

Final Exam

29.01.2025

The time available for the exam is 3 hours. No calculators, books or scripts are allowed, only one doublesided A4 handwritten paper with notes.

Use the space provided at each question and clearly mark your final answer.

Scrap paper is available at the end of the exam sheet.

SI units are implied throughout the exam.

NAME.....

N°SCIPER.....

$$\text{cartesian} \quad \nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

$$\text{cylindrical} \quad \nabla = \left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

$$\text{spherical} \quad \nabla = \left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \right)$$

$$\nabla U(r, \phi, z) = \begin{bmatrix} \frac{\partial U}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \phi} \\ \frac{\partial U}{\partial z} \end{bmatrix} \quad \nabla \cdot \vec{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial(rA_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\nabla^2 U = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \quad \nabla^2 \vec{A} = \begin{bmatrix} \nabla^2 A_r - \frac{A_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} \\ \nabla^2 A_\phi - \frac{A_\phi}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_r}{\partial \phi} \\ \nabla^2 A_z \end{bmatrix}$$

$$(\vec{A} \cdot \nabla) \vec{A} = \begin{bmatrix} A_r \frac{\partial A_r}{\partial r} + \frac{A_\phi}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{A_\phi^2}{r} + A_z \frac{\partial A_r}{\partial z} \\ A_r \frac{\partial A_\phi}{\partial r} + \frac{A_\phi}{r} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{A_\phi A_r}{r} + A_z \frac{\partial A_\phi}{\partial z} \\ A_r \frac{\partial A_z}{\partial r} + \frac{A_\phi}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \phi} + A_z \frac{\partial A_z}{\partial z} \end{bmatrix}$$

$$\nabla \times \vec{A} = \begin{bmatrix} \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z} \\ \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial(rA_\phi)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \phi} \end{bmatrix}$$

Problem 1

Consider a long, hollow cylinder of radius R_1 coaxial with a larger hollow cylinder of radius R_2 . The inner cylinder is moving with a velocity v_0 along the direction of its axis ($\hat{z}$), whereas the outer cylinder is fixed. A viscous (η) and incompressible fluid with density ρ occupies only the space inside the inner cylinder ($r < R_1$). A (negative) pressure gradient $-\frac{dP}{dz}$ is applied.

The flow can be considered fully established and for $Re \leq 10$ it can be considered laminar, gravitational forces can be neglected, and the no-slip condition can be assumed to apply.

a) Determine the velocity field of the flow for $Re \leq 10$ for $r < R_1$. (3 points)

b) Determine the total mass of the fluid that passes through the cylinder at a fixed z value in a time interval Δt (2 points)

NAME.....

- c) As shown in the lecture, the Reynolds number for flow through a pipe is $\rho \bar{v} D / \eta$ with D the diameter of the pipe and $\bar{v}$ the average velocity. What is the maximum pressure gradient that can be applied for the system described above before the flow becomes turbulent? (3 points)
- d) In the outer cylindrical shell ($R_1 < r < R_2$) the fluid is flowing back due to an opposite pressure gradient. Sketch the velocity profile $v(r)$ for $0 \leq r \leq R_2$. Assume laminar flow and no further calculation expected. (2 points)

Problem 2

Consider an infinite plane slab of thickness d placed along the xy -plane. The slab has volume charge density $\rho = a|z|$ with a a positive constant.

- a) Determine the electric field as a function of z where $z = 0$ coincides with the centre of the slab. (3 points).

- b) Determine the electrostatic potential as a function of z taking $\Phi = 0$ for $z = 0$. (2 points)

NAME.....

- c) Plot $E(z)$ and $\Phi(z)$. (2 points)

The same slab is now set in motion and moves with constant velocity v_0 along the $\hat{x}$ direction.

- d) Determine the direction of the magnetic field $\vec{B}$ for $z > 0$ from the symmetry of the system. (1 point)

- e) Calculate $\vec{B}(z)$. (3 points)

- f) Find an expression for the vector potential $\vec{\mathcal{A}}$. (3 points)
(Hint : $\vec{\mathcal{A}}$ is typically in the same direction as a current element. If you did not solve the previous parts, you can take a simple expression with $\vec{B} \neq 0$.)

Problem 3

- a) Consider a sphere of radius R made of a dielectric material with dielectric constant ϵ_r . Homogeneously distributed throughout the sphere is a (free) charge density ρ . Determine the electrostatic potential Φ at the centre of the sphere (relative to zero at infinity). (4 points)
- b) Consider a parallel plate capacitor with fixed potential difference Φ between the plates. The distance between the plates is b and attached to the plates are two slabs with thickness a of the same dielectric material (ϵ_r), whereby $2a < b$ and there thus is an empty space between the slabs. Determine the D-field in this empty region. (3 points)

In a betatron, a time-varying magnetic field $\vec{B}(t)$ can be used to accelerate particles with charge q and mass m . In the following only velocities $v \ll c$ are considered and $\vec{F} = m\vec{a}$ can be used. Rotational symmetry can be assumed.

- (Final questions on next page)

NAME.....

PHYS - 200
Autumn 2024

- c) Determine the ratio in magnitude between $B(R)$ and the average magnetic field in the circle enclosed by R . At $t = 0$ the particle can be assumed to be at rest and $B = 0$. (3 points)

- d) Sketch the possible B-field lines in the plane perpendicular to the orbit. (2 points)

French translation. In case of conflict the english version has preference.

1. Considérons un long cylindre creux de rayon R_1 coaxial avec un cylindre creux plus grand de rayon R_2 . Le cylindre intérieur se déplace à une vitesse v_0 le long de la direction de son axe ($\hat{z}$), tandis que le cylindre extérieur est fixe. Un fluide visqueux (η) et incompressible de densité ρ occupe uniquement l'espace à l'intérieur du cylindre intérieur ($r < R_1$). Un gradient (négatif) de pression $-\frac{dP}{dz}$ est appliqué. Dans ce qui suit, l'écoulement peut être considéré comme entièrement établi et pour $Re \leq 10$ il peut être considéré comme laminaire, les forces gravitationnelles peuvent être négligées et on peut supposer que la condition de non-glissement s'applique.

- a) Déterminer le champ de vitesse de l'écoulement pour $Re \leq 10$ pour $r < R_1$.
- b) Déterminer la masse totale du fluide qui traverse le cylindre à une valeur z fixe dans un intervalle de temps Δt
- c) Comme discuté dans le cours, le chiffre de Reynolds pour un écoulement dans un conduit est $\rho \bar{v} D / \eta$ avec D le diamètre du conduit et $\bar{v}$ la vitesse moyenne. Quel est le gradient de pression maximal qui peut être appliqué pour le système décrit ci-dessus avant que l'écoulement ne devienne turbulent ?
- d) Dans l'enveloppe cylindrique extérieure ($R_1 < r < R_2$), le fluide reflue sous l'effet d'un gradient de pression opposé. Faites un croquis du profil de la vitesse $v(r)$ pour $0 \leq r \leq R_2$. Supposons que l'écoulement est laminaire et qu'aucun autre calcul n'est attendu.

2. Considérons une plaque plane infinie d'épaisseur d placée le long du plan xy . La plaque a une densité volumique de charge $\rho = a|z|$ avec a une constante positive.

- a) Déterminer le champ électrique en fonction de z où $z = 0$ coïncide avec le centre de la plaque.
- b) Déterminer le potentiel électrostatique en fonction de z en prenant $\Phi = 0$ pour $z = 0$.
- c) Dessinez $E(z)$ et $\Phi(z)$.

La même plaque est maintenant mise en mouvement et se déplace avec une vitesse constante v_0 le long de la direction $\hat{x}$.

- d) Déterminer la direction du champ magnétique $\vec{B}$ pour $z > 0$ à partir de la symétrie du système.
- e) Calculez $\vec{B}(z)$.

f) Trouvez une expression pour le potentiel vectoriel $\vec{A}$ (Indice : $\vec{A}$ est généralement dans la même direction qu'un élément de courant. Si vous n'avez pas résolu les parties précédentes, vous pouvez prendre une expression simple avec $\vec{B} \neq 0$.)

3. a) Considérons une sphère de rayon R constituée d'un matériau diélectrique de constante diélectrique ϵ_r . Une densité volumique de charges (libres) ρ est répartie de façon homogène dans la sphère. Déterminez le potentiel électrostatique Φ au centre de la sphère (par rapport à zéro à l'infini).

b) Considérons un condensateur à plaques parallèles avec une différence de potentiel fixe Φ entre les plaques. La distance entre les plaques est b . Deux plaquettes d'épaisseur a du même matériau diélectrique (ϵ_r) sont attachées aux plaques, avec $2a < b$. Il y a donc un espace vide entre les plaquettes. Déterminez le champ D dans cette région vide.

4. Dans un bêatron, un champ magnétique variable dans le temps $B(t)$ peut être utilisé pour accélérer les particules de charge q et de masse m . Dans ce qui suit, seuls $v \ll c$ sont considérés et $\vec{F} = m\vec{a}$ peut être utilisé. On peut supposer une symétrie rotationnelle.

- a) Quel est le rayon R de l'orbite de la particule ?
- b) Dans un plan optimal, le rayon de la trajectoire ne change pas avec le temps. Utilisez ceci pour exprimer le champ électrique en termes de R et B . (Indice : différencier l'expression trouvée en (a))
- c) Déterminez le rapport en magnitude entre $B(R)$ et le champ magnétique moyen dans le cercle entouré par R . Au temps $t = 0$ on peut supposer que la particule est au repos et que $B = 0$.
- d) Esquissez les lignes de champ B possibles dans le plan perpendiculaire à l'orbite.

SCRAP PAPER. Will **not** be considered for grading.

SCRAP PAPER. Will **not** be considered for grading.

SCRAP PAPER. Will **not** be considered for grading.