A. Questions

1. L'équation de Bernoulli s'écrit : $p + \rho \cdot g \cdot h + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v^2 = \text{cste}$

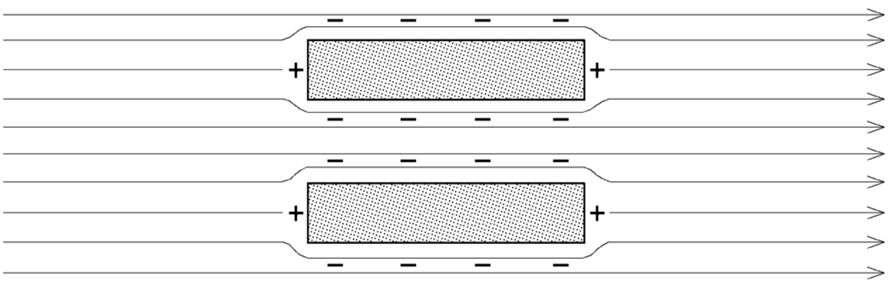
   Les unités correspondantes sont :

$$\left[\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}\right] \sim \left[\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}\right] \cdot \left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right] \cdot [\mathrm{m}] \sim \left[\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}\right] \cdot \left[\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2}\right]$$
$$\rightarrow \left[\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}\right] \sim \left[\frac{\mathrm{kg} \cdot \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}{\mathrm{m}^2}\right] \sim \left[\frac{\mathrm{kg} \cdot \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}{\mathrm{m}^2}\right]$$
$$\rightarrow \left[\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}\right] \sim \left[\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}\right] \sim \left[\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}\right]$$

   Car : force = masse · accélération → $[\mathrm{N}] = [\mathrm{kg}][\mathrm{m/s^2}]$

2. Sur la figure 3.1.3 du polycopié, on observe une surpression sur le flan du bâtiment qui est exposé au vent, ainsi qu'une dépression de l'autre côté. Cette configuration est caractéristique d'un écoulement turbulent, donc provoqué par un vent fort (voir également la figure 3.3.4 du polycopié).

3. Par vent faible, l'écoulement est laminaire (pas de tourbillons). La vitesse de l'air est augmentée entre deux immeubles, ce qui crée une dépression (effet Venturi).



   − : dépression par rapport à la pression mesurée très loin du bâtiment.
   + : surpression par rapport à la pression mesurée très loin du bâtiment.

   Ce schéma, très synthétique, se modifie fortement par vent fort car des turbulences apparaissent.

B. Problèmes

<u>Problème 1 :</u>

La différence de pression de l'eau entre le bas de l'immeuble et le 12ème étage, situé à une hauteur h = 12 · 3,4 = 40,8 m se calcule simplement avec

$$\Delta p = \rho_{\text{eau}} \cdot g \cdot h = 400'248\mathrm{Pa}$$

Au rez-de-chaussée, la pression est de 4 atm, ce qui correspond à une pression $p = 4 \cdot 1.013 \cdot 10^5 = 405'200\mathrm{Pa}$ (car 1 atm = $1{,}013 \cdot 10^5$ Pa).

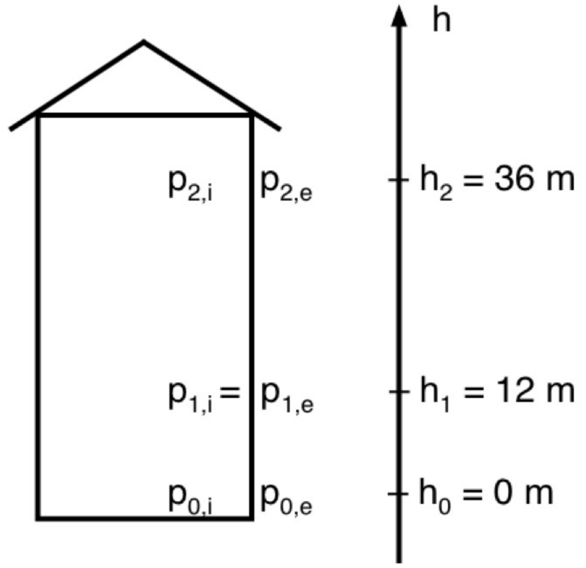
Au robinet du 12ème étage, il nous reste donc une pression de $p - \Delta p = 4952$ Pa $= 0.048$ atm. Cette pression est tout juste suffisante pour faire couler un filet d'eau. Pour que l'eau coule normalement au robinet, il faut entre 4 et 5 bars.

Pour pallier aux difficultés liées à la hauteur des bâtiments, les services industriels fournissent l'eau à une pression entre 10 et 12 bars, et ce n'est qu'à chaque étage des immeubles que l'on trouve un détendeur qui ramène la pression à 4 bars.

Problème 2 :

Pour plus de clarté et pour éviter les confusions de signes, il faut repartir de l'équation de Bernoulli et adopter une notation précise. On pose que :

- 0 indique le rez-de-chaussée
- 1 indique le quatrième étage
- 2 indique le dernier étage
- i indique l'intérieur
- e indique l'extérieur



On a les données de hauteur suivantes :

$$h_0 = 0\text{m} \,; h_1 = 12\text{m} \,; h_2 = 36\text{m}$$

On sait aussi que les pressions intérieure et extérieure en '1' sont égales :

$$p_{1,e} = p_{1,i}$$

Il faut à présent calculer les pressions à l'intérieur et à l'extérieur en '0' et en '2', en fonction des pressions en '1'.

Comme le temps est calme, on considère que nous sommes en présence d'un fluide au repos. Il est donc possible d'appliquer l'équation de Bernoulli pour le cas hydrostatique :

$$p + \rho \cdot g \cdot h + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v^2 = \text{cste avec v = 0.}$$
$$\rightarrow p + \rho \cdot g \cdot h = \text{cste}$$

Si l'on compare deux points a et b, on obtient :

$$p_a + \rho_a \cdot g \cdot h_a = p_b + \rho_b \cdot g \cdot h_b$$

Pour ce problème, les températures intérieure et extérieure sont différentes, et donc les masses volumiques de l'air ρ_i et ρ_e sont différentes à l'intérieur et à l'extérieur. Si l'on choisit deux points à l'intérieur, on peut écrire la pression en 'a' en fonction de la pression en 'b' ainsi :

$$p_{a,i} = p_{b,i} + (h_b - h_a) \cdot \rho_i \cdot g$$

De même à l'extérieur :

$$p_{a,e} = p_{b,e} + (h_b - h_a) \cdot \rho_e \cdot g$$

En utilisant ces formules, on exprime la pression du dernier étage ('2') par rapport à celle du quatrième ('1') :

- à l'intérieur : $p_{2,i} = p_{1,i} + (h_1 - h_2) \cdot \rho_i \cdot g$

- à l'extérieur : $p_{2,e} = p_{1,e} + (h_1 - h_2) \cdot \rho_e \cdot g$

La différence de pression entre l'intérieur et l'extérieur vaut donc :

$$p_{2,i} - p_{2,e} = p_{1,i} - p_{1,e} + (h_1 - h_2) \cdot (\rho_i - \rho_e) \cdot g$$

Comme à 12 m ('1') les pressions à l'intérieur et à l'extérieur sont égales ($p_{1,e} = p_{1,i}$), l'équation ci-dessus devient :

$$p_{2,i} - p_{2,e} = (h_1 - h_2) \cdot (\rho_i - \rho_e) \cdot g \quad (1)$$

On procède de même pour h = 0 :

$$p_{0,i} - p_{0,e} = (h_1 - h_0) \cdot (\rho_i - \rho_e) \cdot g \quad (2)$$

Il reste à déterminer la masse volumique de l'air aux différentes températures. Pour cela, on utilise la formule développée dans le cours à la page 2.3. Comme la différence de pression entre 0 m et 36 m est très faible, on peut considérer que la masse volumique ne varie pas entre le haut et le bas de l'immeuble (la variation de ρ qui provient de la différence de température est beaucoup plus importante).

Si on suppose que nous sommes aux conditions standards (i.e. $p = p_0$), on peut écrire (cf. annexe A 2.1) :

$$\rho(\theta, p) = \rho(0°\mathrm{C}, p_0) \cdot \frac{p}{p_0} \cdot \frac{273}{273 + \theta} = 1.2929 \cdot \frac{p}{p_0} \cdot \frac{273}{273 + \theta}$$

$$\rho_i(24°\mathrm{C}, p_0) = 1.2929 \cdot \frac{273}{273 + 24} = 1{,}1885\,\mathrm{kg/m}^3$$

$$\rho_e(32°\mathrm{C}, p_0) = 1.2929 \cdot \frac{273}{273 + 32} = 1{,}1573\,\mathrm{kg/m}^3$$

On introduit numériquement les masses volumiques ρ_i et ρ_e et les hauteurs dans les équations (1) et (2), et on trouve les différences entre les pressions intérieures et extérieures suivantes :

$$p_{2,i} - p_{2,e} = (12 - 36) \cdot (1{,}1885 - 1.1573) \cdot 9.81 = -7{,}346\mathrm{Pa}$$

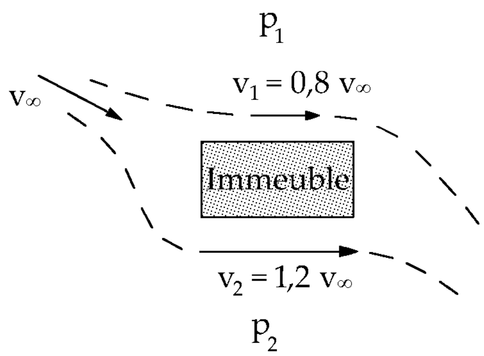
La poussée se fait de l'extérieur vers l'intérieur : $p_{2,i} < p_{2,e}$.

$$p_{0,i} - p_{0,e} = (12 - 0) \cdot (1{,}1885 - 1.1573) \cdot 9.81 = +3.673\mathrm{Pa}$$

La poussée se fait de l'intérieur vers l'extérieur : $p_{0,i} > p_{0,e}$.

Problème 3 :

Vu du haut, on a la situation suivante :



$v_\infty = 72\text{km/h} = 20\text{m/s}$

$v_1 = 0,8 v_\infty = 16\text{m/s}$

$v_2 = 1,2 v_\infty = 24\text{m/s}$

Les trajectoires en lignes discontinues représentent le trajet d'une feuille morte passant devant les façades.

En utilisant l'équation de Bernoulli (avec $h_1 = h_2$), on obtient la dépression due au vent entre les deux façades du bâtiment :

$$\Delta p = p_1 - p_2 = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot (v_2^2 - v_1^2) = \frac{1}{2} \cdot 1,2\ \text{kg/m}^3 \cdot (24^2 - 16^2)\ \frac{m^2}{s^2} = 192\ \text{Pa}$$

Dans des conditions atmosphériques standards a 20°C, on a $\rho = 1,2\ \text{kg/m}^3$ (cf. Annexe 4.1)