Corrigé des exercices - Série 6

Exercice 1 - *niveau 1*

Un condensateur ($C = 1\mu$F) est chargé à une tension $V_0 = 10^3$V. Il est connecté en série avec un fil de $1\,\text{cm}^2$ de section, 1 m de longueur, et résistivité qui a l'expression suivante en fonction de la température :

$$\rho = 10^2[1 + \alpha(T - T_0)]\,\Omega\text{m} \quad \text{avec} \quad \alpha = 10^{-2}\text{K}^{-1} \quad \text{et} \quad T_0 = 20^\circ\,\text{C} \tag{1}$$

a) Quelle est la résistance du fil à T=120°C ?
b) Après combien de temps la capacité aura une tension de 100V à T=120°C ?

Corrigé

a) La résistance du fil à T=120°C est donnée par :

$$R_{120^\circ\text{C}} = \frac{\rho_{120^\circ\text{C}}L}{A} = \frac{10^2[1 + 10^{-2}\text{K}^{-1}(120\,\text{K} - 20\,\text{K})]\Omega\text{m} \times 1\text{ m}}{10^{-4}\,\text{m}^2} \simeq 2 \cdot 10^6\Omega \tag{2}$$

b) La loi de décharge d'un condensateur sur un circuit RC peut être obtenu en posant la loi des mailles, sans la force électromotrice :

$$-\frac{q}{C} - iR = -\frac{q}{C} - \frac{dq}{dt}R = 0 \qquad \Rightarrow \qquad q(t) = V_0 C \exp\left[-t/(RC)\right] \tag{3}$$

ou nous avons résolu l'équation différentielle en $q(t)$ par séparation des variables. L'évolution du courant du circuit $i(t)$, ainsi que du potentiel du condensateur $V_C(t)$ pendant la décharge peuvent être obtenus (comme fait pour la charge du condensateur) avec :

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} = -\frac{V_0}{R}\exp\left[-t/(RC)\right] \qquad V_C(t) = \frac{q(t)}{C} = V_0 \exp\left[-t/(RC)\right] \tag{4}$$

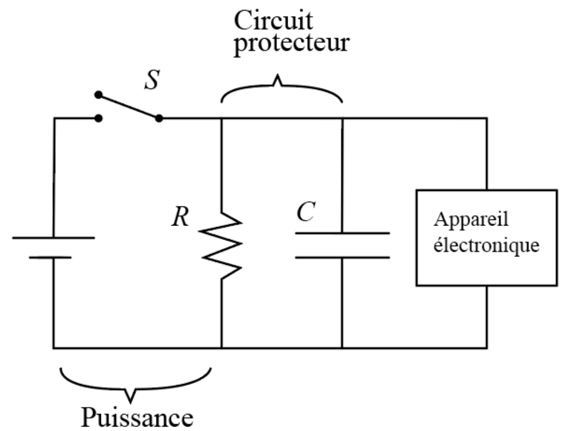
Le temps pour atteindre 100 v est donc donné par :

$$t = RC\ln\left(\frac{V_0}{V}\right) = 2 \cdot 10^6\Omega \times 1 \cdot 10^{-6}\,\text{F} \times \ln\left(\frac{10^3}{10^2}\right) \simeq 4.6\,\text{s} \tag{5}$$

Ceci est traité à pag. 86 des notes Fasoli.

Exercice 2 [1] - *niveau 2*

Les appareils électroniques (par exemple les ordinateurs) utilisent souvent un circuit RC pour se protéger contre les pannes de courant, comme le montre la figure. Si la source d'alimentation cesse de fonctionner (ce qui peut être représenté en ouvrant l'interrupteur S), le condensateur fournira la tension dans le circuit, jusqu'à ce qu'il se décharge. Si le circuit de protection est censé maintenir la tension d'alimentation à au moins 75% de la pleine tension pendant 0.20 s, quelle est la résistance R nécessaire ? La capacité du condensateur est de 8.5 μF. Supposons que l'« électronique » attachée consomme un courant négligeable.



Corrigé

En fonctionnement normal, le condensateur est complètement chargé par l'alimentation, donc la tension du condensateur est la même que la tension d'alimentation, et il n'y a pas de courant circulant dans le circuit (mis à part le courant consommé par l'appareil électronique, que l'on considère ici négligeable). L'interrupteur S sur le schéma est en position fermée.

Considérons cas de panne de courant : l'interrupteur S s'ouvre. Le condensateur de décharge dans la résistance R. L'évolution du potentiel d'un condensateur pendant la décharge a été dérivé pour l'exercice 1 :

$$V = V_0 e^{-t/RC} \tag{6}$$

Nous pouvons aussi l'obtenir avec directement l'équation différentielle pour la tension du condensateur, à partir de l'équation du courant du circuit. Le courant qui circule à travers la résistance est obtenue grâce à la charge qui sort du condensateur (qui est en train de perdre des charges, avec une réduction de son déséquilibre des charges) :

$$I = \frac{V_R}{R} = -\frac{dq_C}{dt} = -C\frac{dV_C}{dt} \qquad \text{avec} \qquad q_C = CV_C \tag{7}$$

Comme $V_R = V_C$ (que l'on peut simplement noter V) on a :

$$\frac{dV}{dt} + \frac{1}{RC}V = 0 \quad \Rightarrow \quad V = V_0 e^{-t/RC} \tag{8}$$

Nous voulons que la tension aux bornes du condensateur soit de 75% de la pleine tension après $t_1 = 0.20$ s. Cela se traduit par :

$$V_0 e^{-t_1/RC} \geq 0.75 V_0 \quad \Leftrightarrow \quad R \geq \frac{-t_1}{C\ln(0.75)} = 81790\,\Omega \tag{9}$$

Exercice 3 [1] - *niveau 2*

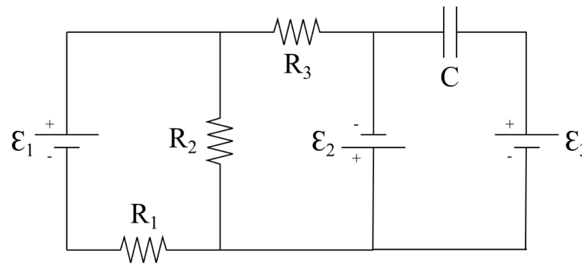
1. crédit : Dr. J. Loizu, Prof. A. Fasoli

On considère le circuit de la figure suivante, avec les résistances $R_1 = 5\ \Omega$, $R_2 = 3\ \Omega$, $R_3 = 5\ \Omega$, un condensateur $C = 10$ pF et les f.e.m $\varepsilon_1 = 4$ V, $\varepsilon_2 = 8$ V et $\varepsilon_3 = 3$ V.

a) Que vaut le courant au travers du condensateur lorsque l'état d'équilibre est atteint ?

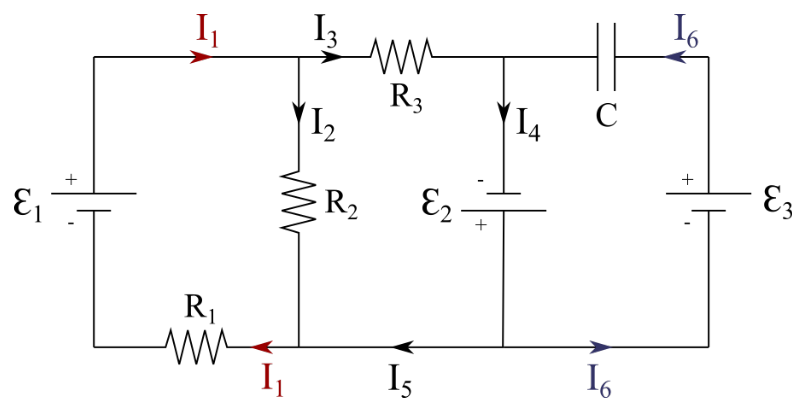
b) Déterminer tous les courants circulant dans le circuit ainsi que la charge du condensateur, à l'état d'équilibre.

c) Que se passerait-il si la tension aux bornes du condensateur dépassait la tension de claquage du diélectrique entre les plaques du condensateur ?



Corrigé

Notons les tensions et courants dans le circuit comme sur la figure ci-contre.



a) Lorsque l'état d'équilibre est atteint, la tension aux bornes du condensateur V_C est constante. Donc le courant à travers le condensateur est nul : $I_6 = dV_C/dt = 0$.

b) L'hypothèse principale est d'analyser le circuit à l'équilibre, c'est-à-dire avec le condensateur complètement chargé, qui ne laisse pas passer le courant et donc qui peut être donc être considéré comme un interrupteur ouvert ($I_6 = 0$). On en déduit premièrement que $I_5 = I_4 = I_3$. Il nous reste à trouver I_1, I_2 et I_3.

En appliquant la loi des noeuds sur l'un des noeuds de gauche, et la loi des mailles sur les boucles intérieures de gauche et du centre du circuit (dans le sens horaire), on obtient le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} I_1 = I_2 + I_3 \\ \varepsilon_1 - R_1 I_1 - R_2 I_2 = 0 \\ \varepsilon_2 + R_2 I_2 - R_3 I_3 = 0 \end{cases} \tag{10}$$

Pour résoudre ce système on peut (par exemple) exprimer I_1 et I_3 en fonction de I_2 avec les deux dernières équations :

$$I_1 = \frac{\varepsilon_1 - R_2 I_2}{R_1} \qquad I_3 = \frac{\varepsilon_2 + R_2 I_2}{R_3} \tag{11}$$

puis injecter ces expressions dans la première équation afin d'obtenir une équation pour I_2 :

$$\frac{\varepsilon_1 - R_2 I_2}{R_1} = I_2 + \frac{\varepsilon_2 + R_2 I_2}{R_3} \tag{12}$$

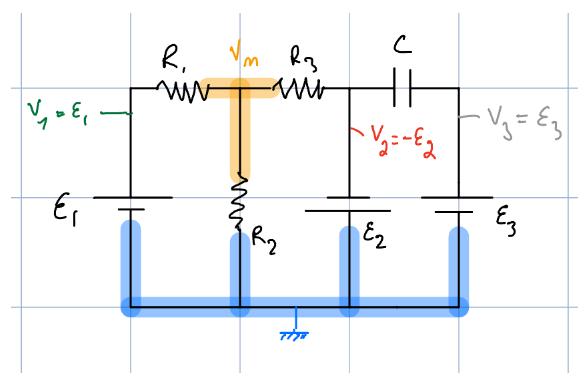
$$I_2 \underbrace{(R_1R_3 + R_1R_2 + R_2R_3)}_{=25+15+15=55} = \underbrace{R_3\varepsilon_1 - R_1\varepsilon_2}_{=20-40=-20} \tag{13}$$

On trouve donc : $I_2 \simeq -0.364$ A. Et en réutilisant les expressions de (11) on déduit : $I_1 \simeq 1.018$ A et $I_3 \simeq 1.382$ A.

Enfin, la charge du condensateur est $Q = CV_C = C(\varepsilon_2 + \varepsilon_3) = 10 \times 10^{-12} \times (8+3) = 110 \times 10^{-12}$ C $= 110$ pC.

Méthode de résolution alternative - Loi des noeuds et loi d'Ohm

Comme pour les exercices 3 et 5 de la série précédente, on propose ici une méthode de résolution alternative basée uniquement sur la loi des noeuds.
On voit sur la figure ci-joint l'identification des différents potentiels utiles à la résolution de l'exercice. On utilise la même convention pour les courants que celle de l'autre méthode. On a donc :



$$I_1 = I_2 + I_3 \tag{14}$$

$$\frac{\varepsilon_1 - V_n}{R_1} = \frac{V_n}{R_2} + \frac{V_n + \varepsilon_2}{R_3} \tag{15}$$

La seule inconnue est V_n, que l'on isole pour trouver :

$$V_n = R_2 \frac{\varepsilon_1 R_3 - \varepsilon_2 R_1}{R_1R_2 + R_2R_3 + R_1R_3} = -1.09\ V \tag{16}$$

On remplace ensuite dans les différents I_i pour trouver :

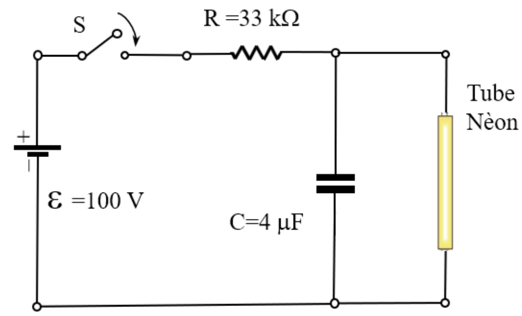
$$I_1 = 1.018\ A \qquad I_2 = -0.3633\ A \qquad I_3 = 1.382\ A \tag{17}$$

c) Au-dessus d'une certaine amplitude de champ électrique le diélectrique dans un condensateur devient conducteur. La tension à laquelle cela se produit est appelée tension de claquage de l'appareil. L'énergie maximale qui peut être stockée en toute sécurité dans un condensateur est limitée par la tension de claquage. Dépasser la tension de claquage donne lieu à une dissipation de l'énergie accumulée sur une échelle de temps très rapide et dans le cas de ce circuit, on se retrouve avec deux batteries court-circuitées, ce qui est dangereux.

Exercice 4[1] - *niveau 3*

On considère le circuit suivant, dans lequel le tube à néon agit comme une résistance variable $r = r(V)$ où V est la tension aux bornes du tube. Lorsque le gaz dans le tube est neutre, il ne conduit pas le courant et se comporte comme un interrupteur ouvert. Mais si la tension est suffisante (ici $V_{claquage} = 90$ V) le gaz s'ionise : les électrons de détachent des ions, et le gas devient un mélange de particules chargées positives et négatives, appelé plasma, donc conducteur, que l'on considère ici comme conducteur parfait. Ensuite, tant que la tension est suffisante le gaz reste ionisé ; si la tension passe en dessous d'une tension seuil (ici $V_{recomb} = 70$ V) le gaz redevient neutre et donc à nouveau isolant.

Pour résumer :
- si le gaz n'est pas ionisé et $V < 90$ V, alors $r = \infty$.
- si le gaz n'est pas ionisé et V dépasse 90 V, alors il s'ionise et $r \simeq 0$.
- si le gaz est ionisé et tant que $V > 70$ V, alors $r \simeq 0$.
- si le gaz est ionisé et V descend à moins que 70 V, alors il se recombine en gaz neutre et $r = \infty$.



a) On ferme l'interrupteur S à $t = 0$. Déterminer le temps t_1 à partir duquel le tube commence à conduire le courant.

b) À quel temps le tube arrête-t-il d'être conducteur ?

c) À quel temps t_2 le tube devient-il à nouveau conducteur ?

d) Que se passe-t-il pour $t \geq t_2$? Dessinez l'évolution temporelle de $V(t)$.

Corrigé

a) Pour que le tube néon commence à conduire, nous devons atteindre une tension de 90 V. Avant que cette tension ne soit atteinte (à un temps t_1), le tube agit comme un circuit ouvert. Le courant circule uniquement dans la maille de gauche. Nous avons vu au cours (aussi à la pag. 84 des notes Fasoli) l'équation pour l'évolution de la tension d'un condensateur $V(t)$ qui se charge, à partir de l'équation du courant, qui est la meme à travers la résistance et le condensateur :

$$V(t) = \mathcal{E}(1 - e^{-\frac{t}{RC}}) \tag{18}$$

Comme pour l'exercice 2, celle ci peut être aussi dérivée à partir :

$$I = \frac{V_R}{R} = \frac{dq}{dt} \underbrace{=}_{q=CV} C\frac{dV}{dt} \tag{19}$$

De plus avec la loi des mailles on voit que $\mathcal{E} - V_R - V = 0$, donc $V_R = \mathcal{E} - V$ et on obtient :

$$\frac{dV}{dt} + \frac{V}{RC} = \frac{\mathcal{E}}{RC} \tag{20}$$

Pour résoudre cette équation on peut artificiellement ajouter $-\frac{d\mathcal{E}}{dt}$ (qui vaut zéro) à gauche, ce qui permet de la réécrire simplement :

$$\frac{d(V - \mathcal{E})}{dt} = -\frac{1}{RC}(V - \mathcal{E}) \tag{21}$$

On intègre en 0 et t, ce qui donne :

$$V - \mathcal{E} = Ke^{-\frac{t}{RC}} \quad \Rightarrow \quad V(t) = \mathcal{E} + Ke^{-\frac{t}{RC}} \tag{22}$$

avec K une constante à déterminer. Avec la condition initiale $V(0) = 0$ (initalement le condensateur est déchargé), on trouve $K = -\mathcal{E}$, ce qui donne finalement, pour $t < t_1$:

$$\boxed{V(t) = \mathcal{E}(1 - e^{-\frac{t}{RC}})} \tag{23}$$

Cherchons le temps t_1 tel que $V(t_1) = 90$ V, sachant que $\mathcal{E} = 100$ V :

$$100(1 - e^{-\frac{t_1}{RC}}) = 90 \tag{24}$$

$$1 - \frac{90}{100} = e^{-\frac{t_1}{RC}} \tag{25}$$

$$t_1 = -RC\ln(1 - \frac{90}{100}) = RC\ln(10) \tag{26}$$

On a donc $t_1 = 33 \times 10^3 \times 4 \times 10^{-6} \times \ln(10)$ ce qui donne $\boxed{t_1 \simeq 0.303 \text{ s}}$.

b) A l'instant t_1 le tube devient équivalent à un fil parfaitement conducteur et donc le condensateur se décharge instantanément jusqu'à une tension de $V_C = 70$ V, quand le gaz redevient neutre et $r = \infty$. Ceci se passe donc aussi à $t_1 = 0.303$ s.

c) Maintenant, pour $t > t_1$, le condensateur se recharge mais depuis $V(t_1) = V_1 = 70$ V. Il faut donc bien prendre en compte la nouvelle condition initiale. Nous pouvons faire de nouveau de deux manières :

(1) Si on réfléchit à partir de l'équation différentielle de la charge comme vu au cours, nous notons que la condition initiale rentre comme l'extrême inférieure de l'intégrale à résoudre (eq. 5.33 pag. 85 des notes Fasoli) :

$$\int_{q_1}^{q(t)} \frac{dq'}{q' - \mathcal{E}C} = -\int_{t_1}^{t} \frac{dt'}{RC} \quad \Rightarrow \quad \ln\left(\frac{q(t) - \mathcal{E}C}{q_1 - \mathcal{E}C}\right) = -\frac{(t - t_1)}{RC} \tag{27}$$

L'expression de l'évolution de la charge est :

$$q(t) = \mathcal{E}C + (q_1 - \mathcal{E}C)e^{-\frac{t-t_1}{RC}} \quad \Rightarrow \quad V(t) = \frac{q(t)}{C} = \mathcal{E} + (V_1 - \mathcal{E})e^{-\frac{t-t_1}{RC}} \tag{28}$$

(2) La situation est la même qu'en question (a), mais avec une condition initiale différente, et pour une variable de temps $t' = t - t_1$. Notons de plus que cela est vrai tant que le gaz ne s'ionise pas de nouveau, à un temps t_2. On peut donc reprendre la forme générale de $V(t)$ donnée dans l'équation (22), qui est valable pour $t_1 < t < t_2$:

$$V(t) = \mathcal{E} + K'e^{-\frac{t'}{RC}} = \mathcal{E} + K'e^{-\frac{t-t_1}{RC}} \tag{29}$$

et on cherche la constante K' telle que

$$V(t_1) = V_1 = \mathcal{E} + K' \quad \Rightarrow \quad K' = V_1 - \mathcal{E} \tag{30}$$

On en déduit que pour $t_1 < t < t_2$:

$$\boxed{V(t) = \mathcal{E} + (V_1 - \mathcal{E})e^{-\frac{t-t_1}{RC}}} \tag{31}$$

Cherchons le temps t_2 tel que $V(t_2) = 90$ V, et avec $\mathcal{E} = 100$ V :

$$100 + (70 - 100)e^{-\frac{t_2-t_1}{RC}} = 90 \tag{32}$$

$$e^{-\frac{t_2-t_1}{RC}} = \frac{1}{3} \tag{33}$$

$$t_2 = t_1 + RC\ln(3) \tag{34}$$

L'intervalle de temps avant le nouveau claquage est de $RC\ln(3) \approx 145$ ms, et le temps total correspondant est donc $\boxed{t_2 \simeq 0.448 \text{ s}}$.

d) Le comportement du circuit décrit en question (b) et (c) se répète ensuite à l'infini. On en peut alors tracer l'évolution temporelle de $V(t)$ comme sur la figue ci-contre.