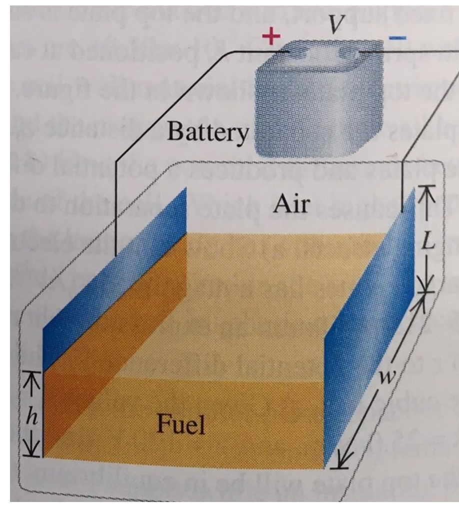
Corrigé des exercices - Série 5

Exercice 1- *niveau 1*

Une jauge de carburant utilise un condensateur pour déterminer la hauteur de carburant dans un réservoir. La constante diélectrique effective K_{eff} varie entre 1 pour un réservoir vide et K pour un réservoir plein, avec K la constante diélectrique du carburant. Un circuit électrique approprié est capable de déterminer la constante diélectrique effective entre les armatures du condensateur. Chaque armature rectangulaire a une longueur w et une largeur L. La hauteur du carburant entre les deux armatures est h.



a) Dérivez une expression pour K_{eff} en fonction de h.

b) Quel est la constante diélectrique effective K_{eff} pour un réservoir rempli de carburant à un-quart, à moitié, à trois-quarts, si le carburant est de l'essence ($K = 1.95$) ?

c) Répétez la partie b) pour du méthanol ($K = 33.0$).

d) Pour quel carburant cette jauge est-elle plus pratique ?

Corrigé

a) Pour un condensateur plan rempli d'un matériau isolant, la capacité est donné par

$$C = \epsilon_0 K A/d \tag{1}$$

avec K la constante diélectrique du matériau. Pour trouver la capacité totale du système, on la décompose en deux parties : un condensateur de hauteur h rempli de carburant, et un autre condensateur de hauteur $L-h$ rempli d'air. Les deux ont une largeur w et une distance entre armatures d. Comme ces deux condensateurs sont connectés en parallèle, la capacité totale du système est $C_{tot} = C_{carb} + C_{air}$. En utilisant l'équation 1, on trouve

$$C_{tot} = \epsilon_0 K_{air}(L-h)w/d + \epsilon_0 K_{carb} hw/d \tag{2}$$

En rassemblant les termes et utilisant l'approximation $K_{air} \approx 1$, on trouve

$$C_{tot} = (\epsilon_0 w/d)[L + h(K_{carb} - 1)] \tag{3}$$

Pour décrire le système entier avec une constante diélectrique effective K_{eff}, on voudrait écrire la capacité totale comme

$$C_{tot} = \epsilon_0 K_{eff} A_{tot}/d \tag{4}$$

avec $A_{tot} = wL$ la surface totale d'une armature. En combinant les équations 3 et 4, on peut exprimer K_{eff} en fonction de h :

1. crédit : Dr. J. Loizu, Prof. A. Fasoli

$$K_{eff} = 1 + \frac{h}{L}(K_{carb} - 1) \tag{5}$$

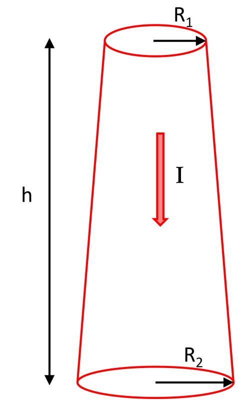
b-c) On a $K_{carb} = 1.95$ pour l'essence et $K_{carb} = 33.0$ pour le méthanol. Lorsque le réservoir est rempli par exemple à un-quart, on a $h = L/4$. En remplaçant ces valeurs dans l'équation 5, on obtient les constantes diélectriques effectives suivants :

h	$K_{eff}^{essence}$	$K_{eff}^{methanol}$
$L/4$	1.24	9
$L/2$	1.48	17
$3L/4$	1.71	25

d) Les résultats montrent que la variation relative de la capacité effective est beaucoup plus grande dans le cas du méthanol. La jauge sera donc plus pratique à utiliser pour ce type de carburant.

Exercice 2- *niveau 2*

Des mesures de résistance peuvent être utilisées pour charactériser les organes grace à la différence de resistivité de chaque tissu corporel, par exemple dans la tomographie par impédance électrique (TIE). Dans cet exercice, nous allons calculer la resistance d'un vaisseau sanguin qui se dilate. Nous pouvons considérer celui-ci comme un cylindre de rayon variable, comme dans la figure.
Le rayon du vaisseau augmente de manière linéaire de $R_1 = 3$ mm à $R_2 = 3.3$mm, sur une longueur de $h = 1.5$ cm. Pour une résistivité du sang de $\rho_{sang} = 150\ \Omega$cm, calculez la résistance de cette partie du vaisseau sanguin. On néglige la resistivié de la membrane du vaisseau.



Corrigé

On peut considérer la forme du vaisseau comme une superposition de cylindres de rayons différents. Alors la résistance totale peut être considéré comme des résistances de cylindres de rayons différentes connectés en série. Alors on peut écrire la résistance totale comme un intégrale selon x,

$$dR = \rho_{sang} \frac{dx}{S(x)}. \tag{6}$$

La surface est $S(x) = \pi r(x)^2$, où le rayon augmente en x comme,

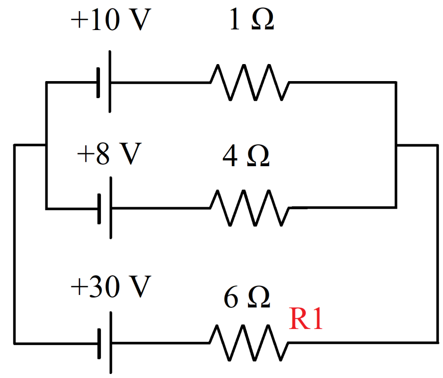
$$r(x) = R_1 + \left(\frac{R_2 - R_1}{h}\right) x. \tag{7}$$

Alors, la résistance totale est,

$$\begin{aligned} R &= \frac{\rho}{\pi} \int_0^h \left(R_1 + \left(\frac{R_2 - R_1}{h}\right) x\right)^{-2} dx = -\frac{\rho}{\pi} \left(\frac{h}{R_2 - R_1}\right) \left[\left(R_1 + \left(\frac{R_2 - R_1}{h}\right) x\right)^{-1}\right]_0^h \\ &= -\frac{\rho h}{\pi(R_2 - R_1)} \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right) = 723\ \Omega \end{aligned} \tag{8}$$

Exercice 3- *niveau 1*

Prenons le circuit dans la figure, où on peut négliger la résistance interne de chaque pile. Dans quelle direction pensez-vous que le courant traverse la résistance R_1 ? Calculez le courant à travers chaque batterie.



Corrigé

Premièrement, on utilise la conservation du courant pour écrire :

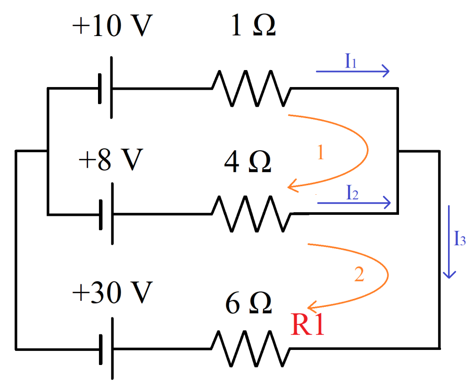
$$I_1 + I_2 = I_3 \tag{9}$$

On peut maintenant appliquer la loi de Kirchhoff sur chaque boucle du circuit, $\Sigma_i V = 0$, où i représente chaque composante de la boucle. Pour la première boucle, on a :

$$10\,\mathrm{V} - 1\,\Omega\ I_1 + 4\,\Omega\ I_2 - 8 = 2\,\mathrm{V} - I_1\,\Omega + 4\,\Omega\ I_2 = 0, \tag{10}$$

et pour la deuxième boucle :

$$8\,\mathrm{V} - 4\,\Omega\ I_2 - 6\,\Omega\ I_3 - 30\,\mathrm{V} = -4\,\Omega\ I_2 - 6\,\Omega\ I_3 - 22\,\mathrm{V} = 0. \tag{11}$$



En utilisant l'equation (1), on a pour la deuxième boucle :

$$4\,\Omega\ I_2 + 6\,\Omega\ I_1 + 6\,\Omega\ I_2 + 22\ \mathrm{V} = 6\,\Omega\ I_1 + 10\,\Omega\ I_2 + 22\ \mathrm{V} = 0$$

Puis, si on soustrait l'équation (2) de cette expression :

$$34\,\Omega\ I_2 + 34\ \mathrm{V} = 0 \Rightarrow I_2 = -1\ \mathrm{A} \tag{12}$$

Des équations (1) et (2), on obtient finalement :

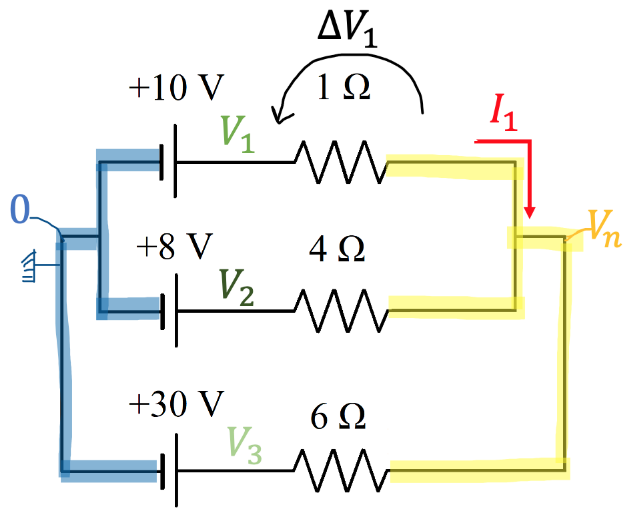
$$I_1 = -2\ \mathrm{A}\ \text{et}\ I_3 = -3\ \mathrm{A}. \tag{13}$$

Les valeurs négatives des courants nous indiquent qu'en fin de compte, notre idée initiale de la façon dont les courants circulent était fausse et que la source de 30V domine les deux autres.

Méthode de résolution alternative - Loi des noeuds et loi d'Ohm

Une autre méthode de résolution pour cet exercice est de n'utiliser que la loi des noeuds, combinée à la loi d'Ohm. Pour cela, on écrit la loi des noeuds comme à l'équation 9. Ensuite, on explicite chacun des courants avec la loi d'Ohm : $I_i = \frac{\Delta V_i}{R_i}$ avec i = 1,2,3 en fonction du courant étudié.

On connait déjà les résistances, l'enjeu est donc de trouver les valeurs ΔV_i. Pour cela, il faut définir le potentiel au niveau du noeud, qu'on appelle V_n, et qui est inconnu. Ensuite, nous allons définir une masse (ou terre, ou GND), que l'on positionne au niveau du noeud à gauche de la figure. On se retrouve donc dans une situation comme celle présentée à la figure ci-contre.



On a donc :

$$I_1 = \frac{\Delta V_1}{R_1} = \frac{10 - V_n}{1} \tag{14}$$

De manière similaire, on trouve I_2 et I_3 et donc l'équation devient :

$$\frac{10 - V_n}{1} + \frac{8 - V_n}{4} = \frac{V_n - 30}{6} \tag{15}$$

On a donc une seule inconnue, et on résout pour trouver :

$$V_n = \frac{204}{17} = 12.18\ V \tag{16}$$

De là, on substitue dans les équations pour I_i et on retrouve bien :

$$I_1 = -1\ A \qquad I_2 = -2\ A \qquad \text{et} \qquad I_3 = -3\ A \tag{17}$$

On voit que les deux méthodes donnent (heureusement) le même résultat. Elles possèdent toutes les deux des avantages et inconvénients, à voir celle que vous préférez...

Exercice 4- *niveau 2*

Supposons que le vélo électrique nécessite une tension de 10 V pour fonctionner et peut être représenté par une résistance de 10 Ω. Vous disposez de plusieures batteries d'une tension de $\epsilon = 3$ V et d'une résistance interne de $R = 1\ \Omega$.

a) De combien de batteries auriez-vous besoin pour alimenter le vélo en les connectant en série ?

b) Si à la place vous avez des « blocs » de deux batteries, connectées en parallèle, de combien de « blocs » auriez-vous besoin ?

Corrigé

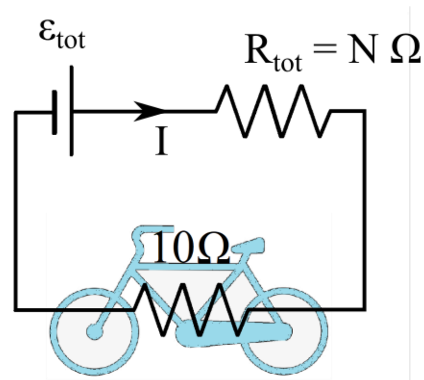
a) On peut simplifier le circuit dans la figure en remplaçant des groupes de fems et résistances avec une seule f.é.m. et une seule résistance. La f.é.m. totale fournie par N batteries en série est la somme des f.é.m. :

$$\epsilon_{tot} = N\epsilon = 3\text{ V } N \tag{18}$$

Et la résistance totale est la somme des résistances internes des N batteries :

$$R_{tot} = N \cdot 1\,\Omega = N\,\Omega \tag{19}$$

Un schéma équivalent est donné sur la figure. En appliquant la loi des mailles dans le sens horaires, on peut écrire :



$$\varepsilon = N\,\Omega\; I + 10\,\Omega\; I \tag{20}$$

$$3\text{ V } N = (10 + N) I\,\Omega \tag{21}$$

Comme par ailleurs la loi d'Ohm aux bornes du vélo nous donne $I = \frac{V_V}{10\,\Omega}$, en notant V_V est la tension aux bornes du vélo, on obtient :

$$\boxed{V_V = \frac{30N}{10+N}\text{ V}} \tag{22}$$

Comme nous avons besoin de 10 V :

$$V_V \geq 10\,\text{V} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{30N}{10+N} \geq 10 \quad \Leftrightarrow \quad N \geq 5 \tag{23}$$

Nous aurons besoin de 5 piles pour notre vélo. De plus, nous voyons que peu importe le nombre de batteries que nous utilisons, on remarque que $V_V \leq 30$ V et que :

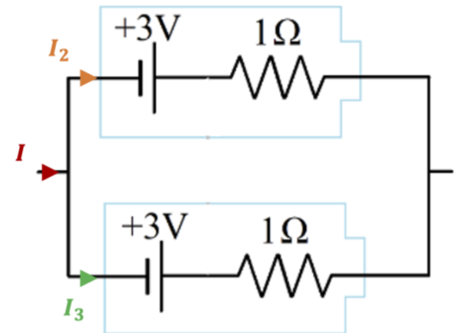
$$\lim_{N\to+\infty} V_V = \lim_{N\to+\infty} \frac{30N}{N}\text{ V} = 30\text{ V} \tag{24}$$

En utilisant ces batteries en série nous ne pourrons jamais fournir une tension supérieure à 30 V.

b) Calculons la tension aux bornes de chaque bloc composé deux de batteries en parallèle.

En appliquant les lois de Kirchhoff, la loi des mailles et la loi des noeuds nous donnent respectivement :

$$3\,\mathrm{V} - 1\,\Omega\ I_2 + 1\,\Omega\ I_3 - 3\,\mathrm{V} = 0 \tag{25}$$
$$I = I_2 + I_3$$



On voit que la solution à ce système est :

$$I_2 = I_3 = \frac{I}{2} \tag{26}$$

La tension au borne du bloc est donc :

$$V = 3\,\mathrm{V} - I_2\,\Omega\ = 3\,\mathrm{V} - I_3\,\Omega\ = 3\,\mathrm{V} - \frac{I}{2}\,\Omega \tag{27}$$

Cette combinaison de deux batteries en parallèle est équivalente à un bloc composé d'une source de tension de 3V et d'une résistance de 0.5 Ohm. En connectant les batteries en parallèle, nous avons donc réduit de moitié la résistance interne de la batterie résultante. Avec cette différence de résistance pour l'équation (20) on obtient :

$$\varepsilon = 0.5\,\Omega\ NI + 10\,\Omega\ I \tag{28}$$

$$3N\ \mathrm{V} = (10 + 0.5N)\frac{V_V}{10} \tag{29}$$

$$\boxed{V_V = \frac{60N}{20+N}\ \mathrm{V}} \tag{30}$$

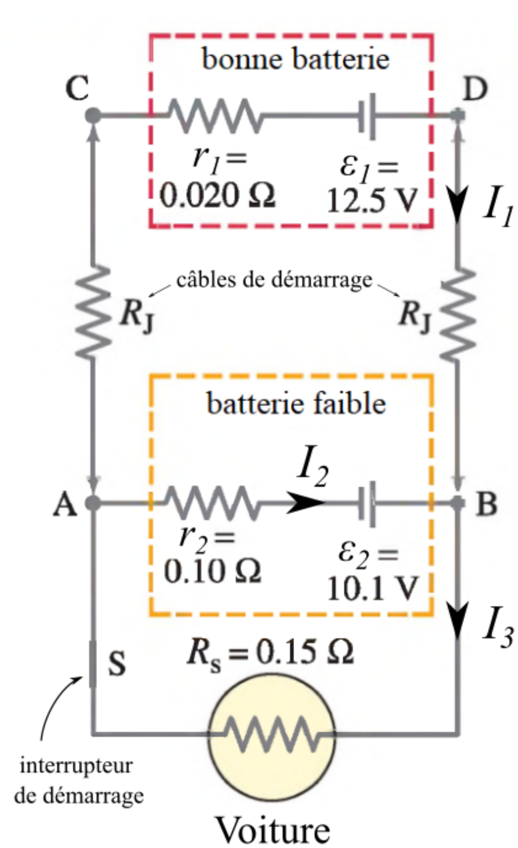
Dans ce cas, seuls 4 "blocs" de batterie sont nécessaires pour atteindre une tension de 10 V. Les équations (22) et (30) montrent comment une résistance interne plus petite a un effet significatif sur la qualité de la batterie.

Exercice 5- *niveau 2*

Une bonne batterie de voiture est utilisée pour démarrer une voiture avec une batterie faible. La bonne batterie a une f.é.m. de 12.5 V et une résistance interne de 0.020 Ω. Supposons que la batterie faible ait une force électromotrice de 10.1 V et résistance interne 0.10 Ω. Chaque câble de démarrage en cuivre a une résistance de 0.0025 Ω et peut être connecté comme indiqué sur la figure. Supposons que le reste de la voiture puisse être représenté par une résistance $R_s = 0.15\ \Omega$.

a) Déterminez le courant I_3 traversant le démarreur si seule la batterie faible y est connectée.

b) Déterminez le courant à travers le démarreur si la puissante batterie est également connectée.



Corrigé

a) Le circuit avec seulement la batterie faible et sans les câbles de démarrage est simple : une force électromotrice de 10,1 V connectée à deux résistances en série $r_2 = 0,10\ \Omega$ et $R_s = 0,15\ \Omega$, donc à une résistance équivalente totale de $0,15\ \Omega$. Le courant est donc :

$$I_3 = \frac{\varepsilon_2}{r_2 + R_s} = \frac{10,1}{0,25} = 40 \text{ A} \tag{31}$$

b) Nous pouvons appliquer la loi des mailles sur la boucle intérieure du bas avec la batteries faible et la voiture, ainsi que sur la boucle extérieure avec la bonne batterie, les câbles de démarrage et la voiture, ce qui donne respectivement :

$$\varepsilon_2 - r_2 I_2 = I_3 R_s \tag{32}$$
$$\varepsilon_1 - r_1 I_1 = 2R_J I_1 + I_3 R_s \tag{33}$$

Par ailleurs, avec la loi des noeuds appliquée par exemple au point B :

$$I_1 + I_2 = I_3 \tag{34}$$

On a donc trois équations, avec trois inconnues que sont les courants I_1, I_2 et I_3. Avec les équations (32) et (33) on a :

$$I_1 = \frac{\varepsilon_1}{r_1 + 2R_J} - \frac{R_s}{r_1 + 2R_J} I_3 \tag{35}$$
$$I_2 = \frac{\varepsilon_2}{r_2} - \frac{R_s}{r_2} I_3 \tag{36}$$

On en déduit avec l'équation (34) une équation pour I_3 :

$$I_3 = \frac{\varepsilon_1}{r_1 + 2R_J} - \frac{R_s}{r_1 + 2R_J} I_3 + \frac{\varepsilon_2}{r_2} - \frac{R_s}{r_2} I_3 \tag{37}$$

$$I_3 \left(1 + \frac{R_s}{r_1 + 2R_J} + \frac{R_s}{r_2}\right) = \frac{\varepsilon_1}{r_1 + 2R_J} + \frac{\varepsilon_2}{r_2} \tag{38}$$

$$I_3 = \left(\frac{\varepsilon_1}{r_1 + 2R_J} + \frac{\varepsilon_2}{r_2}\right) / \left(1 + \frac{R_s}{r_1 + 2R_J} + \frac{R_s}{r_2}\right) \tag{39}$$

L'application numérique donne $I_3 \approx 71$A, donc un courant presque deux fois supérieur par rapport à la situation a). Les autres courants sont $I_2 \approx -5$A et $I_1 \approx 76$A. Notez que $I_2 \approx -5$A est dans le sens inverse de celui supposé dans la figure. Efficace, un tel circuit pourrait donc même charger la batterie faible.

Méthode de résolution alternative - Loi des noeuds et loi d'Ohm

On reprend la même méthode que celle explicitée à l'exercice 3. Pour cela, on simplifie le circuit. On voit en effet que les deux résistances R_J et la résistance r_1 sont en série (elles sont traversées par le même courant). On a donc un circuit équivalent comme explicité ci-dessous, avec $R_{eq} = 2R_J + r_1$.

Le circuit simplifié est très similaire à celui de l'exercice 3, on applique donc exactement la même méthode. La loi des noeuds donne :

$$I_1 + I_2 = I_3 \tag{40}$$

$$\frac{\varepsilon_1 - V_n}{R_{eq}} + \frac{\varepsilon_2 - V_n}{r_2} = \frac{V_n}{R_s} \tag{41}$$

La seule inconnue est V_n, que l'on isole pour trouver :

$$V_n = R_s \frac{\varepsilon_2 R_{eq} + \varepsilon_1 r_2}{R_{eq} r_2 + r_2 R_s + R_{eq} R_s} = 10.6\ V \tag{42}$$

On remplace ensuite dans les différents I_i pour trouver :

$$I_1 = 76.5\ A \qquad I_2 = -5\ A \qquad I_3 = 70.5\ A \tag{43}$$