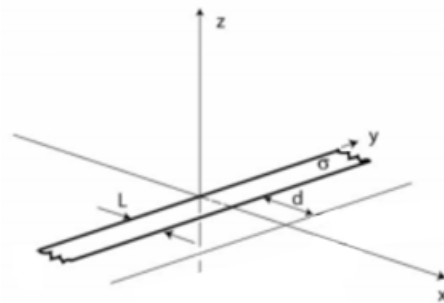


Corrigé des exercices - Série 2

Exercice 1

Soit un ruban plan et infini de largeur $L = 2 \text{ cm}$ ($z = 0, 0 \leq x \leq L$) chargé avec une densité superficielle homogène $\sigma = 1 \text{ } \mu\text{C/m}^2$. Trouvez le champ électrique (en N/C) créé dans le même plan et à distance $d = 1 \text{ m}$ de ce ruban, i.e. sur la ligne droite définie par $z = 0, x = L + d$.



Corrigé

Par symétrie de la distribution des charges, sur la ligne droite considérée le champ électrique est selon x . De plus, comme le ruban est infiniment long dans la direction y , le champ doit être le même pour tous les points de la ligne droite. Il nous suffit donc de calculer la composante x du champ au point $(L + d, 0, 0)$.

Le champ $d\vec{E}$ créé par une charge infinitésimale se trouvant au point $(x, y, 0)$ et ressenti au point $(L + d, 0, 0)$ s'écrit :

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma dx dy}{r^2} \hat{e}_r \quad \text{avec } r = \sqrt{(L + d - x)^2 + y^2} \quad (1)$$

Puisqu'on ne s'intéresse qu'à la composante x , on fait une projection sur l'axe x :

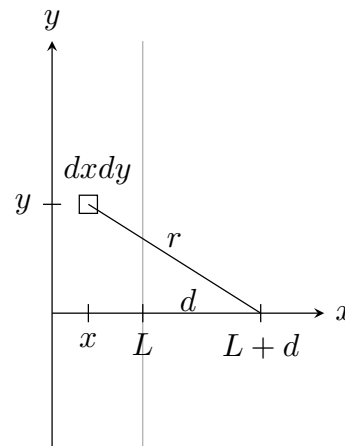
$$dE_x = d\vec{E} \cdot \hat{e}_x = \|d\vec{E}\| \frac{L + d - x}{r} \quad (2)$$

Le principe de superposition nous dit que le champ total E créé par le ruban sur l'axe ($x = L + d, z = 0$) est donné par la somme des champs infinitésimaux dE_x :

$$E = \int_0^L \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma dx dy}{r^2} \hat{e}_r \hat{e}_x \quad (3)$$

$$= \int_0^L \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \frac{(L + d - x) dx dy}{r^3} \quad (4)$$

$$= \int_0^L \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \frac{(L + d - x) dx dy}{((L + d - x)^2 + y^2)^{3/2}} \quad (5)$$



1. crédit : Dr. J. Loizu, Prof. A. Fasoli

Pour simplifier un peu l'écriture de cette intégrale, commençons par le changement de variable :

$$s = L + d - x \quad (6)$$

$$ds = -dx \quad (7)$$

Ce qui conduit à :

$$E = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \int_d^{L+d} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{s \, ds \, dy}{(s^2 + y^2)^{3/2}} \quad (8)$$

On effectue un deuxième changement de variable ($u = y/s, du = dy/s$) :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{s \, dy}{(s^2 + y^2)^{3/2}} = \frac{1}{s} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{(1 + u^2)^{3/2}} = \frac{2}{s} \quad (9)$$

On a donc

$$E = \int_d^{L+d} \frac{\sigma}{2\pi\epsilon_0} \frac{ds}{s} = \frac{\sigma}{2\pi\epsilon_0} (\ln(L + d) - \ln d) \quad (10)$$

On trouve finalement :

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(1 + \frac{L}{d}\right) \hat{e}_x \quad (11)$$

Application numérique : $E = \frac{10^{-6}}{2\pi \times 8.8 \times 10^{-12}} \ln(1 + 2/100) \approx 358 \text{ N/C}$.

Note : Si la forme du champ créé par un fil infini était une donnée, ou calculée précédemment, on pourrait considérer le ruban comme étant composé par des fils infinis de largeur dx et dont la densité de charge linéaire est $\lambda = \sigma dx$. Pour en déduire :

$$E_x = \int_L^0 \frac{\sigma \, dx}{2\pi\epsilon_0(L + d - x)} = \frac{\sigma}{2\pi\epsilon_0} [\ln(L + d - x)]_L^0 = -\frac{\sigma}{2\pi\epsilon_0} (\ln(d) - \ln(L + d)) = \frac{\sigma}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(1 + \frac{L}{d}\right) \quad (12)$$

Exercice 2

On considère un disque de rayon R portant une charge superficielle constante σ . Calculez le champ électrique sur tout point de l'axe qui est perpendiculaire au disque et passe par son centre. Comment se comporte le champ électrique très loin du disque ? Et très proche ?

Corrigé

Étant donnée la symétrie du problème, le champ \vec{E} créé sur l'axe de symétrie du disque, est orienté selon cet axe. Soit x la distance entre un point sur l'axe et le centre du cercle.

Un élément de surface dS crée en ce point un champ électrique :

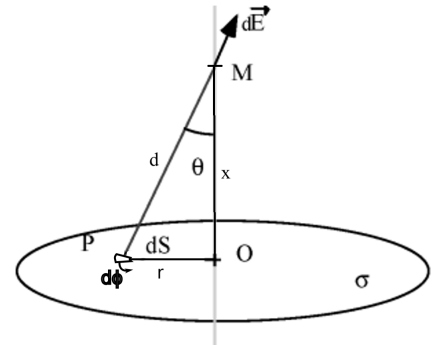
$$d\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma dS}{d^2} \hat{e}_d \quad (13)$$

où $d = \overrightarrow{PM}$. Le champ résultant étant axial, il faut faire la somme des composantes axiales des champs infinitésimaux.

$$dE_x = dE \cos \theta = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \frac{dS \cos \theta}{d^2} \quad (14)$$

Notons qu'en coordonnées cylindrique un petit élément de surface dans le plan (r, ϕ) est donné par $dS = dr r d\phi$. Donc en intégrant sur la surface du disque :

$$E_x = \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^R \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dr r d\phi \sigma \cos \theta}{d^2} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \int_0^R \frac{r \cos \theta}{d^2} dr \quad (15)$$



Pour résoudre cette intégrale, on peut procéder de deux manières différentes.

Méthode 1 : intégration selon r

Pour calculer l'intégrale de l'équation (15) par rapport à r , il faut d'abord expliciter toutes les dépendances par rapport à cette variable : $d = \sqrt{r^2 + x^2}$ et $\cos \theta = x/d = x/\sqrt{r^2 + x^2}$. L'intégrale s'écrit alors :

$$E_x = \frac{\sigma x}{2\epsilon_0} \int_0^R \frac{r dr}{(r^2 + x^2)^{3/2}} \quad (16)$$

Le terme en $(r^2 + x^2)^{-3/2}$ de notre fonction à intégrer suggère que la fonction primitive pourrait être de la forme $(r^2 + x^2)^{-1/2}$. On peut alors tenter de comparer la dérivée de cette fonction à l'intégrand :

$$\frac{d}{dr} (r^2 + x^2)^{-1/2} = -\frac{r}{(r^2 + x^2)^{3/2}} \quad (17)$$

C'est exactement notre intégrand, au signe près. On a donc :

$$E_x = \frac{\sigma x}{2\epsilon_0} \left[-\frac{1}{\sqrt{r^2 + x^2}} \right]_0^R = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{x}{\sqrt{R^2 + x^2}} \right) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{R^2}{x^2}}} \right) \quad (18)$$

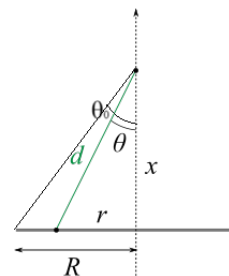
Méthode 2 : intégration selon θ

On peut aussi faire le calcul en intégrant selon θ . On opère le changement de variable suivant :

$$r = x \tan \theta \quad (19)$$

$$dr = \frac{x}{\cos^2 \theta} d\theta \quad (20)$$

$$x = d \cos \theta \quad (21)$$



Les bornes d'intégration $r = [0; R]$ deviennent $\theta = [0; \theta_0]$ avec $\theta_0 = \arctan(R/x)$. En reprenant l'expression de l'équation (15) on obtient :

$$E_x = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \int_0^{\theta_0} \frac{x \tan \theta \, d\theta \cos^2 \theta \cos \theta}{\cos^2 \theta \, x^2} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \int_0^{\theta_0} \sin \theta \, d\theta = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} (-\cos \theta) \Big|_0^{\theta_0} \quad (22)$$

$$E_x = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} (1 - \cos \theta_0) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \left(1 - \frac{x}{(x^2 + R^2)^{1/2}} \right) \quad (23)$$

Observons maintenant les limites de cette expression, lorsque l'on se place très proche ou très loin du disque.

Très proche du disque :

$$x \ll R : \quad \theta_0 = \frac{\pi}{2} \quad E_x = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \quad (24)$$

Le champ ne dépend que de σ . Comme pour un plan infini, uniformément chargé, où le champ est uniforme et de valeur $\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$, normal et symétrique par rapport au plan.

Très loin du disque :

Pour cela nous nous servirons du développement en série de Taylor d'une fonction $f(x)$ à des positions x proches de la position x_0 :

$$f(x) \approx f(x_0 + x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \dots \quad (25)$$

En utilisant ce développement pour de petits θ_0 et en ne gardant que les premiers termes :

$$x \gg R : \quad (26)$$

$$\theta_0 \ll 1 \quad \text{donc} \quad \cos \theta_0 \sim 1 - \frac{\theta_0^2}{2} \quad (27)$$

$$\text{ou pour le resultat de la première version :} \quad (28)$$

$$\frac{R}{x} \ll 1 \quad \text{donc} \quad \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{R^2}{x^2}}} \right) \sim 1 - \left(1 - \frac{R^2}{2x^2} \right) = \frac{R^2}{2x^2} \quad (29)$$

De plus, pour de petits θ_0 : $\theta_0 \sim \tan \theta_0 = \frac{R}{x}$, d'où :

$$E_x \sim \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \frac{R^2}{2x^2} = \frac{\pi R^2 \sigma}{4\pi \varepsilon_0 x^2} = \frac{Q}{4\pi \varepsilon_0 x^2} \quad (30)$$

où Q est la charge totale du disque. Le champ à grande distance est donc le même que celui d'une charge ponctuelle Q .

Exercice 3 : Expérience de Millikan

Une goutte d'huile de rayon $R = 2.76 \mu\text{m}$ et de densité $\rho = 920 \text{ kg/m}^3$ est chargée avec une charge Q et maintenue en équilibre sous l'effet de son poids et d'un champ électrique uniforme dirigé vers le bas et d'amplitude $E = 1.65 \times 10^6 \text{ N/C}$.

Remarque : Robert Millikan a utilisé ce principe pour démontrer, en 1913, que la charge est quantifiée et pour mesurer la charge fondamentale, aujourd'hui établie à $|e| \approx 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$ (Figure).

- a) Calculer la valeur et le signe de la charge Q . Exprimer le résultat en multiple de $|e|$.
- b) La goutte est exposée à une source émettant des électrons. On observe que la goutte bouge vers le haut avec une accélération constante $a = 13 \text{ m/s}^2$. Combien d'électrons ont-ils été capturés par la goutte ? On néglige la viscosité de l'air.

Corrigé

- a) L'équilibre entre le poids de la goutte \vec{P} et la force électrique \vec{F}_E qu'elle subit s'écrit :

$$\vec{P} + \vec{F}_E = \vec{0} \quad (31)$$

$$QE = -\rho \frac{4}{3} \pi R^3 g \quad (32)$$

ce qui nous donne $Q \approx -4.91 \times 10^{-19} \text{ C} \approx -3|e|$.

On remarque que le signe de la charge est négatif, $Q < 0$, ce qui est logique puisque la force électrique $\vec{F}_e = Q\vec{E}$ doit être dirigée vers le haut pour pouvoir compenser le poids de la goutte.

- b) La goutte possède maintenant N charges additionnelles qui produisent une force résiduelle F_{net} sur la goutte, et donc l'accélération est vers le haut et est donnée par

$$a = \frac{F_{net}}{m} = \frac{N|e|E}{\rho \frac{4}{3} \pi R^3} = 13 \text{ m/s}^2 \quad (33)$$

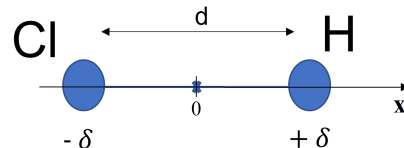
On en déduit

$$N = \frac{a \rho \frac{4}{3} \pi R^3}{|e|E} \approx 4 \quad (34)$$

Exercice 4

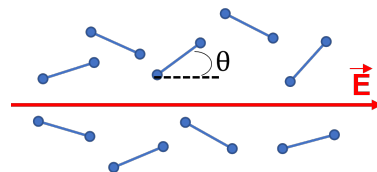
On considère un gaz formé de molécules de chlorure d'hydrogène (HCl) de masse $M = m_H + m_{Cl} \approx 6 \times 10^{-26}$ kg. Chaque molécule peut être modélisée comme un dipôle électrique avec une distance interatomique $d = 1.3 \text{ \AA}$ et une charge $\delta = 0.2e$.

- a) Calculer le champ électrique créé par l'un de ces dipôles, sur son axe. Montrer que loin du dipôle, ce champ électrique décroît comme le cube de la distance au dipôle.



On néglige l'interaction entre les dipôles, et on applique un champ électrique externe constant et d'amplitude $E = 10^3 \text{ N/C}$.

- b) Calculer l'amplitude $|\vec{p}|$ du dipôle électrique en Debye ($1 \text{ D} \simeq 3.34 \times 10^{-30} \text{ C}\cdot\text{m}$).
- c) Calculer la force totale qui s'exerce sur un dipôle.
- d) Calculer le moment de force $\vec{\tau}$ par rapport au centre de la molécule en fonction de l'angle θ entre \vec{E} et \vec{p} .
- e) Écrire l'équation du mouvement pour θ . *Indication* : utilisez le théorème du moment cinétique, $\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{\tau}$, où \vec{L}_O est le moment cinétique d'un corps par rapport à un point O.
- f) Pour des petites valeurs de θ , en déduire la fréquence des oscillations des molécules autour de $\theta = 0$.
- g) Que faudrait-il faire pour accélérer les molécules dans la direction du champ \vec{E} ?



Corrigé

- a) Le champ créé par le dipôle est donné par la somme des champs créés par les deux charges ponctuelles. Sur l'axe x , on a

$$E_x = -\frac{\delta}{4\pi\epsilon_0 (x + d/2)^2} + \frac{\delta}{4\pi\epsilon_0 (x - d/2)^2} \quad (35)$$

Si on regarde loin du dipôle ($x \gg d$), on peut simplifier cette expression par un développement Taylor limité en petites d/x . Tout d'abord on peut écrire :

$$E_x = -\frac{\delta}{4\pi\epsilon_0 x^2} \left[\frac{1}{(1 + \frac{d}{2x})^2} - \frac{1}{(1 - \frac{d}{2x})^2} \right] \quad (36)$$

$$\underset{x \gg d}{\approx} -\frac{\delta}{4\pi\epsilon_0 x^2} \left[1 - 2\frac{d}{2x} - \left(1 + 2\frac{d}{2x} \right) \right] \quad (37)$$

On obtient finalement pour $x \gg d$:

$$E_x = \frac{\delta d}{2\pi\epsilon_0 x^3} \quad (38)$$

b) $|\vec{p}| = qd = \delta d = 0.2 \cdot 1.6 \times 10^{-19} \cdot 1.3 \times 10^{-10} \text{C/m} = 4.16 \times 10^{-30} \text{ C/m}.$

Ce qui correspond à peu près à 1.24 D.

c) Puisque $\vec{E} = \text{const}$, $\vec{F} = 0$ puisque le centre de masse n'est soumis à aucune force,

$$\vec{F} = (\vec{p} \cdot \vec{\nabla}) \vec{E} = 0 \quad (39)$$

d) Considérons le plan cartésien xyz . Dans ce référentiel le vecteur unitaire \vec{z} a une direction sortante de la feuille. Si θ est l'angle entre \vec{E} et \vec{p} le moment de force $\vec{\tau}$ par rapport au centre de la molécule (point O) est calculé comme :

$$\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E} = -|\vec{p}| \cdot E \cdot \sin \theta \hat{e}_z \quad (40)$$

L'effet du champ électrique est d'aligner le vecteur \vec{p} dans la direction du champ électrique lui-même.

e)

$$\begin{aligned} \vec{L}_O &= \sum_i \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i \\ &= \frac{d}{2} \hat{e}_r \times m_H \left(\frac{d\dot{\theta}}{2} \right) \hat{e}_\theta + \frac{d}{2} \hat{e}_r \times m_{Cl} \left(\frac{d\dot{\theta}}{2} \right) \hat{e}_\theta \\ &= \frac{d^2}{4} M \dot{\theta} \hat{e}_z \end{aligned} \quad (41)$$

où \hat{e}_r et \hat{e}_θ sont des vecteurs unitaires polaires, et $M = m_H + m_{Cl}$.

Donc, par le théorème du moment cinétique,

$$\frac{d^2}{4} M \ddot{\theta} = -pE \sin \theta \quad (42)$$

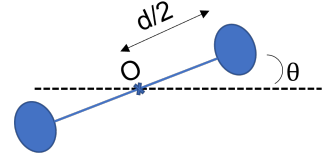
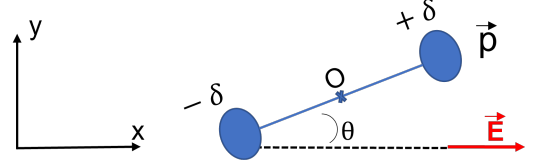
$$\ddot{\theta} = -\Omega^2 \sin \theta \quad (43)$$

avec $\Omega = \sqrt{\frac{4pE}{Md^2}} = \sqrt{\frac{4\delta E}{Md}}.$

f) Si $\theta \ll 1$, alors $\sin \theta \approx \theta$, et on tombe sur l'équation du mouvement d'un oscillateur harmonique. On peut donc identifier directement Ω comme la fréquence des oscillations.

$$\Omega = \sqrt{\frac{4\delta E}{Md}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 0.2 \cdot 1.6 \times 10^{-19} \cdot 10^3}{6 \times 10^{-26} \cdot 1.3 \times 10^{-10}}} \frac{1}{s} \simeq 4.04 \text{ GHz}. \quad (44)$$

g) Pour accélérer le dipôle et donc avoir une force non nulle il faut imposer un gradient de champ électrique. Par exemple : $E_x(x)$ avec $E'_x > 0$.

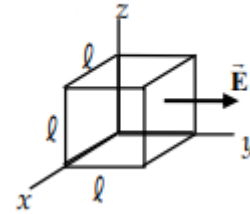


Exercice 5

On mesure un champ électrique décrit par $\vec{E}(x, y, z) = (ay + b)\hat{e}_y$, avec $a = 5 \text{ N}/(\text{C.m})$ et $b = 1 \text{ N/C}$. Déterminez la charge à l'intérieur d'un cube de côté $l = 1 \text{ cm}$, dont une face est en $y = 0$ et une en $y = l$.

Corrigé

Le champ électrique est strictement dans la direction y . Donc, en se référant au diagramme ci-contre, il n'y a pas de flux à travers la face supérieure, inférieure, avant ou arrière du cube. Seules faces en $y = 0$ et en $y = l$ sont sujettes à un flux de champ électrique. Calculons ce flux et utilisons la loi de Gauss pour trouver la charge contenue dans le volume du cube.



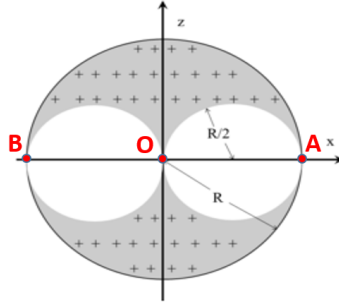
Il est important de se rappeler que lorsqu'on considère \vec{dA} dans le calcul intégral du flux, ce vecteur doit être orienté vers l'extérieur du volume.

$$\begin{aligned}
 \Phi &= \oint \vec{E} \cdot \vec{dA} = \int_{y=0} \vec{E} \cdot \vec{dA} + \int_{y=l} \vec{E} \cdot \vec{dA} \\
 &= \int_{y=0} b\hat{e}_y \cdot (-dA\hat{e}_y) + \int_{y=l} (al + b)\hat{e}_y \cdot (dA\hat{e}_y) \\
 &= -bl^2 + al^3 + bl^2 \\
 &= al^3
 \end{aligned} \tag{45}$$

Par la loi de Gauss : $al^3 = \frac{Q_{cube}}{\varepsilon_0}$, et donc $Q_{cube} = \varepsilon_0 al^3 \approx 8.8 \times 10^{-12} \cdot 5 \times 10^{-6} \text{ C} \approx 4.4 \times 10^{-17} \text{ C}$.

Exercice 6

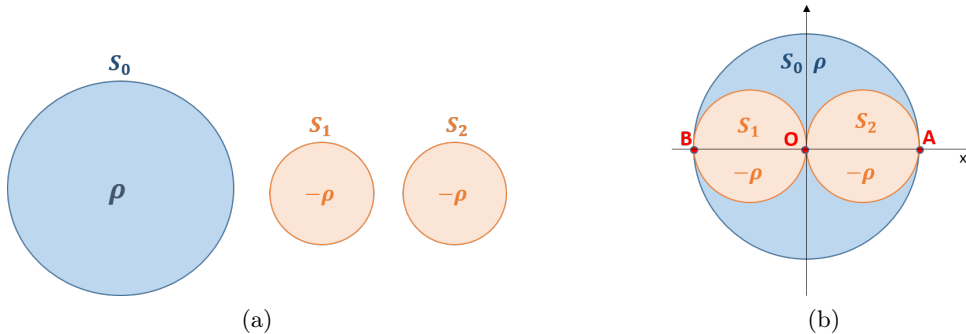
Une sphère de densité de charge uniforme $\rho = 10^{-4} \text{ C/m}^3$ et rayon $R = 0.1 \text{ m}$ contient deux zones sphériques sans charge à l'intérieur avec un rayon $R/2$ comme indiqué sur la figure.



Déterminer l'expression du champ électrique le long de l'axe x ($-R \leq x \leq R$) et l'évaluer en A ($x = R$), O ($x = 0$), B ($x = -R$). Indication : $\epsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2/\text{Nm}^2$

Corrigé

L'exercice peut être résolu en considérant un système équivalent pour lequel on obtient la même distribution de charges et le même champ électrique. En fait, en utilisant le principe de superposition, le système est équivalent à une sphère chargée positivement de charge Q , de rayon R et de densité de charge uniforme ρ et deux sphères chargées négativement (S_1 à gauche et S_2 à droite) de densité de charge uniforme $\rho_{S_1} = \rho_{S_2} = -\rho$ de rayon $R/2$ situées en $x_{S_1} = -R/2$ et $x_{S_2} = R/2$. La charge négative totale de chaque sphère négative est : $Q_1 = Q_2 = -\rho \frac{4}{3}\pi(R/2)^3$.



On commence par calculer le champ électrique créé par une sphère uniformément chargée, en utilisant la loi de Gauss $\int E dS = Q_{int}/\epsilon_0$. On considère séparément le champ à l'intérieur et à l'extérieur de la sphère. Dans les deux cas, on définit une surface de Gauss sphérique de rayon r , concentrique avec la sphère chargée.

Intérieur ($r < R$) :

Notre surface de Gauss n'englobe qu'une partie de la charge présente dans la sphère. On a

$$Q_{int} = \frac{4\pi}{3} r^3 \rho \quad (46)$$

$$\frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} \stackrel{Gauss}{=} \oint_{sphere} \vec{E} d\vec{S} = 4\pi r^2 E(r) = \frac{4\pi}{3\varepsilon_0} r^3 \rho \quad (47)$$

$$E(r) = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0} \quad (48)$$

Si l'on convertit ce résultat en coordonnées cartésiennes (en notant que r est toujours positif en coordonnées cylindrique, alors que x peut-être positif ou négatif), on a :

$$\text{— à droite du centre } E(x > x_0) = \frac{\rho|x|}{3\varepsilon_0} = \frac{\rho x}{3\varepsilon_0}$$

$$\text{— à gauche } E(x < x_0) = -\frac{\rho|x|}{3\varepsilon_0} = -\frac{\rho x}{3\varepsilon_0}$$

L'expression est identique, la différence de signe est portée par x .

Extérieur ($r > R$) :

Le volume à l'intérieur de notre surface de Gauss contient la même charge $Q = \frac{4\pi}{3} R^3 \rho$ indépendamment de r . On a alors

$$4\pi r^2 E(r) = \frac{Q}{\varepsilon_0} \quad (49)$$

$$E(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \quad (50)$$

Le champ électrique à l'extérieur de la sphère est donc identique à celui produit par une charge ponctuelle. À nouveau on convertit ce résultat en coordonnées cartésiennes, et on a :

$$\text{— à droite } E(x > R) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 x^2}$$

$$\text{— à gauche } E(x < R) = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 x^2}$$

Remarquons enfin que si la sphère n'est pas centrée en zéro mais en $x_0 \neq 0$, on a sur l'axe x : $E(|x| < x_0) = \frac{\rho(x-x_0)}{3\varepsilon_0}$, et $E(|x| > R) = \pm \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0(x-x_0)^2}$.

Somme des trois sphères

Voyons maintenant la somme des contributions des sphères S_0 , S_1 et S_2 .

$$\text{— } 0 \leq x \leq R$$

L'ensemble du volume de la sphère S_1 donne une contribution $E_1 = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0(x-x_{s1})^2} = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0(x+R/2)^2}$.

Quant à la sphère S_2 la situation est similaire à celle de la sphère S_0 mais S_2 est centrée dans $x_{s2} = R/2$. On a donc : $E_2 = \frac{\rho_{S_2}(x-x_{s2})}{3\varepsilon_0} = \frac{-\rho(x-R/2)}{3\varepsilon_0}$. Finalement, le champ électrique total pour $0 \leq x \leq R$ est :

$$E_{(0 \leq x \leq R)} = \frac{\rho x}{3\varepsilon_0} + \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0(x+R/2)^2} - \frac{\rho(x-R/2)}{3\varepsilon_0} \quad (51)$$

$$\text{— } -R \leq x \leq 0$$

De même, pour la sphère S_1 : $E_1 = \frac{-\rho(x+R/2)}{3\varepsilon_0}$, et avec la sphère S_2 on a $E_2 = -\frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0(x-R/2)^2}$.

On a donc pour le champ total :

$$E_{(-R \leq x \leq 0)} = \frac{\rho x}{3\varepsilon_0} - \frac{\rho(x+R/2)}{3\varepsilon_0} - \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0(x-R/2)^2} \quad (52)$$

Le champ électrique a la forme indiquée dans le graphique suivant. En utilisant les formules obtenues, au point **A** le champ électrique est $E_x(R) = 0.1673$ MV/m, et au point **B** le champ électrique est $E_x(R) = -0.1673$ MV/m. En **O**, comme on le sait, la sphère S_0 ne contribue pas, tandis que la contribution de la sphère S_1 et S_2 s'annulent.

