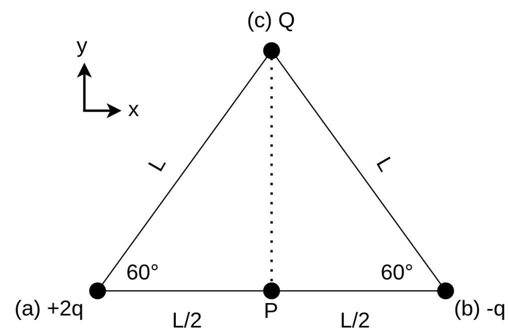
Semestre Automne (20.01.2023)

Corrigé examen

Exercice 1

a) Le potentiel électrique généré sur le point P par les charges ponctuelles (a), (b) et (c) est donné par :

$$V_{a\to P} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{2q}{(L/2)} \tag{1}$$
$$V_{b\to P} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{-q}{(L/2)} \tag{2}$$
$$V_{c\to P} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{(\sqrt{3}L/2)} \tag{3}$$



Par superposition, il est possible d'exprimer le potentiel au point P par la somme des potentiels appliqués sur le point P. Pour que il soit nul,

$$0 = V_{a\to P} + V_{b\to P} + V_{c\to P} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{L}\big(4q - 2q + \frac{2Q}{\sqrt{3}}\big). \tag{4}$$

Finalement, on obtient

$$Q = -\sqrt{3}q = -\sqrt{3}\times 2\times 10^{-6} \simeq -3.46\times 10^{-6} \tag{5}$$

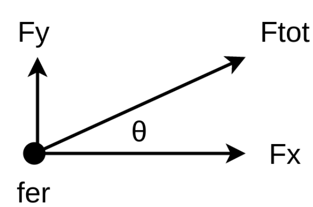
b) L'énergie potentielle pour deux charges est :

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r_{12}} \tag{6}$$

L'énergie potentielle totale du système peut être, donc, écrite comme suit

$$\begin{aligned} U_{\text{tot}} &= U_{ab} + U_{bc} + U_{ca} && (7)\\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{L}(-2q^2 + \sqrt{3}q^2 - 2\sqrt{3}q^2) && (8)\\ &= \frac{1}{4\times\pi\times 8.8\times 10^{-12}}\frac{1}{0.03}(-2-\sqrt{3})(2\times 10^{-6})^2 && (9)\\ &\simeq -4.5J. && (10)\end{aligned}$$

c) Comme le noyau de l'atome de fer contient 26 ptorons et 30 neutrons, sa masse et sa charge sont équivalentes à $Q_{\text{fer}} = 26e = 4.16\times 10^{-18}C$ et $m_{\text{fer}} \simeq 56m_i \simeq 9\times 10^{-26}$kg. Alors, la force appliquée par les charges simples (a), (b) et (c) sur le noyau du fer peut être exprimée comme suit



$$
\begin{aligned}
F_{a\to\text{fer}} &= \frac{1}{4\pi\epsilon}\frac{(2q)(Q_{\text{fer}})}{(L/2)^2}\hat{\boldsymbol{e}}_x && (11)\\
&= \frac{1}{4\pi\times 80\times(8.8\times 10^{-12})}\frac{(2\times 2\times 10^{-6})(26\times 1.6\times 10^{-19})}{(0.03/2)^2}\hat{\boldsymbol{e}}_x \simeq 8.36\times 10^{-12}N\hat{\boldsymbol{e}}_x, && (12)\\
F_{b\to\text{fer}} &= \frac{1}{4\pi\epsilon}\frac{(-q)(Q_{\text{fer}})}{(L/2)^2}(-\hat{\boldsymbol{e}}_x) && (13)\\
&= \frac{1}{4\pi\times 80\times(8.8\times 10^{-12})}\frac{(-2\times 10^{-6})(26\times 1.6\times 10^{-19})}{(0.03/2)^2}(-\hat{\boldsymbol{e}}_x) \simeq 4.18\times 10^{-12}N\hat{\boldsymbol{e}}_x, && (14)\\
F_{c\to\text{fer}} &= \frac{1}{4\pi\epsilon}\frac{(-\sqrt{3}q)(Q_{\text{fer}})}{(\sqrt{3}L/2)^2}(-\hat{\boldsymbol{e}}_y) && (15)\\
&= \frac{1}{4\pi\times 80\times(8.8\times 10^{-12})}\frac{(-\sqrt{3}\times 2\times 10^{-6})(26\times 1.6\times 10^{-19})}{((\sqrt{3}\times 0.03)/2)^2}(-\hat{\boldsymbol{e}}_y) \simeq 2.41\times 10^{-12}N\hat{\boldsymbol{e}}_y. && (16)\\
& && (17)
\end{aligned}
$$

où l'on a divisée les forces par la constante diélectrique K, car dans un milieu diélectrique le champ électrique (et donc les forces) sont réduits par ce facteur K. Alors l'amplitude de la force totale est égale à

$$
\begin{aligned}
F_{\text{tot}} &= \sqrt{F_x^2+F_y^2} && (18)\\
&= \sqrt{(12.54\times 10^{-12})^2+(2.41\times 10^{-12})^2} \simeq 1.28\times 10^{-11}N && (19)
\end{aligned}
$$

En utilisant la relation trigonométrique de chaque composante, il est possible de trouver un angle

$$
\begin{aligned}
F_{\text{tot}}\cos\theta &= F_{\text{x}} = F_{a\to\text{fer}} + F_{b\to\text{fer}} = 12.54\times 10^{-12}N && (20)\\
F_{\text{tot}}\sin\theta &= F_{\text{y}} = F_{c\to\text{fer}} = 2.41\times 10^{-12}N && (21)
\end{aligned}
$$

conduisant à

$$\tan\theta = \frac{F_{\text{y}}}{F_{\text{x}}} = \frac{2.41}{12.54} \tag{22}$$

$$\theta = \tan^{-1}\frac{2.41}{12.54} \simeq 10.9^\circ \tag{23}$$

Enfin, l'accélération peut être obtenue

$$a = \frac{F_{\text{tot}}}{m_{\text{fer}}} = \frac{1.28\times 10^{-11}}{56\times 1.6\times 10^{-27}} \simeq 1.43\times 10^{14}m/s^2 \tag{24}$$

avec

$$
\begin{aligned}
a_x &= \frac{F_x}{m_{\text{fer}}} \simeq 1.4\times 10^{14}m/s^2 && (25)\\
a_y &= \frac{F_y}{m_{\text{fer}}} \simeq 2.7\times 10^{13}m/s^2 && (26)
\end{aligned}
$$

Exercice 2

a) Pour calculer la capacité de la sphère, on utilise la relation $C = Q/\Delta V$. On suppose que l'on a déposé une charge Q sur la sphère, et on calcule la différence de potentiel que cette charge crée entre les armatures du condensateur. Dans notre cas, on suppose que la deuxième armature est à l'infini.

On part de l'expression pour le champ électrique créé par une sphère uniformément chargée, en incluant l'effet du diélectrique :

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 K r^2} \tag{27}$$

$$\begin{aligned} &K = 2 \text{ pour } R < r < R + a \\ &K = 1 \text{ pour } r > R + a \end{aligned}$$

Le potentiel de la sphère est calculé de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \Delta V &= \int_R^\infty E dr = \int_R^{R+a} \frac{Q}{8\pi\epsilon_0 r^2} dr + \int_{R+a}^\infty \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr \\ &= \frac{Q}{8\pi\epsilon_0 R} - \frac{Q}{8\pi\epsilon_0 (R+a)} + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 (R+a)} \\ &= \frac{5Q}{24\pi\epsilon_0 R} \qquad (\text{avec } R = 2a) \end{aligned}$$

Finalement, on utilise la définition de la capacité :

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{24}{5}\pi\epsilon_0 R \approx 13.4 \text{ pF} \tag{28}$$

b) Lorsque l'on connecte la batterie de $V_0 = 9$ V, la capacité se charge selon la relation suivante :

$$Q(t) = CV_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) \tag{29}$$

On cherche le temps t_b lorsque la capacité porte une charge $Q_b = 10^{-10}$ C.

$$Q_b = Q(t_b) = CV_0 \left(1 - e^{-\frac{t_b}{RC}}\right) \tag{30}$$

$$t_b = -RC \ln\left(1 - \frac{Q_b}{CV_0}\right) \approx 1.2 \text{ ns} \tag{31}$$

c) L'énergie nécessaire pour charger le condensateur est égale à l'intégrale de la puissance $P_{batt} = V_0 i(t)$ délivrée par la batterie, avec le courant $i(t) = dQ/dt$:

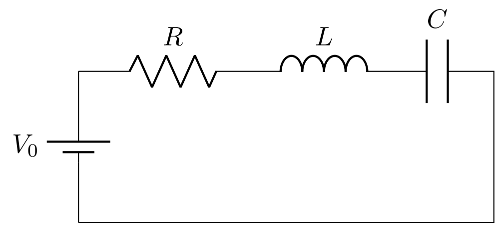
$$E_{batt} = \int_0^{t_b} V_0 i(t) dt = V_0 Q_b \tag{32}$$

Remarquons que ceci est différent de l'énergie stockée dans le condensateur . En effet, une partie de l'énergie délivrée par la batterie est dissipée par la résistance pendant la charge du condensateur. Si on ajoute la perte totale sur la résistance ($\int_0^{t_b} Ri^2(t)dt$) et l'énergie finale dans le condensateur ($Q_b^2/(2C)$), on retrouve le même résultat.

d) Si on ajoute une inductance au circuit, le temps de charge va augmenter.

Sans inductance, le courant traversant le circuit passe de 0 à V_0/R instantanément lorsque l'on connecte la batterie. L'inductance ralentit la variation du courant, et donc le chargement du condensateur. En effet, l'équation différentielle de ce circuit est :

$$L\frac{d^2Q}{dt^2} = -\frac{Q}{C} - R\frac{dQ}{dt} + V_0 \tag{33}$$



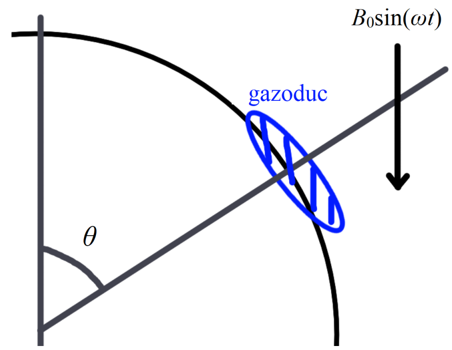
ce qui est équivalent à celle d'un oscillateur harmonique avec frottement (R) et forçage (V_0). L'inductance L joue le rôle de masse et donc d'inertie. Comme on a, pour $L = 1$ nH, que

$$\frac{R^2}{L^2} - \frac{4}{LC} > 0 \tag{34}$$

alors on est en régime "sur-amorti", donc sans oscillations, et la charge du condensateur va se faire de manière monotone mais avec un temps plus long que sans L.

Exercice 3

En raison de la variation du champ magnétique tout au long de la tempête, le flux du champ magnétique à travers la boucle du tuyau change également. La géométrie du problème est donnée dans l'image :



a) Pour trouver le champ électrique dans l'espace du tuyau, nous pouvons utiliser la loi de Faraday. Nous pouvons évaluer le changement de flux magnétique à travers la boucle de tuyau de la manière suivante :

$$\mathcal{E}_{ind} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t} = -\frac{\partial (B_0 \sin \omega t A \cos \vartheta)}{\partial t} = -\omega B_0 A \cos \omega t \cos \vartheta. \tag{35}$$

Ici, nous avons pris en compte le fait qu'en fonction de ϑ la projection du champ magnétique sur la normale à la boucle change, atteignant son maximum au pôle Nord.
Avant que l'air dans l'espace du tuyau ne soit ionisé, aucun courant ne circule dans le tuyau et $\mathcal{E}_{ind}$ est appliqué à l'espace entre les extrémités du tuyau. En supposant que le champ électrique atteigne une valeur critique, nous pouvons estimer ω_{crit}.

$$E_{crit} d = \max(\mathcal{E}_{ind}) = \omega_{crit} B_0 A; \tag{36}$$

$$\omega_{crit} = \frac{E_{crit} d}{B_0 A} = \frac{3 \cdot 10^6 \text{ V/m } 0.001 \text{ m}}{2 \cdot 10^{-7} \text{ T } ^2 10^8 \text{ m}^2} = 150 Hz. \tag{37}$$

b) Pour la fréquence critique doublée, nous pouvons avoir $\cos \vartheta$ aussi petit que 0.5 et toujours remplir la première égalité dans (36). Cela signifie que l'ionisation se produira partout dans la plage $\vartheta = 0 - 60°$.

c) D'après le résultat de b), nous savons que pour $\vartheta = 30°$ l'air sera ionisé et le tuyau se transformera en boucle avec résistance. Pour trouver la résistance, il faut connaître la longueur de la boucle et sa section. La longueur peut être estimée en sachant que $A = 100 \text{ km}^2$:

$$L = 2\pi R_0 = 2\pi \sqrt{\frac{A}{\pi}} = 35.45 \text{km}. \tag{38}$$

La section du tuyau est un anneau, son aire A_{cross} est égale à $\pi \left((r+e)^2 - r^2 \right) = 0.28 \text{ m}^2$. Enfin, nous pouvons trouver la résistance du tuyau et le courant qui le traverse.

$$R = \frac{\rho L}{A_{cross}} = \frac{2.6 \cdot 10^{-8} \text{ Ohm m } 3.545 \cdot 10^4 \text{m}}{0.28 \text{ m}^2} = 0.0033 \text{Ohm}. \tag{39}$$

$$I_{max} = \frac{V_{max}}{R} = \frac{2\omega_{crit} B_0 A \cos \vartheta}{\frac{\rho L}{A_{cross}}} = \frac{300\text{Hz } 2 \cdot 10^{-7} \text{ T } 10^8 \text{ m}^2}{0.0033 \text{ Ohm}} \frac{\sqrt{3}}{2} = 1.58 MA. \tag{40}$$

d) Nous pouvons utiliser l'expression que nous avons obtenue pour le courant pour trouver la puissance :

$$P(t) = RI^2 = RI_{max}^2 \cos^2 \omega t. \tag{41}$$

$$W = I_{max}^2 R \int_0^T \cos^2 \omega t dt = 0.5 I_{max}^2 R \int_0^T (1+\cos 2\omega t) dt = 0.5 I_{max}^2 R \left(T + \frac{\sin 2\omega T}{2\omega} \right) =$$

$$0.5(1.58 \cdot 10^6 \text{A})^2 0.0033 \text{ Ohm } \left(3600 \text{ s} + \frac{0.85}{300 \text{ Hz}} \right) = 1.48 \cdot 10^{13} \text{ J.} \tag{42}$$

avec T le temps égal à la durée de la tempête.

Exercice 4

a) Si plusieurs petites antennes avaient la même fréquence, il y aurait des régions d'interférence constructives ou destructives entre les signaux. Cela résulterait typiquement dans des zones sans signal.

b) L'intensité I de la radiation, i.e. d'une onde électromagnétique, peut s'écrire pour une onde d'émission sphérique comme

$$I(r) = \frac{P_{antenne}}{4\pi r^2} \tag{43}$$

avec r la distance radiale de l'antenne. On veut que l'intensité soit plus grande que 5mW/m^2 partout, i.e. le plus loin de l'antenne.

$$P_{antenne} \geq I \cdot 4\pi r^2 = 5 \cdot 10^{-3} W/m^2 4\pi \cdot (3.6 \cdot 10^3 m)^2 = 814.3 kW \tag{44}$$

Dans le cas des 7 petites antennes, on voit que le rayon que chacune couvre, est environ un tiers de la grande antenne, i.e. $3r_{petit} = r_{grand}$. Comme l'intensité est proportionnelle à $I \propto r^{-2}$, nous avons que

$$P_{antenne,petit} = \frac{1}{9} P_{antenne} \approx 90.5 kW \tag{45}$$

Alternative : Dans le cas des petites antennes, nous avons ici choisi r tel que les différentes sphères se touchent. On pourrait aussi résoudre la situation des 7 petites antennes en cherchant à ne pas avoir de coins du tout avec moins d'intensité. Dans ce cas, les sphères doivent se superposer un peu. Le rayon dans ce cas peut s'écrire comme $r_{petit} = \sqrt{4/27}\, r_{grand}$, ce qui vient de l'analyse de la distance entre chaque coin d'un triangle équilatéral au point centrale du triangle. La puissance correspondante de chaque petite antenne serait $P_{antenne,petit} = 120.6$kW et la réponse c) devient que $7 \cdot P_{antenne,petit} > P_{antenne}$. Cette réponse est considérée comme juste aussi, si proprement argumentée. L'approximation que la surface de chaque petite antenne était 1/7 de la grande, tel que $r_{petit} = \sqrt{1/7}\, r_{grand}$ et $7 \cdot P_{antenne,petit} = P_{antenne}$ est considérée comme partiellement juste.

c) Dans le b), nous avons trouvé que la puissance des petites antennes est de 90.5kW. Pour le totales des 7 antennes, cela revient donc à 633kW et donc inférieur à la grande antenne. On note que l'énergie est la puissance consommée fois le temps d'opération.

d) L'intensité de la radiation est égale à la moyenne temporelle de l'amplitude du vecteur de Poynting, i.e.

$$I = \langle S \rangle_t = \langle \frac{1}{\mu_0} |\vec{E} \times \vec{B}| \rangle_t = \frac{1}{2} \epsilon_0 c E_0^2 \tag{46}$$

avec E_0 l'amplitude du champ électrique. En calculant que l'intensité de la radiation de la grande antenne à une distance de 80m est $I_{antenne}(80m) \approx 10.1 W/m^2$, on peut calculer l'amplitude du champ électrique comme

$$E_0(80m) = \sqrt{2c\mu_0 I(80m)} \approx 87.3 V/m \tag{47}$$

On dépasse donc la limite de risque.

e) En utilisant le lien entre le champ électrique et magnétique d'une onde électromagnétique comme $E = cB$, nous pouvons évaluer l'amplitude du champ magnétique comme

$$B_0 = \frac{E_0}{c} = 2.91 \cdot 10^{-7} T \tag{48}$$

f) Comme nous savons que dans le cas des petites antennes, nous avons que $P_{antenne,petit} = \frac{1}{9} P_{antenne}$, nous savons donc que la distance minimale peut être 1/3 de la distance pour la grande antenne, car $I = P_{antenne}/(4\pi r^2)$. Et donc la distance minimale est de 26.7m. Si on calculait explicitement, on obtiendrait

$$I(r) = \frac{P_{petite,antenne}}{4\pi r^2} = \frac{1}{2}\epsilon_0 c E_0^2 \tag{49}$$

$$r = \sqrt{\frac{P_{petite,antenne}}{4\pi I(80m)}} = \sqrt{\frac{P_{petite,antenne}}{2\pi\epsilon_0 c E_0^2}} \tag{50}$$

g) La loi de Faraday s'écrit comme

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi_B^C}{dt} = -N\frac{d\Phi_B}{dt} = -N\frac{d}{dt}(BA) = -N\frac{d}{dt}\left(B\frac{1}{4}\pi D^2\right) \tag{51}$$

où N est le nombre de tours dans la bobine, Φ_B est le flux magnétique à travers un tour de la bobine et nous savons que $B = B_0 sin(\omega t)$. Avec cela, nous pouvons écrire

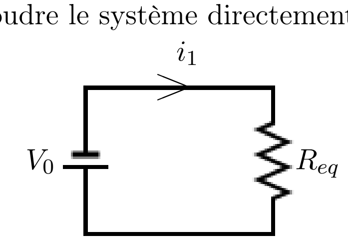
$$\varepsilon = -NB_0\frac{1}{4}\pi D^2\frac{d}{dt}(sin(\omega t)) = -NB_0\omega\frac{1}{4}\pi D^2 cos(\omega t) \tag{52}$$

et pour l'application numérique, nous avons, avec $\omega = 2\pi f$,

$$|\varepsilon| = NB_0\omega\frac{1}{4}\pi D^2 = 5170V \tag{53}$$

Exercice 5

a) La puissance dissipée par la résistance R est $P = I^2 R$, où I est le courant passant à travers R vers le bas de la figure. Nous devons donc trouver I.
La loi des noeuds nous dit que $I = i_1 - i_2$, où i_2 est le courant passant par R_2 vers le bas. Nous trouvons i_2 avec la loi des mailles, $i_2 R_2 - IR = 0$. Donc il nous reste à trouver i_1.
Nous avons deux options, nous pouvons réduire le circuit à une batterie et une seule résistance, R_{eq} (comme dans la figure ci-dessous), ou nous pouvons résoudre le système directement avec la loi des mailles.



Méthode 1 : Le circuit se réduit premièrement en combinant les deux résistances en parallèles (R_2, R), qui deviennent une résistance de $(1/R_2+1/R)^{-1}$, puis toutes les résistances restantes seront en série et nous trouvons,

$$R_{eq} = R_0 + R_1 + (1/R_2 + 1/R)^{-1} \tag{54}$$

Par la loi des mailles, nous savons que $V_0 + i_1 R_{eq} = 0$, et donc :

$$i_1 = -\frac{V_0}{R_{eq}} = -\frac{V_0(R+R_2)}{(R_0+R_1)(R+R_2)+RR_2} \tag{55}$$

Cela nous donne :

$$I = i_1 - i_2 = -\frac{V_0(R+R_2)}{(R_0+R_1)(R+R_2)+RR_2} - \frac{IR}{R_2} \tag{56}$$

$$I(1+\frac{R}{R_2}) = -\frac{V_0(R+R_2)}{(R_0+R_1)(R+R_2)+RR_2} \tag{57}$$

$$I = -\frac{V_0 R_2}{(R_0+R_1)(R+R_2)+RR_2} \tag{58}$$

Méthode 2 : En prenant la grande maille externe du circuit, nous trouvons,

$$-i_1R_1 - IR - i_1R_0 - V_0 = 0, \tag{59}$$

$$i_1 = -\frac{V_0+IR}{R_0+R_1} \tag{60}$$

$$I = -\frac{V_0+IR}{R_0+R_1} - \frac{IR}{R_2} \tag{61}$$

$$I(1+\frac{R}{R_2}+\frac{R}{R_0+R_1}) = -\frac{V_0}{R_0+R_1} \tag{62}$$

$$I = -\frac{V_0 R_2}{(R_0+R_1)(R+R_2)+RR_2} \tag{63}$$

Maintenant que nous avons le courant I, nous pouvons calculer la puissance,

$$P = I^2 R = \frac{V_0^2 R_2^2 R}{((R_0+R_1)(R_2+R)+RR_2)^2}. \tag{64}$$

Pour trouver la résistance R qui donne une puissance maximale, nous devons résoudre $\frac{\partial P}{\partial R} = 0$:

$$\frac{\partial P}{\partial R} = \frac{V_0^2 R_2^2}{((R_0+R_1)(R_2+R)+RR_2)^2}\left[1 - \frac{2R(R_0+R_1+R_2)}{(R_0+R_1)(R_2+R)+RR_2}\right] = 0 \tag{65}$$

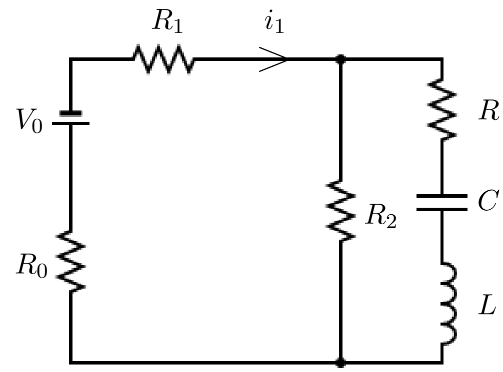
Cela nous donne :

$$R = \frac{R_0R_2+R_1R_2}{R_0+R_1+R_2}. \tag{66}$$

L'application numérique nous donne $R = 25\ \Omega$ pour une puissance maximale dissipée à travers R.

b) Dans la partie (a), nous avons trouvé que $i_1 = -\frac{V_0}{R_{eq}}$. Pour $R = 25\ \Omega$, nous avons $R_{eq} = 66.7\ \Omega$. Donc nous trouvons $i_1 = -1.5$ A.
c) Dans la partie (a), nous avons trouvé :

$$i_2 = -\frac{IR}{R_2} = -\frac{V_0 R}{(R_0+R_1)(R_2+R)+RR_2} = -0.5\ A \tag{67}$$



d) La tension à travers la résistance est : $V_R(t) = V(t) - i_1(t)(R_1 + R_0)$ et donc donc $V_R(t)$ et $V(t)$ doivent être en phase.

Le nouveau circuit est montré dans la figure ci-dessous. Nous avons maintenant que V_R trouvé précédemment est la tension totale sur la branche RLC. Donc, nous pouvons écrire $V_R(t) = I(t)Z_{tot}$, où Z_{tot} est l'impédance totale de la branche RLC.

$$Z_{tot} = Z_R + Z_C + Z_L = R + \frac{1}{i\omega C} + i\omega L. \tag{68}$$

Nous pouvons réécrire l'impédance totale comme $Z_{tot} = |Z_{tot}|e^{i\phi}$, où ϕ représente la phase pour $V_R(t)$ et donc aussi la phase relative à $V(t)$, la source de tension alternative,

$$|Z_{tot}| = \sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}, \tag{69}$$

$$\phi = \arctan\left(\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}\right). \tag{70}$$

Pour garder la même phase rélative que précédemment, nous devons trouver la valeur de L pour $\phi = 0$:

$$0 = \arctan\left(\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}\right) \rightarrow \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} = 0 \tag{71}$$

$$L = \frac{1}{\omega^2 C} = 28\ \mu\text{H} \tag{72}$$