y' = 0$ donc:

$$y = x'\sin(\omega t)$$

$\mathbf{B}$ et $d\mathbf{s}$ dans le système en rotation $x'y'z'$:

$$\mathbf{B} = B_0(1 - \frac{4x'^2\sin^2(\omega t)}{a^2})(\cos(\omega t)\hat{\mathbf{x}}' + \sin(\omega t)\hat{\mathbf{y}}')$$
$$d\mathbf{s} = dx'dz'\hat{\mathbf{y}}'$$

donc

$$\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s} = B_0(1 - \frac{4x'^2\sin^2(\omega t)}{a^2})\sin(\omega t)dx'dz'$$

et donc

$$\int_S \mathbf{B}\cdot d\mathbf{s} = B_0\sin(\omega t)(\int_{-a/2}^{a/2}dx'\int_{-b/2}^{b/2}dz' - \frac{4\sin^2(\omega t)}{a^2}\int_{-a/2}^{a/2}x'^2dx'\int_{-b/2}^{b/2}dz') =$$
$$= B_0\sin(\omega t)(ab - \frac{4\sin^2(\omega t)}{a^2}\frac{2}{3}\frac{a^3}{8}b) = B_0\sin(\omega t)(ab - \frac{\sin^2(\omega t)}{3}ab) =$$
$$= B_0\sin(\omega t)ab(1 - \frac{\sin^2(\omega t)}{3})$$

et donc

$$\mathcal{E}(t) = -\frac{d}{dt}\int_S \mathbf{B}\cdot d\mathbf{s} = -B_0ab(\omega\cos(\omega t) - \frac{3\omega\sin^2(\omega t)\cos(\omega t)}{3}) = -B_0\omega ab\cos(\omega t)(1 - \sin^2(\omega t)) =$$
$$= -B_0\omega ab\cos^3(\omega t)$$

Le courant induit dans la boucle est:

$$I(t) = \frac{\mathcal{E}(t)}{R} = \frac{B_0\omega\cos^3(\omega t)ab}{R}$$

La puissance dissipée dans la résistance à tout moment est donnée par:

$$P(t) = RI(t)^2$$

L'énergie totale dissipée pendant une rotation complète est l'intégrale de la puissance sur une période $T = \frac{2\pi}{\omega}$:

$$E_J = \int_0^T P(t)\,dt = \frac{B_0^2\omega^2a^2b^2}{R}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}}\cos^6(\omega t)dt$$

mais

$$\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}}\cos^6(\omega t)dt = (1/\omega)\int_0^{2\pi}\cos^6(\alpha)d\alpha = (1/\omega)\frac{5\pi}{8}$$

avec $\alpha = \omega t$ et $dt = (1/\omega)d\alpha$. Donc l'énergie totale dissipée pendant une rotation complète est:

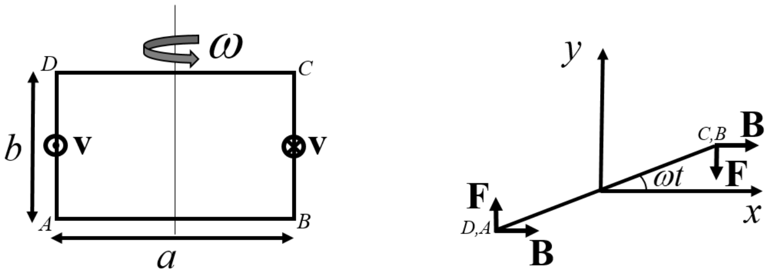
$$E_J = \frac{5\pi}{8}\frac{B_0^2\omega a^2b^2}{R}$$

Par conservation de l'énergie, le travail mécanique effectué pour maintenir la boucle en rotation est égal à l'énergie totale dissipée dans la résistance. Donc le travail mécanique est :

$$W = E_J = \frac{5\pi}{8}\frac{B_0^2\omega a^2b^2}{R}$$

Remarque 1: la force électromotrice induite peut également être obtenue en utilisant l'équation

$$\mathcal{E}(t) = \oint_C (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l}$$




$$\oint_C (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} = \int_A^B (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} + \int_B^C (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} + \int_C^D (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} + \int_D^A (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l}$$

$$AB, CD : (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \perp d\mathbf{l} \Rightarrow \int_A^B (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} = \int_C^D (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} = 0$$

$$BC, DA : (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \parallel d\mathbf{l} \Rightarrow \int_B^C (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} = \int_A^D (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} \neq 0$$

donc:

$$\varepsilon(t) = \oint_C (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} = 2\int_B^C (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l}$$

$$\mathbf{v} = \frac{\omega a}{2} \cos(\omega t)\,\hat{\mathbf{y}} - \frac{\omega a}{2} \sin(\omega t)\,\hat{\mathbf{x}}$$

(a)

$$(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} = \left(B_0 \frac{\omega a}{2} \cos(\omega t)\,\hat{\mathbf{z}}\right) \cdot dz\hat{\mathbf{z}} = B_0 \frac{\omega a}{2} \cos(\omega t)\, dz$$

$$\varepsilon(t) = 2\int_B^C (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} = 2\int_{-b/2}^{b/2} B_0 \frac{\omega a}{2} \cos(\omega t)\, dz = B_0 \omega a \cos(\omega t) \int_{-b/2}^{b/2} dz = B_0 \omega ab \cos(\omega t)$$

$$\varepsilon(t) = B_0 \omega ab \cos(\omega t)$$

(b)

$$(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} = \left(B_0 \left(1 - \frac{4y^2}{a^2}\right) \frac{\omega a}{2} \cos(\omega t)\,\hat{\mathbf{z}}\right) \cdot dz\hat{\mathbf{z}} = B_0 \left(1 - \frac{4y^2}{a^2}\right) \frac{\omega a}{2} \cos(\omega t)\, dz$$

$$y = \frac{a}{2} \sin(\omega t)$$

$$B_0 \left(1 - \frac{4y^2}{a^2}\right) \frac{\omega a}{2} \cos(\omega t)\, dz = B_0 \left(1 - \sin^2(\omega t)\right) \frac{\omega a}{2} \cos(\omega t)\, dz = B_0 \frac{\omega a}{2} \cos^3(\omega t)\, dz$$

$$\varepsilon(t) = 2\int_B^C (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} = 2\int_{-b/2}^{b/2} B_0 \frac{\omega a}{2} \cos^3(\omega t)\, dz = B_0 \omega a \cos^3(\omega t) \int_{-b/2}^{b/2} dz = B_0 \omega ab \cos^3(\omega t)$$

$$\varepsilon(t) = B_0 \omega ab \cos^3(\omega t)$$

Remarque 2: le travail nécessaire pour une rotation complète $W$ peut également être calculée à partir de la puissance $P$ nécessaire pour maintenir la bobine en rotation à une vitesse angulaire constante $\boldsymbol{\omega}$ (voir le dessin à la page précédente):

$$W = \int_0^{2\pi/\omega} P dt \qquad P = \mathbf{N} \cdot \boldsymbol{\omega} \qquad \mathbf{N} = \mathbf{r}_{AD} \times \mathbf{F}_{AD} + \mathbf{r}_{CB} \times \mathbf{F}_{CB} \qquad \boldsymbol{\omega} = \omega\hat{\mathbf{z}} \qquad \mathbf{B} = B(y)\hat{\mathbf{x}}$$

$$\mathbf{F}_{AD} = \int_V \mathbf{J} \times \mathbf{B} dV = \int_V \frac{I}{dxdy}\hat{\mathbf{z}} \times B(y)\hat{\mathbf{x}} dxdydz = \int_{-b/2}^{b/2} IB\left(y = \frac{a}{2}\sin(\omega t)\right) dz\hat{\mathbf{x}} = IbB\left(y = \frac{a}{2}\sin(\omega t)\right)\hat{\mathbf{x}}$$

$$\mathbf{r}_{AD} = \left(\frac{a}{2}\cos(\omega t), \frac{a}{2}\sin(\omega t), 0\right)$$

donc

$$\mathbf{r}_{AD} \times \mathbf{F}_{AD} = Ib\frac{a}{2}\cos(\omega t) B\left(y = \frac{a}{2}\sin(\omega t)\right)\hat{\mathbf{z}}$$

mais

$$\mathbf{r}_{AD} \times \mathbf{F}_{AD} = \mathbf{r}_{CB} \times \mathbf{F}_{CB}$$

donc

$$\mathbf{N} = 2Ib\frac{a}{2}\cos(\omega t) B\left(y = \frac{a}{2}\sin(\omega t)\right)\hat{\mathbf{z}} = Iab\cos(\omega t) B\left(y = \frac{a}{2}\sin(\omega t)\right)\hat{\mathbf{z}}$$

Pour la question (a) avec champ magnétique uniforme $\mathbf{B} = B_0\hat{\mathbf{x}}$:

$$\mathbf{N} = Iab\cos(\omega t) B_0\hat{\mathbf{z}}$$

donc

$$P = Iba\cos(\omega t) B_0\omega$$

mais

$$I = \frac{B_0\omega\cos(\omega t)ab}{R}$$

donc

$$P = \frac{B_0\omega\cos(\omega t)ab}{R} ba\cos(\omega t) B_0\omega = \frac{B_0^2\omega^2 a^2 b^2 \cos^2(\omega t)}{R}$$

et donc

$$W = \int_0^{2\pi/\omega} P dt = \frac{B_0^2\omega^2 a^2 b^2}{R}\int_0^{2\pi/\omega} \cos^2(\omega t) dt = \frac{\pi B_0^2 \omega a^2 b^2}{R} \qquad \left(\int_0^{2\pi/\omega} \cos^2(\omega t) dt = \frac{1}{\omega}\pi\right)$$

Pour la question (b) avec champ magnétique non-uniforme $\mathbf{B} = B_0\left(1 - \frac{4y^2}{a^2}\right)\hat{\mathbf{x}}$:

$$B\left(y = \frac{a}{2}\sin(\omega t)\right) = B_0\left(1 - \frac{4\left(\frac{a}{2}\sin(\omega t)\right)^2}{a^2}\right) = B_0\left(1 - \sin^2(\omega t)\right) = B_0\cos^2(\omega t)$$

$$\mathbf{N} = Iab\cos(\omega t) B_0\cos^2(\omega t)\hat{\mathbf{z}} = Iab\cos^3(\omega t) B_0\hat{\mathbf{z}}$$

donc

$$P = Iba\cos^3(\omega t) B_0\omega$$

mais

$$I = \frac{B_0\omega\cos^3(\omega t) ab}{R}$$

donc

$$P = \frac{B_0\omega\cos^3(\omega t) ab}{R} ba\cos^3(\omega t) B_0\omega = \frac{B_0^2\omega^2 a^2 b^2 \cos^6(\omega t)}{R}$$

et donc

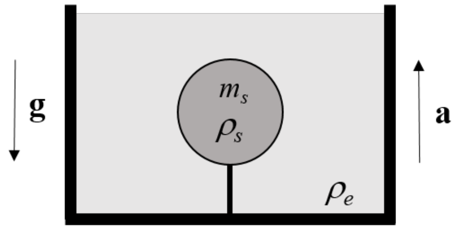
$$W = \int_0^{2\pi/\omega} P dt = \frac{B_0^2\omega^2 a^2 b^2}{R}\int_0^{2\pi/\omega} \cos^6(\omega t) dt = \frac{5\pi}{8}\frac{B_0^2 \omega a^2 b^2}{R} \qquad \left(\int_0^{2\pi/\omega} \cos^6(\omega t) dt = \frac{1}{\omega}\frac{5\pi}{8}\right)$$

# Questions à choix multiple

(une seule réponse correcte par question, 8 questions, 1 point/question,)

## Question 1

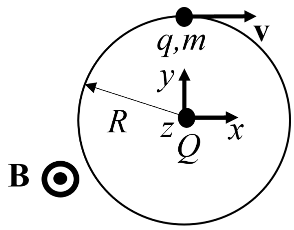
Une sphère solide de masse $m_s$ est maintenue au repos par rapport à un réservoir rempli d'eau avec une corde attachée au fond du réservoir. La sphère a une densité $\rho_s = (1/2)\rho_e$ où $\rho_e$ est la densité de l'eau. Le réservoir accélère verticalement vers le haut avec une accélération $a$. L'accélération du champ gravitationnel est indiquée par $g$. Déterminer la tension de la corde $T$ (en N) pour $m_s = 4$ kg, $a = 2$ m/s$^2$, $g = 9.8$ m/s$^2$, $\rho_e = 1000$ kg/m$^2$.




A. 8.0 N
B. 11.8 N
C. 31.2 N
D. 39.2 N
E. 47.2 N
F. 55.2 N
G. 78.4 N
H. 0 N

## Question 2

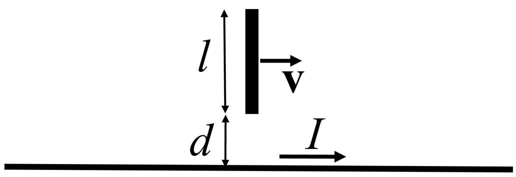
Une particule de masse $m$ et de charge positive $q$ se déplace à une vitesse $\mathbf{v} = v_0\hat{\mathbf{x}}$ en $(0, R, 0)$. Une particule avec charge positive $Q$ est fixée à l'origine $(0, 0, 0)$. Les deux charges se trouvent dans un champ magnétique uniforme $\mathbf{B} = B_0\hat{\mathbf{z}}$. Quelle doit être $B_0$ pour que la trajectoire de particule en mouvement soit un cercle de rayon $R$ autour de la particule immobile ?




A. $mv_0/RQq$
B. $2Q/4\pi\varepsilon_0 R^2 v_0$
C. $qQ/4\pi\varepsilon_0 R^2 v_0$
D. $mv_0/Rq$
E. $Q/4\pi\varepsilon_0 R^2 v_0$
F. $(mv_0/Rq) + (Q/4\pi\varepsilon_0 R^2 v_0)$
G. $(mv_0/Rq) - (Q/4\pi\varepsilon_0 R^2 v_0)$
H. 0

## Question 3

Un long fil rectiligne est parcouru par un courant constant $I$. Une tige métallique de longueur $l$ se déplace à la vitesse $v$ par rapport au fil. Quelle est la force électromotrice induite dans la tige ?




A. $(\mu_0 I v/2\pi)\ln((l+d)/d)$
B. $(\mu_0 I v)\ln((l+d)/d)$
C. $\mu_0 I v/2\pi$
D. $\mu_0 I v$
E. $(\mu_0 I v/4\pi)\ln((l+d)/d)$
F. $(\mu_0 I v/2\pi)\ln(l/d)$
G. $\mu_0 I v \ln(l/d)$
H. 0

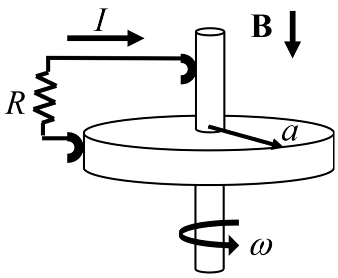
## Question 4

Un sous-marin (sou-marin $A$) se déplace dans l'eau à une vitesse de 8 m/s, en émettant une onde sonore à une fréquence de 2800 Hz. Un deuxième sous-marin (sous-marin $B$) se déplace à 9 m/s. Les deux sous-marins se dirigent l'un vers l'autre. La vitesse du son dans l'eau est de 1533 m/s. Quelle fréquence est détectée par un observateur à bord du sous-marin $B$ lorsque les deux sous-marins se rapprochent l'un de l'autre ?

A. 2797 Hz
B. 2802 Hz
C. 2831 Hz
D. 2865 Hz
E. 3067 Hz
F. 5604 Hz
G. 5662 Hz
H. 5923 Hz

## Question 5

Un disque conducteur de rayon $a$ tourne avec une vitesse angulaire $\omega$ dans un champ magnétique $B$ uniforme et perpendiculaire au disque. Un circuit conducteur est formé en connectant une extrémité d'une résistance $R$ à l'axe du disque et l'autre extrémité de la résistance au bord du disque, les deux connexions se faisant par des contacts glissants. La résistance et ses contacts restent immobiles. Déterminez le courant $I$ dans la résistance $R$, en supposant que la résistance et l'inductance du disque soient négligeables.




A. $\omega B a^2/R$
B. $\omega B a^2/2R$
C. $\omega B a/R$
D. $\omega B a/2R$
E. $2\omega B a^2/R$
F. $2\omega B a/R$
G. $4\omega B a/R$
H. 0

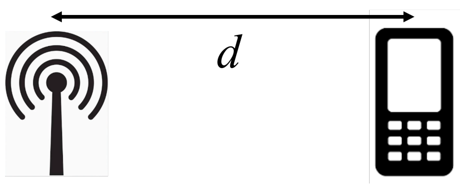
## Question 6

Supposons que la voilure solaire d'une véhicule spatial soit parfaitement réfléchissante, d'aire 1000 $m^2$, et orientée perpendiculairement au rayonnement solaire d'intensité 1000 $W/m^2$. Le véhicule spatial a une masse de 1000 kg. Si nous négligeons l'attraction gravitationnelle du Soleil et des planètes, combien de temps faut-il au véhicule spatial pour atteindre une vitesse de 1 m/s à partir du repos ?

A. $1.5\times10^2$ s
B. $3.0\times10^2$ s
C. $1.5\times10^3$ s
D. $3.0\times10^3$ s
E. $1.5\times10^4$ s
F. $3.0\times10^4$ s
G. $1.5\times10^5$ s
H. $3.0\times10^5$ s

## Question 7

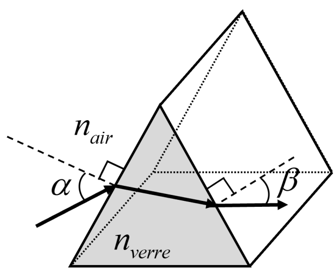
Un téléphone portable peut détecter des ondes électromagnétiques ayant une amplitude de champ électrique aussi faible que 0.005 V/m. En supposant que l'antenne du répéteur émette des ondes sphériques avec une puissance de 100 W, à quelle distance maximale $d$ le téléphone portable peut-il encore détecter le signal émis par l'antenne ?




A. 1 km
B. 5 km
C. 15 km
D. 22 km
E. 57 km
F. 120 km
G. 155 km
H. 234 km

## Question 8

Un faisceau laser rouge pénètre dans un prisme en verre ayant pour base un triangle équilatéral. L'angle d'incidence est $\alpha = 60°$. L'indice de réfraction de la lumière rouge dans le prisme est $n_{verre} = 1.51$. L'angle d'émergence dans l'air $\beta$, en supposant que l'air ait un indice de réfraction $n_{air} = 1$, est approximativement:




A. 0°
B. 15°
C. 30°
D. 40°
E. 50°
F. 60°
G. 75°
H. 90°