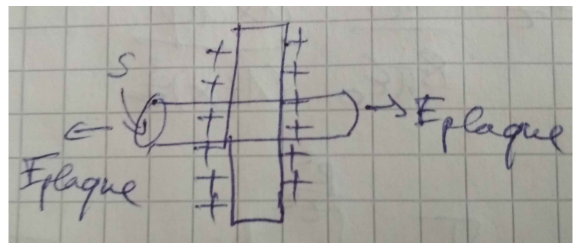
Semestre Automne (20.01.2022)

Corrigé de l'examen

Exercice 1 (20 points)

a) Principe de superposition : $\vec{E} = \vec{E}_{plan} - \vec{E}_{disque}$

Pour trouver le champ créé par le plan, on applique la loi de Gauss

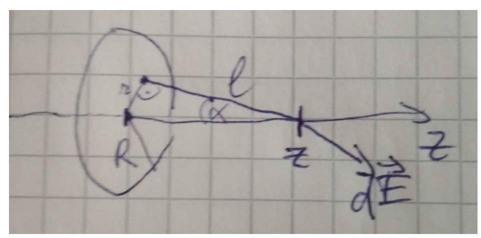


$$V_a = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \tag{1}$$

$$2E_{plan}S = \frac{\sigma_0 S}{\epsilon_0} \tag{2}$$

$$E_{plan} = \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} \tag{3}$$

Le champ créé par le disque n'est pas assez symétrique pour pouvoir facilement appliquer la loi de Gauss. Alors on décompose le disque en éléments de charge infinitésimaux dq. Chaque élément crée un champ $d\vec{E}$:



$$d\vec{E} = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 l^2} \cdot \frac{\vec{l}}{|l|} \tag{4}$$

avec $l = \sqrt{r^2 + z^2}$.

Par symétrie, on s'attend à un champ uniquement selon $\hat{e}_z$ sur l'axe du disque. Puisque les autres composantes de $\vec{E}$ vont s'annuler lors de l'intégration, on peut simplifier le calcul en ne tenant compte que de la composante E_z

$$dE_z = dE \cos\alpha = dE \cdot \frac{z}{l} \tag{5}$$

On exprime dq en coordonnées cylindriques

$$dq = \sigma_0 dS = \sigma_0 r dr d\phi \tag{6}$$

On obtient alors l'expression pour le champ infinitésimal créé par chaque point du disque

$$dE_z = \frac{\sigma_0}{4\pi\epsilon_0 z^2} \cdot \frac{r dr d\phi}{\left(1 + \frac{r^2}{z^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \tag{7}$$

Pour utiliser l'intégrale indiqué dans l'énoncé, on effectue un changement de variable

Pour utiliser l'intégrale indiqué dans l'énoncé, on effectue un changement de variable

$$x = \frac{r^2}{z^2}$$
$$dx = \frac{2r}{z^2} dr$$

$$dE_z = \frac{\sigma_0}{8\pi\epsilon_0} \cdot \frac{dx d\phi}{(1+x)^{\frac{3}{2}}} \tag{8}$$

$$E_{disque} = \int_{\phi=0}^{\phi=2\pi} \int_{r=0}^{r=R} dE_z \tag{9}$$

$$E_{disque} = 2\pi \int_{x=0}^{x=\frac{R^2}{z^2}} \frac{\sigma_0}{8\pi\epsilon_0} \cdot \frac{dx}{(1+x)^{\frac{3}{2}}} \tag{10}$$

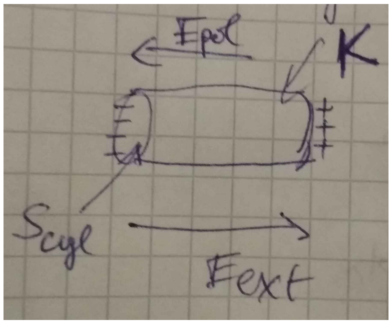
$$E_{disque} = \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}\right) \tag{11}$$

On peut finalement combiner les contributions du plan et du disque pour trouver le champ total sur l'axe z

$$E(z) = \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} \cdot \frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}} \tag{12}$$

b)

Le cylindre est immergé dans le champ (noté E_{ext}) calculé au point a), et va créer un champ électrique E_{pol} supplémentaire qui s'y oppose. Par définition de la constante diélectrique, le champ à l'intérieur du cylindre sera réduit d'un facteur K



$$E_{ext} - E_{pol} = \frac{E_{ext}}{K} \tag{13}$$

$$E_{pol} = \left(1 - \frac{1}{K}\right) E_{ext} \tag{14}$$

Ce champ de polarisation est dû à des charges liés qui apparaissent sur les faces du cylindre, avec une densité de charge σ_{pol}. E_{pol} peut donc être approximé comme le champ créé par un condensateur :

$$E_{pol} = \frac{\sigma_{pol}}{\epsilon_0} \tag{15}$$

En remplaçant le champ E_{ext} par l'expression trouvé au point a) et évalué en $z = H$, on obtient

$$\sigma_{pol} = \frac{\sigma_0 H}{2\sqrt{R^2+H^2}} \left(\frac{K-1}{K}\right) \tag{16}$$

Pour trouver la charge totale de polarisation, on multiplie σ_{pol} par l'aire de la face du cylindre $r^2\pi$:

$$Q_{pol} = \frac{\sigma_0 H r^2 \pi}{2\sqrt{R^2+H^2}} \left(\frac{K-1}{K}\right) \tag{17}$$

c)

Les charges de polarisation vont subir une force $F = qE$ dû au champ externe créé par le plan. La force totale sur le cylindre est donné par

$$F = Q_{pol} \cdot E(z = H + h) - Q_{pol} \cdot E(z = H) \tag{18}$$

$$F = Q_{pol} \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} \left(\frac{H + h}{\sqrt{R^2 + (H + h)^2}} - \frac{H}{\sqrt{R^2 + H^2}} \right) \tag{19}$$

En faisant l'approximation $H + h \approx H$ dans le dénominateur, on a

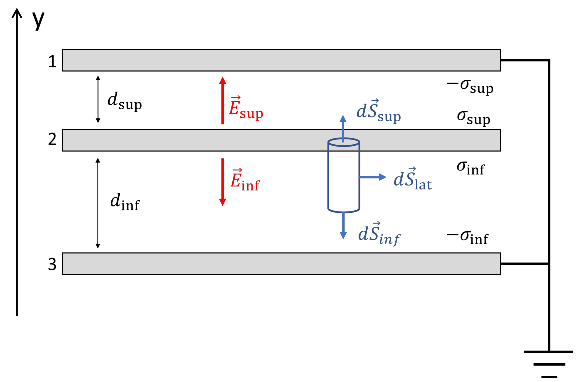
$$F \approx Q_{pol} \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} \frac{h}{\sqrt{R^2 + H^2}} \tag{20}$$

Exercice 2 (20 points)

a) La loi de Gauss nous permet de lier le champ électrique à la charge enfermée dans une surface Gaussienne fermée,

$$\phi = \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\epsilon_0}. \tag{21}$$

Considérant le cylindre bleu dans la figure, nous avons $\phi = \phi_{\text{sup}} + \phi_{\text{inf}} + \phi_{\text{lat}}$, où $\phi_{\text{sup}} = 0$ car le champ électrique à l'intérieur d'un conducteur est nul.



De plus, $\phi_{\text{lat}} = 0$ car $\vec{E}_{\text{inf}}$ et $d\vec{S}_{\text{lat}}$ sont perpendiculaires. Cela nous laisse,

$$\phi = \phi_{\text{inf}} = E_{\text{inf}} S = \frac{\sigma_{\text{inf}} S}{\epsilon_0} \tag{22}$$

Pour une densité de charge positive sur le côté inférieur de 2, nous avons un champ électrique vers le bas, $\vec{E}_{\text{inf}} = -E_{\text{inf}} \vec{e}_y$. Donc, on trouve,

$$\vec{E}_{\text{inf}} = -\frac{\sigma_{\text{inf}}}{\epsilon_0} \vec{e}_y \tag{23}$$

b) Nous pouvons trouver la différence de potentiel entre deux plaques à partir du champ électrique, $\Delta V = -Ed$, où d est la distance entre les plaques. Alors, nous avons,

$$V_3 - V_2 = -E_{\text{inf}} d_{\text{inf}}, \tag{24}$$

et,

$$V_2 - V_1 = E_{\text{sup}} d_{\text{sup}}. \tag{25}$$

De suite, de la façon que dans la partie a), nous trovons,

$$\vec{E}_{\text{sup}} = \sigma_{\text{sup}} / \epsilon_0 \vec{e}_y. \tag{26}$$

Donc, nous trouvons,

$$V_3 - V_2 = -\frac{\sigma_{\text{inf}} d_{\text{inf}}}{\epsilon_0}, \tag{27}$$

et,

$$V_2 - V_1 = \frac{\sigma_{\text{sup}} d_{\text{sup}}}{\epsilon_0}. \tag{28}$$

c) Plaques 2 et 3 sont connectées à terre et donc $V_1 = V_3 = 0$, et puis,

$$\sigma_{\text{sup}} d_{\text{sup}} = \sigma_{\text{inf}} d_{\text{inf}}. \tag{29}$$

De plus, nous savons que la charge totale de la plaque 2, Q, doit être répartie seulement sur les côtés de surface S de la plaque,

$$Q = \sigma_{\text{sup}} S + \sigma_{\text{inf}} S. \tag{30}$$

Ces deux équations servent à trouver les deux inconnus, σ_{sup} et σ_{inf},

$$\sigma_{\text{sup}} = \frac{Q}{S(1 + d_{\text{sup}}/d_{\text{inf}})} = 9 \times 10^{-6}\text{Cm}^{-2}, \tag{31}$$

et

$$\sigma_{\text{inf}} = \frac{Q}{S(1 + d_{\text{inf}}/d_{\text{sup}})} = 3 \times 10^{-6}\text{Cm}^{-2}. \tag{32}$$

Vu que $V_1 = V_3 = 0$, le potentiel V_2 est,

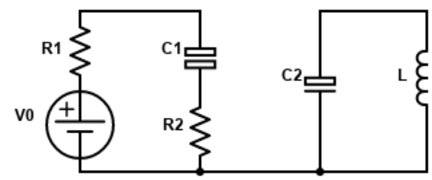
$$V_2 = \frac{\sigma_{\text{sup}} d_{\text{sup}}}{\epsilon_0} = \frac{9 \times 10^{-6} \cdot 1 \times 10^{-3}}{8.85 \times 10^{-12}} = 1.02 \times 10^3 \text{ V} \tag{33}$$

Exercice 3 (20 points)

a) Lorsque l'interrupteur passe en position B, le circuit change comme indiqué sur la figure ci-contre.
En appliquant la loi de Kirchoff au maillage de gouche on obtient :

$$V_0 - R_1 i_1 - V_{C_1} - R_2 i_1 = 0 \tag{34}$$

$$R_{eq} = R_1 + R_2 \tag{35}$$



$$V_{C_1} = V_0 - R_{eq} i_1 \tag{36}$$

Pour trouver les équations du transitoire pour t> 0 on écrit :

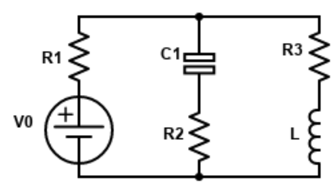
$$\frac{Q_1}{C_1} = V_0 - R_{eq}\frac{dQ}{dt} \tag{37}$$

$$\int_{Q_{C_{1_0}}}^{Q} \frac{dQ}{CV_0 - Q} = \frac{1}{RC}\int_0^t dt \tag{38}$$

D'où l'on trouve :

$$V_{C_1} = V_0 + e^{-\frac{t}{RC}}\left(V_{C_{1_0}} - V_0\right) \tag{39}$$

Il est donc nécessaire de connaître l'état initial du condensateur. Avant que l'interrupteur ne soit déplacé sur B, le système était dans un état stationnaire et le circuit peut être représenté comme sur la figure ci-contre. Le condensateur C_1 est complètement chargé donc aucun courant ne circulera dans la résistance R_2.



En appliquant la loi de Kirchoff au maillage de gouche on obtient :

$$V_{C_{1_0}} = V_0 - i_{1_0} R_1 \tag{40}$$

Pour calculer i_{1_0} nous appliquons la loi de Kirchhoff au maillage extérieur.

$$V_0 = i_{1_0}(R_1 + R_3) \tag{41}$$

Donc :

$$i_{1_0} = \frac{V_0}{R_1 + R_3} = \frac{200}{20 + 30} = 4A \tag{42}$$

$$V_{C_{1_0}} = V_0 - i_{1_0} R_1 = 200 - 4 \cdot 20 = 120V \tag{43}$$

L'indice "0" de i_{1_0} et $V_{C_{1_0}}$ indique que nous nous référons aux conditions stationnaires correspondant au moment $t = 0$.
Nous pouvons maintenant appliquer l'équation (39) :

$$V_{C_1} = 200 + e^{-\frac{t}{625 \cdot 10^{-4}}}(120 - 200) = 200 - 80e^{-\frac{t}{625 \cdot 10^{-4}}} V \tag{44}$$

b) Pour t > 0, la boucle droite du circuit correspond à un circuit LC.
Le condensateur C_2 va commencer à se charger et par la suite le courant va osciller entre les deux composants suivant la loi :

$$i_L(t) = I_0 cos(\omega t + \phi) \tag{45}$$

Les valeurs de I_0 et ϕ sont déterminées en connaissant les conditions initiales. Alors que $i = \frac{dQ}{dt}$ la charge dans le condensateur suivra évidemment la loi :

$$Q_{C_2}(t) = \frac{I_0}{\omega} sin(\omega t + \phi) = Q_0 sin(\omega t + \phi) \tag{46}$$

A $t = 0$, C_2 est complètement déchargé donc :

$$Q_{C_2}(t = 0) = Q_0 sin(\phi) = 0 \tag{47}$$

Donc :

$$\phi = 0 \tag{48}$$

A l'instant t = 0 le courant circulant dans l'inductance L correspond à i_{1_0} calculé dans l'équation (42).

$$i_L(t = 0) = I_0 cos(0) = i_{1_0} \tag{49}$$

Donc :

$$I_0 = 4A \tag{50}$$

Et enfin :

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC_2}} = \sqrt{\frac{1}{160 \cdot 10^{-3} \cdot 625 \cdot 10^{-6}}} = 100 rad/s \tag{51}$$

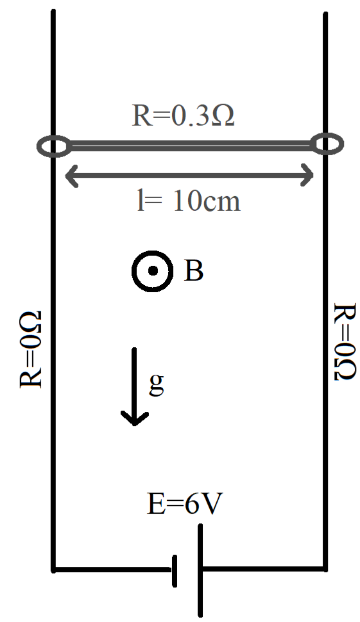
$$i_L(t) = 4cos(100t)A \tag{52}$$

c) Le temps nécessaire à l'énergie magnétique accumulée dans l'inducteur pour passer de la valeur maximale $(t = 0)$ à zéro est égal au quart de la période d'oscillation T.

$$\Delta t = \frac{T}{4} = \frac{1}{4f} = \frac{2\pi}{4\omega} = \frac{2\pi}{400} = 0,016s \tag{53}$$

Exercice 4 (20 points)

a) Since the conducting bar is connected to the battery, there is a current flowing through it $I_0 = \mathcal{E}/R$, which given the image is flowing from right to left. That in turn means that the Lorentz force is acting on the bar $\vec{F} = \vec{I}l\vec{B}$ and is directed upwards. The only other force acting on the bar is gravity.
If the bar is in a state of balance, it means that both its velocity $\dot{z}$ and acceleration $\ddot{z}$ are zero. That means the force balance can be written as :



$$0 = -mg + \frac{\mathcal{E}lB}{R} \tag{54}$$

And the value of magnetic field required to balance the bar is $B = mgR/(\mathcal{E}l) = 0.1225T$.
b) In a more general case, the bar might be moving along the direction z. That means that we can write the equation of motion as :

$$m\ddot{z(t)} = -mg + I(t)lB; \tag{55}$$

Initially at $t = 0$ the bar is not moving, so $I = I_0$. However, once it starts moving, the area encircled by the circuit will start changing, meaning the magnetic flux through it will start changing too. That means, that due to Faraday's law of induction, an additional voltage $\mathcal{E}_B = -\frac{\partial \Phi_B}{\partial t}$ is induced. Since the magnetic field is constant, the change of the flux is directly connected to the change of the area encircled but the circuit :

$$\mathcal{E}_B = -\frac{\partial \Phi_B}{\partial t} = -B\frac{\partial A}{\partial t} = -B\frac{\partial lz}{\partial t} = -lB\dot{z}; \tag{56}$$

This induced e.m.f. acts in a way to compensate for the change of magnetic flux. This means that the total current running through the circuit is given by the formula $I = I_0 - \frac{lB\dot{z}}{R}$.
Finally, we can write the total equation of motion :

$$m\ddot{z} = -mg + \frac{\mathcal{E}lB}{R} - \frac{l^2B^2\dot{z}}{R}; \tag{57}$$

c) To find the behavior of the bar, we would in principle need to solve equation (57), which can be done by integrating it once in time and then solving homogeneous part of it. However, since we only want to find the terminal velocity at infinite time, we can just consider the situation when acceleration of the bar becomes zero $\ddot{z} = 0$. In such a case, equation (57) gives us :
Finally, we can write the total equation of motion :

$$0 = -mg + \frac{\mathcal{E}lB}{R} - \frac{l^2B^2\dot{z}}{R}; \tag{58}$$

And we can find the terminal velocity $\dot{z}$:

$$\dot{z} = \frac{\mathcal{E}lB - mgR}{l^2B^2} = \frac{6*0.1*0.8 - 9.8*0.025*0.3}{0.1^2 0.8^2} = \frac{0.48 - 0.0735}{0.0064} = 63.52\frac{m}{s}; \tag{36}$$

From this expression we can confirm that condition given in b) results in the bar being stationary. Since the magnetic field is stronger than this "critical" value, it overpowers gravity and the bar ends up flying upwards with a velocity of $63.52 m/s$.

Exercice 5 (20 points)

a) L'onde se propage selon z. La vitesse de propagation est $u = \frac{c}{n} = \frac{c}{\sqrt{K_{air}}} \approx c = 3\times 10^8$ m/s, et la longeur d'onde est $\lambda = u/f \approx 0.3$ m.

b) Le champ magnétique de l'onde satisfait l'équation de Faraday $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\nabla \times \vec{E} = \frac{\partial E_y}{\partial z}\vec{e}_x - \frac{\partial E_x}{\partial z}\vec{e}_y$. Donc on trouve que $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -E_0 k \sin{(kz - \omega t)}\vec{e}_x + E_0 k \cos{(kz - \omega t)}\vec{e}_y$. En intégrant une fois dans le temps, on trouve $\vec{B} = -B_0 \cos{(kz - \omega t)}\vec{e}_x - B_0 \sin{(kz - \omega t)}\vec{e}_y$, avec $B_0 = E_0 k/\omega = E_0/c$.

c) L'intensité d'une onde électromagnétique est donnée par $I = \langle|\vec{S}|\rangle$, où $\vec{S} = \vec{E}\times\vec{B}/\mu_0$ est le vecteur de Poynting, qui n'a qu'une composante selon z. Alors, $S_z = (E_x B_y - E_y B_x)/\mu_0 = E_0 B_0 (\sin^2{(kz - \omega t)} + \cos^2{(kz - \omega t)})/\mu_0 = E_0 B_0/\mu_0$ qui est constant dans le temps, et donc $I = c\epsilon_0 E_0^2$. Finalement, on trouve $E_0 = \sqrt{I/c\epsilon_0} \approx 1.372$ V/m. On en déduit alors que $B_0 = E_0/c \approx 4.574$ nT.

d) La lame agit comme un miroir parfait et donc la pression de radiation est $p = 2I/c$. La force sur la surface (100 m^2) de la lame est donc $F = pA = 2I \times 100/c \approx 3.33$ nN (force ridicule).

e) La position du premier maximum après le pic d'intensité est tel que $kD\sin{(\theta)}/2 \approx 3\pi/2$, avec $\sin\theta \approx L/H$, et donc $H = 2DL/3\lambda$. Alors, $H = 2\times 1\times 3/(3\times 0.3) = 6.6$ m. Noter que techniquement la valeur de $u = kD\sin{(\theta)}/2$ au pic est donnée par la solution de l'équation $(\frac{\sin^2(u)}{u^2})' = 0$, ce qui donne $\tan(u) = u$ et donc $u \approx 4.5$ ce qui est proche de $3\pi/2 \approx 4.7$.