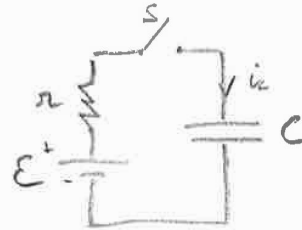


Exercice 1

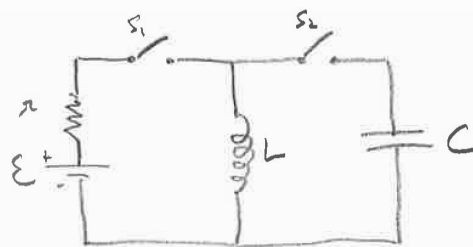
On souhaite charger un condensateur ($C = 2 \mu\text{F}$) jusqu'à accumuler une énergie de $U_0 = 5 \text{ mJ}$. On a à disposition une batterie ($\mathcal{E} = 1 \text{ kV}$, $r = 1 \Omega$) et une bobine ($L = 0.1 \mu\text{H}$).

Edison décide de procéder ainsi :



- $t = 0$, fermer S
- $t = t_0$, ouvrir S .

Tesla décide d'utiliser la bobine :



- $t = 0$, fermer S_1
- $t = t_1$, ouvrir S_1 et fermer S_2
- $t = t_2$, ouvrir S_2

Qui gagne la course ?

Dans un premier temps calculons t_0 .

C'est un circuit RC simple avec le condensateur initialement déchargé, donc la tension aux bornes du condensateur évolue comme $V_c(t) = \mathcal{E}(1 - e^{-t/\tau_c})$

Note: en appliquant la loi des mailles : $\mathcal{E} - r i_c - V_c = 0$

et on a $i_c = C \frac{dV_c}{dt}$ donc $\frac{dV_c}{dt} + \frac{1}{\tau_c} V_c = \frac{\mathcal{E}}{\tau_c}$

Solution de l'éq. homogène $V_c^{(H)}(t) = \alpha e^{-t/\tau_c}$
 Solution particulière : $V_c^{(P)}(t) = \mathcal{E}$

Condition initiale : $V_c(0) = 0 = \alpha - \mathcal{E}$

Donc : $V_c(t) = \mathcal{E}(1 - e^{-t/\tau_c})$

L'énergie stockée dans le condensateur s'écrit :

$$U_c(t) = \frac{1}{2} C V_c(t)^2$$

Donc $U_c(t) = U_0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} C \mathcal{E}^2 (1 - e^{-t/\tau_c})^2 = U_0$

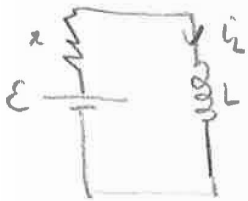
$$U_c(t) = U_0 \quad \Leftrightarrow \quad 1 - e^{-t_0/\tau_c} = \sqrt{\frac{2U_0}{C\epsilon^2}}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{t_0}{\tau_c} = \ln\left(1 - \sqrt{\frac{2U_0}{C\epsilon^2}}\right)$$

$$\Leftrightarrow t_0 = \tau_c \left(\ln\left(\frac{1}{1 - \sqrt{\frac{2U_0}{C\epsilon^2}}}\right) \right) \approx \boxed{14,2 \text{ ms}}$$

Calculons maintenant le temps mis par Tesla pour charger le condensateur.

Il doit d'abord charger la bobine avec une énergie U_0 .



Évolution du courant dans un circuit rL simple

$$i_L(t) = \frac{\epsilon}{r} (1 - e^{-t/\tau}) \quad \text{avec } \tau = \frac{L}{r}$$

Pour le démarrage, on applique la loi des mailles:

$$\epsilon - r i_L - V_L = 0$$

Comme on a $V_L = L \frac{di_L}{dt}$, cela donne

$$\frac{di_L}{dt} + \frac{r}{L} i_L = \frac{\epsilon}{L}$$

$$\text{Sol (h): } i_L(t) = \alpha e^{-t/\tau}$$

$$\text{Sol (p): } i_L(t) = \frac{\epsilon}{r}$$

$$\text{CI: } i_L(0) = 0 = \alpha + \frac{\epsilon}{r}$$

$$\Rightarrow i_L(t) = \frac{\epsilon}{r} (1 - e^{-t/\tau}), \quad \tau = \frac{L}{r}$$

La bobine emmagasine une énergie $U_L(t) = \frac{1}{2} L i_L(t)^2$

$$\text{donc à } t_1: \quad \frac{1}{2} L i_L(t_1)^2 = U_0$$

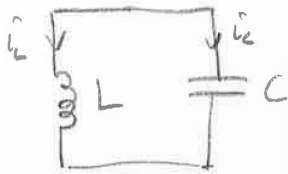
$$\Leftrightarrow (1 - e^{-t_1/\tau})^2 = \frac{2U_0 r^2}{L \epsilon^2}$$

$$\Leftrightarrow t_1 = \frac{L}{r} \ln\left(\frac{1}{1 - \sqrt{\frac{2U_0 r^2}{L \epsilon^2}}}\right) \approx \boxed{3,2 \text{ ms}}$$

Calculons maintenant t_2 .

(2)

Pour $t \geq t_1$:



$$i_C = -i_L$$

$$C \frac{dV_C}{dt} = -i_L = C \frac{dV_L}{dt} \quad \text{car } V_C = V_L$$

$$\text{et } V_L = L \frac{di_L}{dt} \Rightarrow LC \frac{d^2 i_L}{dt^2} + i_L = 0$$

$$\frac{d^2 i_L}{dt^2} + \frac{1}{LC} i_L = 0$$

En a donc $i_L(t) = A \sin(\omega_0(t-t_1)) + B \cos(\omega_0(t-t_1))$ avec $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

Conditions initiales: $i_L(t_1) = \sqrt{\frac{2U_0}{L}} = B$ (c'est le temps auquel la bobine est chargée avec une énergie U_0)

$$\begin{aligned} \frac{di_L}{dt}(t_1) &= \frac{V_L(t_1)}{L} \\ &= \frac{V_C(t_1)}{L} = 0 \quad \text{car le condensateur est initialement déchargé.} \\ &= A \omega_0 \end{aligned}$$

Donc $\left[i_L(t) = \sqrt{\frac{2U_0}{L}} \cos(\omega_0(t-t_1)) \right]$ pour $t \geq t_1$.

L'énergie dans le condensateur est finalement:

$$\begin{aligned} U_C(t) &= \frac{1}{2} C V_C(t)^2 = \frac{1}{2} C V_L^2 = \frac{1}{2} C L^2 \left(\frac{di_L}{dt} \right)^2 \\ &= \frac{1}{2} \cancel{L} \cancel{L}^2 \frac{2U_0}{\cancel{L}} \frac{1}{\cancel{L}} \sin^2(\omega_0(t-t_1)) = U_0 \sin^2(\omega_0(t-t_1)) \end{aligned}$$

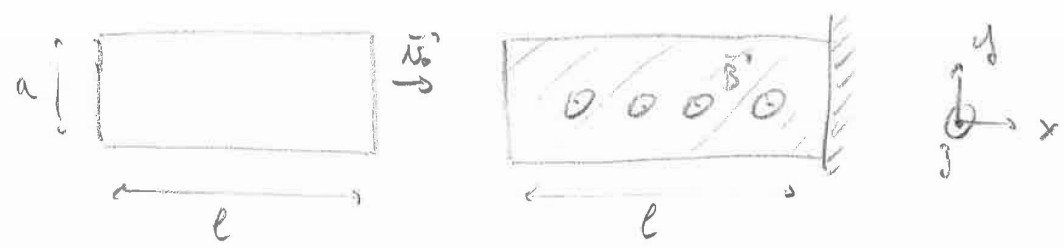
$$U_C(t_2) = U_0 \quad \text{pour} \quad t_2 - t_1 = \frac{\pi}{2\omega_0} = 0,70 \mu\text{s}$$

$$t_2 = t_1 + \frac{\pi}{2\omega_0} \approx \boxed{0,71 \mu\text{s}}$$

C'est finalement Edison qui gagne.

Exercice 2

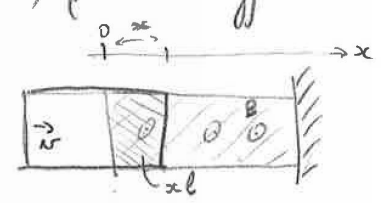
On construit un système de freinage magnétique pour un train de longueur $l = 50\text{ m}$, masse $m = 10\text{ tonnes}$, largeur $a = 4\text{ m}$, arrivant à une vitesse $v_0 = 30\text{ km/h}$.



On considère un cadre conducteur sous le train de dimensions $a \times l$ et de résistance totale $R = 1\ \Omega$. On génère un champ magnétique $\vec{B}$ constant vertical sur une surface de dimensions $a \times l$ avant le fin de la voie.

En négligeant les frottements, calculer le champ B minimum pour que le train s'arrête avant de toucher le mur. (On néglige les effets d'auto-induction)

La variation de flux de champ magnétique à travers le cadre produit une force électromotrice $\mathcal{E}(t)$. Cela crée un courant dans le cadre $i(t)$, donc une force de Lorentz sur le cadre, qui va affecter le mouvement du train.



Calculer la tension induite dans le cadre :

$$\mathcal{E}(t) = - \frac{d}{dt} \Phi_B \quad \text{avec} \quad \Phi_B = \iint_{S/\text{cadre}} \vec{B} \cdot d\vec{A} = \iint_{S_{\text{surface}} \text{ à } B} \vec{B} \cdot d\vec{A} = B \vec{e}_y \cdot x l \vec{e}_y = x l B$$

! Ici on décide d'orienter la surface selon $\vec{e}_y$, donc $\mathcal{E}$:

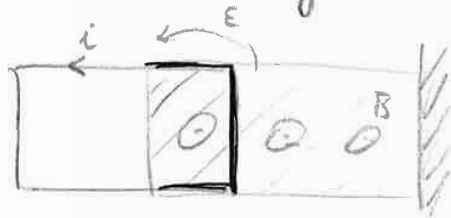


$$\mathcal{E} = -aB \frac{dx}{dt} = \boxed{-aBv} \quad (\text{tension induite})$$

Le courant dans le cadre est donc donné par :

$$\mathcal{E} - Ri = 0, \quad i = \frac{\mathcal{E}}{R} = \boxed{\frac{-aBv}{R}} \quad (\text{courant induit})$$

On calcule la force de Lorentz subie par le cadre.



pas de champ
donc pas de force de Lorentz

Les parties du cadre selon $\hat{x}$ subissent des forces de Lorentz égales et opposées (car $\vec{B}$ est le même, mais i change de sens).

On ne prend donc en compte que la partie selon $\hat{y}$, plongée dans $\vec{B}$

$$\begin{aligned} \vec{F} &= \int_{y=0}^a i d\vec{\ell} \times \vec{B} = iaB \underbrace{\vec{e}_y \times \vec{e}_z}_{\vec{e}_x} \\ &= -\frac{aB}{R} v aB \vec{e}_x = \boxed{\frac{-a^2 B^2 v}{R} \vec{e}_x} \quad (\text{force de Lorentz}) \end{aligned}$$

On applique maintenant la seconde loi de Newton au cadre; projetée selon $\hat{x}$:

$$m \frac{dv}{dt} = -\frac{a^2 B^2}{R} v \quad \Rightarrow \quad v = v_0 e^{-\frac{a^2 B^2}{mR} t}$$

$$v(t \rightarrow +\infty) = 0$$

Que vaut $x(t \rightarrow +\infty)$?

$$\text{On intègre : } x(t) - \underbrace{x_0}_{=0} = -\frac{mR}{a^2 B^2} v_0 \left(e^{-\frac{a^2 B^2}{mR} t} - 1 \right)$$

$$\boxed{x(t \rightarrow +\infty) = \frac{mRv_0}{a^2 B^2}}$$

$$\text{Et finalement : } x_\infty < l \quad \Leftrightarrow \quad B > \sqrt{\frac{mRv_0}{a^2 l}} \approx \boxed{14,4 \text{ T}}$$

- Qui va l'énergie ?

$$U_0 = \frac{1}{2} m v_0^2 \quad \text{et} \quad U_\infty = 0.$$

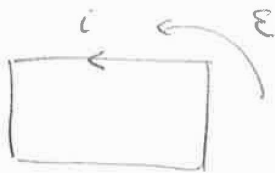
$$\begin{aligned} U_{\text{dissipée}} &= \int_0^{+\infty} \pi \tilde{i}(t)^2 dt = \int_0^{+\infty} \pi \frac{a^2 B^2}{r^2} v_0^2 e^{-\frac{2a^2 B^2 t}{m^2}} dt \\ &= \left[-\frac{\pi m a^2 B^2 v_0^2}{2a^2 B^2} e^{-\frac{2a^2 B^2 t}{m^2}} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{2} m v_0^2 \end{aligned}$$

- Si $B < B_{\text{min}}$, comment faire ?

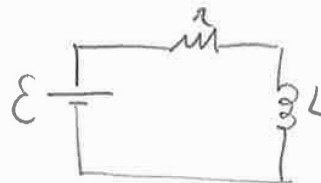
Ⓐ Rallonger la zone de $\vec{B}$

Ⓑ Laisser la zone de $\vec{B}$ de longueur l et éloigner le mur.

- Si on voulait prendre en compte l'inductance du cadre ?



$\Rightarrow$



$$E - ri - L \frac{di}{dt} = 0$$

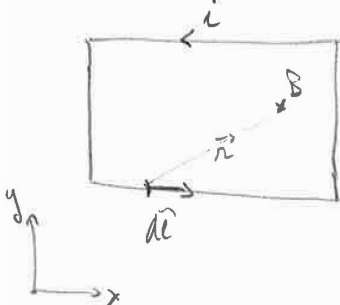
$$\begin{aligned} \text{Donc: } & \begin{cases} -\omega a B - ri - L \frac{di}{dt} = 0 \\ \text{avec: } \begin{cases} m \frac{dv}{dt} = F_i = i a B \end{cases} \end{cases} \quad \text{Plus compliqué...} \end{aligned}$$

- Pour calculer L :

$\rightarrow$ Si $a \sim l$, on est obligé d'utiliser

Biot & Savart

$$B(x, y) = \int_{\text{cadre}} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}$$



$\rightarrow$ Si $a \ll l$, on peut considérer les parties selon $\hat{x}$ comme infinies et utiliser Ampère pour 1 fil



(car B est constant selon le contour d'intégration)

Et on somme les deux fils par superposition.