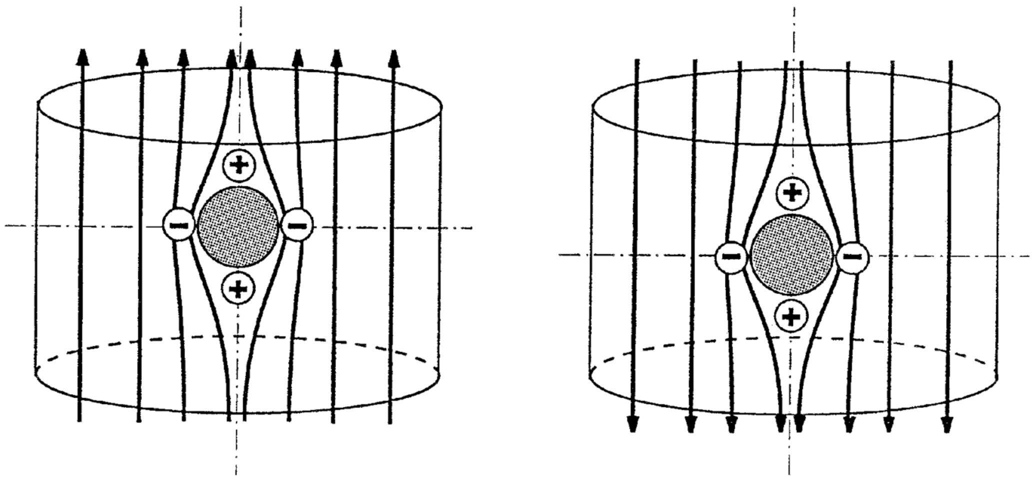
A. Questions

1.

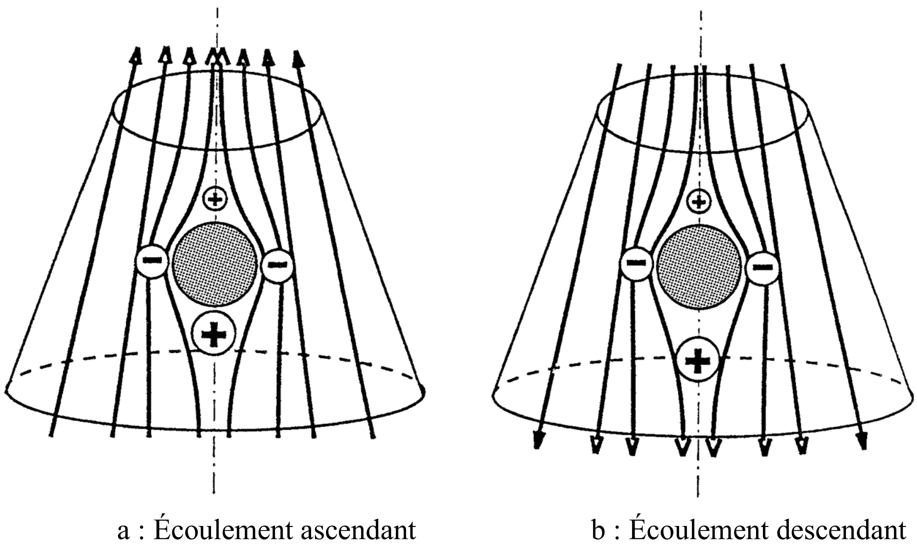
a) Le fluide étant incompressible, le débit est identique en amont et en aval de la sphère. Comme le diamètre du tube est constant, la vitesse du fluide est la même au-dessous et au-dessus de la sphère. La symétrie de la distribution des vitesses fait que les pressions dues aux gradients de vitesse s'équilibrent (cf. figure 1). D'autre part, le fluide étant supposé non visqueux, les frottements sont négligés. La seule force qui s'exerce sur la sphère est donc son poids ; elle chute avec une accélération constante.

Fig. 1 : Écoulement vertical symétrique
Les surpressions créées en aval et en amont sont égales.



a : Écoulement ascendant b : Écoulement descendant

Fig. 2 : Écoulement vertical convergent
Étant donné que le tube est plus étroit en haut, la vitesse de l'écoulement du fluide y est plus élevée. En conséquence, la surpression créée en dessous de la sphère est supérieure à celle qui est créée en dessus.



a : Écoulement ascendant b : Écoulement descendant

b) Puisque la section du tube diminue, la vitesse du fluide est supérieure au-dessus qu'au-dessous de la sphère. Il y aura donc une dépression qui tendra à aspirer la sphère vers le haut (cf. figure 2). Le résultat ne dépend absolument pas de la direction du fluide.

c) Si on écarte légèrement la sphère de l'axe de l'écoulement, la section relative de ce côté du tube diminue, et donc la vitesse du fluide augmente par rapport à celle du côté opposé. Il se crée ainsi une dépression qui aspire la sphère vers la paroi, la faisant alors se coller contre la paroi. La situation de la question 1 est par conséquent un équilibre instable.

2. Partant du cas où l'énergie mécanique se conserve le long de l'écoulement, on a :

$$p + \rho \cdot g \cdot h + ½\rho \cdot v^2 = \text{constante} \qquad \text{(Équation de Bernoulli)}$$

Étant donné que le fluide est incompressible, le débit est constant le long du conduit. Si de plus, le diamètre du tuyau est constant, la vitesse de l'écoulement ne varie pas non plus le long du parcours. Le terme $½\rho \cdot v^2$est donc également constant.

Par ailleurs, le terme $\rho \cdot g \cdot h$ est indépendant des frottements dus à la viscosité du fluide. Il ne reste plus que le terme en pression p pour traduire une variation de l'énergie mécanique ; sa variation est appelée perte de charge et notée p_c.
Le bilan énergétique s'écrit alors, en généralisant à un tuyau de diamètre variable :

$$p_1 + \rho \cdot g \cdot h_1 + \frac{1}{2}\rho \cdot v_1^2 = p_2 + \rho \cdot g \cdot h_2 + \frac{1}{2}\rho \cdot v_2^2 + p_c$$

où les indices 1 et 2 sont rattachés à deux points situés sur la même ligne d'écoulement (trajectoire d'une particule du fluide).

3. Les coudes donnent lieu à de fortes pertes de charge dès que le débit devient important car ils génèrent des tourbillons. Ces derniers peuvent de plus entraîner des vibrations dans le circuit ainsi que du bruit. Il est donc toujours préférable d'adoucir au maximum les angles faits par une conduite.

B. Problèmes

Remarques générales pour la résolution des problèmes qui suivent :

La démarche à appliquer est identique pour les cinq problèmes. On part de l'équation de Bernoulli (cf. polycopié chapitre 3.1).

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho \cdot v_1^2 + \rho \cdot g \cdot h_1 = p_2 + \frac{1}{2}\rho \cdot v_2^2 + \rho \cdot g \cdot h_2$$

Avec :
p_1, p_2 = pressions mesurées aux points 1 et 2 respectivement.
ρ = masse volumique de l'air.
v_1, v_2 = vitesses de l'air aux points 1 et 2 respectivement.
g = accélération de la pesanteur.
h_1, h_2 = hauteurs des points 1 et 2 respectivement.

On cherche à déterminer une différence de pression entre les points 1 et 2, c'est-à-dire :

$$p_1 - p_2 = \frac{1}{2}\rho \cdot (v_2^2 - v_1^2) + \rho \cdot g \cdot (h_2 - h_1)$$

Pour se simplifier la vie, on fait encore une hypothèse : les hauteurs h_1 et h_2 sont égales.

À partir de cette hypothèse, qui sera justifiée pour chacun des problèmes où ce résultat est utilisé, on a finalement :

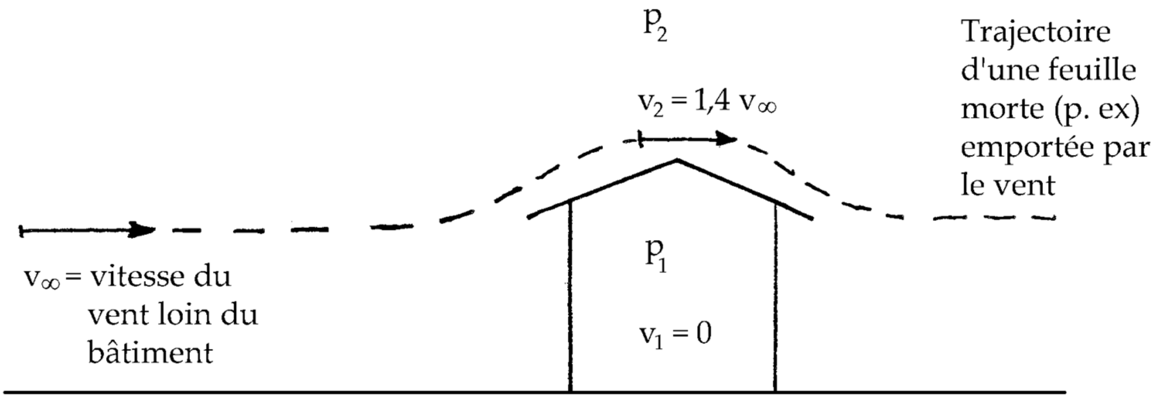
$$\Delta p = p_1 - p_2 = \frac{1}{2}\rho \cdot (v_2^2 - v_1^2)$$

On voit ici que l'on a $\Delta p > 0$ si $v_2 > v_1$; ainsi on définira par la suite les points 1 et 2 selon cette convention :

point 1 : vitesse de l'air minimale.
point 2 : vitesse de l'air maximale.

Problème 1 :

On a la situation suivante :



a) Au niveau du toit on sait que la vitesse du vent est 40% plus élevée que la vitesse du vent loin du bâtiment v_∞; d'où $v_2 = (1 + 0{,}4) \cdot v_\infty = 1{,}4 \cdot v_\infty$.

Dans le bâtiment on considère que l'air est quasi immobile d'où $v_1 = 0$.

On a ainsi : $\Delta p = \frac{1}{2}\rho \cdot v_2^2 > 0$

La force qui s'exerce sur le toit est dirigée vers le haut et vaut (avec S = surface du toit) :

$$F = S \cdot \Delta p$$

Donc : $F = S \cdot \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_2^2 = 500\text{m}^2 \cdot 881{,}4\text{Pa} = 440'700\text{N}$

Avec : $S = 500\text{m}^2$ (cf. polycopié page 2.3)

$v = 140\text{km/h} = 38{,}9\text{m/s}$

$\rho(18\,°\text{C}, 730\text{ torr}) = 1{,}2929\text{ kg/m}^3 \cdot \frac{730}{760} \cdot \frac{273}{273+18} = 1{,}165\text{ kg/m}^3$ (cf. annexe 2.1)

b) Cette force est égale et opposée à la force de gravitation qui s'exerce sur une masse m de

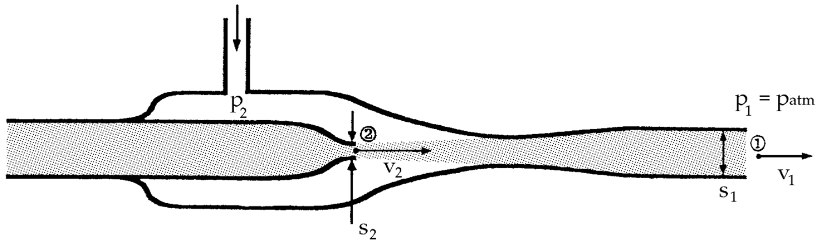
$$m = \frac{F}{g} = \frac{440'700\text{N}}{9{,}81\text{ m/s}^2} = 44{,}9\text{ tonnes, soit } m_{\text{surfacique}} = 44{,}9 \cdot \frac{10^3}{500} = 89{,}8\text{ kg/m}^2.$$

Cette force d'aspiration vers le haut est donc loin d'être négligeable si l'on sait que le poids d'un toit varie entre 40 et 300 kg/m^2.

L'hypothèse $h_1 = h_2$ est vérifiée puisqu'une différence de hauteur de 1 m conduit à un terme supplémentaire $\rho \cdot g \cdot h = 11{,}4$ Pa tout à fait négligeable par rapport à $\Delta p = 881{,}4$ Pa.

Problème 2 :

a) On a la situation suivante : (en coupe).



En admettant que le point 1 est situé juste à l'extrémité extérieure du tuyau, on a : $p_1 = p_{atm} = 1{,}013 \cdot 10^5$ Pa. Notre problème est de déterminer la pression p_2.

En utilisant l'équation de Bernoulli, on peut écrire :

$$p_2 + \rho \cdot g \cdot h_2 + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_2^2 = p_1 + \rho \cdot g \cdot h_1 + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_1^2$$

Comme $h_2 = h_1$ on a alors : $p_2 = p_1 - \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot (v_2^2 - v_1^2)$

v_1 est connu et vaut : $v_1 = 2{,}5\text{m/s}$.

Que vaut v_2? Pour déterminer v_2, calculons le débit volumique D passant au travers de la conduite :

Au point 1 : $D_1 = S_1 \cdot v_1$ Au point 2 : $D_2 = S_2 \cdot v_2$

Or comme nous travaillons avec un fluide incompressible (l'eau), le débit volumique est identique en tout point, donc $D_1 = D_2$ et l'on écrit :

$$v_2 = \frac{S_1}{S_2} \cdot v_1$$

On obtient finalement : $p_2 = p_1 - \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_1^2 \cdot \left(\left(\frac{S_1}{S_2}\right)^2 - 1\right)$

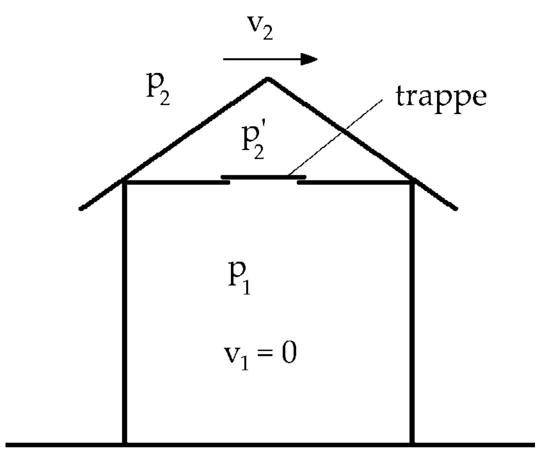
avec : $p_1 = p_{atm} = 1{,}013 \cdot 10^5$ Pa

$\rho = \rho_{eau}$= 1'000 kg/m^3 (Annexe A 4.1)
v_1 = 2,5 m/s
$\frac{S_1}{S_2} = 4$
On trouve : $p_2 = 5{,}4 \cdot 10^4$ Pa

La pression p_2 est donc inférieure de moitié à la pression atmosphérique. Il se produit ainsi une aspiration au niveau du petit tuyau soudé à la hauteur de l'étranglement.

b) La pression minimale que l'on peut atteindre par ce système correspond à la pression de vapeur saturante à la température de l'eau. En effet à cette pression, on observerait une vaporisation de l'eau au point 2. D'après l'annexe A 2.2, pour des températures de l'ordre de 20°C, cette pression minimale est de l'ordre de 2'000 à 2'500 Pa.

Problème 3 :



Pour ce problème, on considère que le grenier est directement sous la toiture et que celle-ci n'est pas étanche à l'air. On peut, par conséquent, poser raisonnablement l'hypothèse que, négligeant les pertes de charge, la pression juste au-dessus du toit est la même que celle dans le grenier : $p_2 = p'_2$

La différence de pression entre l'intérieur de la maison et le grenier vaut donc :

$$p_1 - p_2' = \Delta p = 1/2 \cdot \rho \cdot v_2^2 \quad (1)$$

D'autre part la force maximale que peut exercer la trappe, avant que celle-ci ne se soulève, équivaut à son poids :

$$F_{max} = m \cdot g = 4{,}4 \cdot 9{,}81 = 43{,}164\text{N}$$

Comme : $F_{max} = S \cdot \Delta p_{max}$, avec : $S = 0{,}56 \cdot 0{,}77 = 0{,}4312$ m^2(surface de la trappe)

On a : $\Delta p_{max} = F_{max}/S = 43{,}164/0{,}4312 = 100$ Pa

D'où on en déduit grâce à l'équation (1) :

$$v_{2max} = \sqrt{\frac{2 \cdot \Delta p_{max}}{\rho}} = \sqrt{\frac{200}{1{,}2}} \approx 13\text{m/s} = 47\text{km/h}$$

Par conséquent, si le vent souffle à une vitesse supérieure à 47 km/h, la trappe risque fort de se soulever.

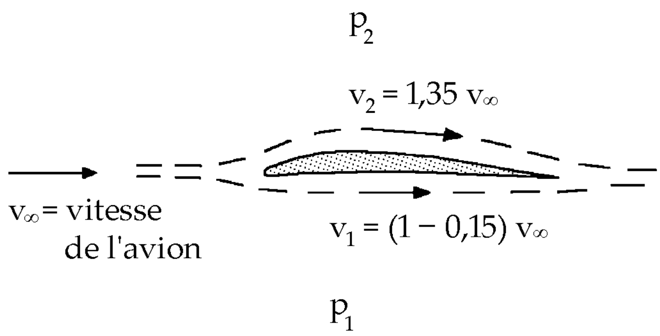
<u>Problème 4</u> (facultatif)

On a la situation suivante autour du profil des ailes :

$v_\infty = 108\text{km/h} = 30\text{m/s}$

$v_2 = 1{,}35 v_\infty = 40{,}5\text{m/s}$

$v_1 = 0{,}85 v_\infty = 25{,}5\text{m/s}$



Avec la formule donnée dans les remarques générales on obtient :

$$\Delta p = \frac{1}{2}\rho \cdot (v_2^2 - v_1^2) = \frac{1}{2} \cdot 1{,}2\ \text{kg/m}^3 \cdot \left((40{,}5\,\frac{m}{s})^2 - (25.5\,\frac{m}{s})^2\right) = 594\ \text{Pa}$$

La force dirigée vers le haut est donc égale à :

$F = S \cdot \Delta p = 30 \cdot 594 = 17'820\text{N}$

Au moment du décollage, la force F compense exactement la force de gravitation qui s'exerce sur l'avion donc : $F = m \cdot g$

On calcule alors facilement la masse de l'avion : $m = F/g = 1'816{,}5\text{kg}$.

L'épaisseur de l'aile (~20 à 30 cm) donne lieu à un terme supplémentaire :
$\rho \cdot g \cdot \Delta h = 1{,}2 \cdot g \cdot 0{,}25 \approx 3$ Pa, ce qui est négligeable par rapport à $\Delta p = 594$ Pa.