Semestre Automne (25.01.2021)

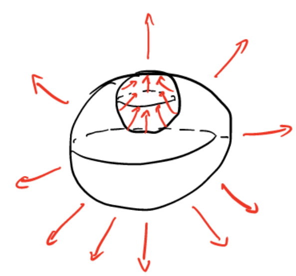
Corrigé de l'examen

Exercice 1 (20 points)

a) On déssine les lignes de champ de manière qualitative. On distingue les propriétés suivantes :

Extérieur de la grande sphère :

- Lignes de champ radiales dirigés vers l'extérieur.
- La densité des lignes est plus petite du côté de la cavité.



Intérieur de la cavité :

- Le champ pointe vers le haut sur l'axe central.
- Ailleurs, le champ est incliné vers le haut et vers l'axe central.

b) On peut utiliser le principe de superposition pour décomposer le système en deux sphères remplies. On a une sphère de rayon $2R$ et de densité de charge ρ centrée en (0,0,0) et une deuxième sphère de rayon R, densité de charge $-\rho$ centrée en (0,R,0).

On utilise la loi de Gauss pour trouver le champ électrique créé par chacune des sphères :

$$\int_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_S}{\epsilon_0} \tag{1}$$

avec S la surface de Gauss qu'on devra choisir nous-même, et Q_S la quantité de charge qui se trouve à l'intérieur de S. Ici, on applique la loi de Gauss à une sphère avec une densité de charge volumique uniforme. L'idée est de prendre une surface de Gauss sphérique et de rayon r variable, ce qui nous permettra de trouver le champ électrique pour n'importe quel r.

Par symétrie, le champ électrique créé par chacune des sphères pointe dans la direction radiale et sa norme sera constante sur la surface de Gauss S. On a donc :

$$\int_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = E(r) \cdot 4\pi r^2 \tag{2}$$

On doit maintenant calculer Q_S. Comme chaque sphère a une densité de charge volumique uniforme, la charge dans S ne dépendra que du volume contenu dans S, et donc du rayon r qu'on choisit. Pour la grande sphère,

$$Q_S(r) = \rho \frac{4}{3} \pi r^3 \tag{3}$$

et pour petite sphère,

$$Q_S(r') = -\rho\frac{4}{3}\pi r'^3 \tag{4}$$

où r' est la distance à un point mesurée depuis le centre de la petite sphère, en $(0, R, 0)$.

Finalement, les champs $\vec{E}_1$ et $\vec{E}_2$ crées par la grande et petite sphère, respectivement, sont

$$\vec{E}_1(r) = +\frac{\rho r}{3\epsilon_0}\hat{r} \tag{5}$$

$$E_2(r') = -\frac{\rho r'}{3\epsilon_0}\hat{r}' \tag{6}$$

où $\hat{r}$ et $\hat{r}'$ sont les vecteurs unitaires radiaux pour chacune des sphères.

Sur l'axe y, le champ doit par symétrie être entièrement selon y, donc on évalue et ajoute simplement les champs aux 3 points donnés, en faisant attention au signe de chaque contribution :

— (0,0,0), $\quad r = 0$, $\quad r' = R,\ \hat{r}' \cdot \hat{y} = -1$, $\quad E_y = +\frac{\rho R}{3\epsilon_0}\hat{y}$

— (0,R,0), $\quad r = R, \quad r' = 0,\ \hat{r} \cdot \hat{y} = +1$, $\quad E_y = +\frac{\rho R}{3\epsilon_0}\hat{y}$

— (0,2R,0), $\quad r = 2R, \quad r' = R,\ \hat{r} \cdot \hat{y} = +1$, $\hat{r}' \cdot \hat{y} = +1$, $\quad E_y = +\frac{\rho R}{3\epsilon_0}\hat{y}$

Application numérique :

— $\frac{\rho R}{3\epsilon_0} = 0.6$ V/m

c) La force à laquelle est sujette une charge $q_0 = -30e$, placée au centre de la cavité, est :

— $\vec{F} = q_0\vec{E}$

— $|F| = 30e\frac{\rho R}{3\epsilon_0} = 2.88 \cdot 10^{-18}$ N

d) La direction de cette force est vers le bas, selon $-\hat{y}$.

Exercice 2 (20 points)

a) On commence par l'évaluation de la tension à travers les résistances pour calculer V_a,

$$V - V_a = R_1 i, \tag{7}$$

$$V_a - 0 = R_2 i. \tag{8}$$

Avec ces deux équations, on peut trouver le courant qui passe à travers les résistances, qui est le même car elles sont en série,

$$i = \frac{V}{R_1 + R_2} = 1.5 \text{ A}. \tag{9}$$

Donc on trouve $V_a = 4.5$ V .

Maintenant, on doit considérer la tension autour des condensateurs pour trouver V_b (même si le courant à travers les condensateurs est nul avec S ouvert),

$$V - V_b = \frac{Q_1}{C_1}, \tag{10}$$

$$V_b - 0 = \frac{Q_2}{C_2}. \tag{11}$$

Vu que les condensateurs sont en série, ils auront la même charge, donc $Q_1 = Q_2 = Q$, et on trouve donc, en combinant ces deux équations,

$$V_b = \frac{C_1}{C_1 + C_2} V \tag{12}$$

Ce qui donne $V_b = 12$V.

Cela nous donne une différence de potentiel $V_b - V_a = 7.5$V avec $V_b > V_a$.

b) Quand S est fermé, on a que $V_a = V_b$ toujours. A $t = 0$, la charge dans les condensateurs est la même que quand S était ouvert, alors V_b ne change pas, et puis $V_a = V_b = 12$V. Puis, un courant commence à passer à travers les condensateurs et la charge sur chaque condensateur commence à changer. Après un long temps, à $t = \infty$, il n'aura plus de courant à travers les condensateurs de nouveau, et puis on aura $V_a = 4.5$V, comme quand S était ouvert. Puis, vu que $V_b = V_a$ toujours, on aura $V_b = 4.5$V.

c) On veut trouver le temps charactéristique pour la rééquilibration de la charge entre les deux branches, τ.

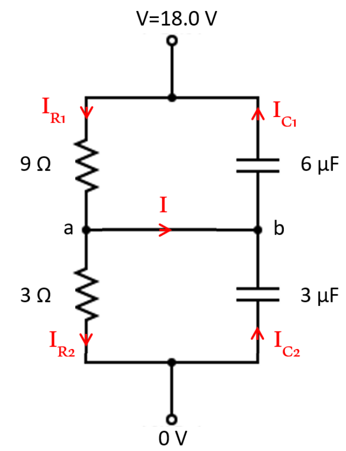
On doit premièrement trouver l'équation qui décrit la dynamique de ce système, et pour cela on utilise la loi de Kirchhoff. On défini les courants entre chaque noeud comme dans la figure, et puis on écrit de la loi de Kirchhoff,

$$i_{R1} = i_{R2} + I \tag{13}$$

$$i_{C1} + I = i_{C2} \tag{14}$$

et donc

$$i_{R1} = i_{R2} + i_{C2} - i_{C1}. \tag{15}$$



Puis, en se servant de $V_a = V_b \equiv U(t)$, on trouve,

$$\frac{(V - U(t))}{R_1} = \frac{U(t)}{R_2} + C_2 \frac{dV_{C_2}}{dt} - C_1 \frac{dV_{C_1}}{dt}, \tag{16}$$

où V_{C_1} et V_{C_2} sont le tensions aux bornes de chaque condensateur : $V_{C_1} = V - U$ et $V_{C_2} = U$.

$$\frac{(V - U(t))}{R_1} = \frac{U(t)}{R_2} + C_2 \frac{dU(t)}{dt} + C_1 \frac{dU(t)}{dt}. \tag{17}$$

$$(C_1 + C_2) \frac{dU}{dt} = \frac{V}{R_1} - \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) U \tag{18}$$

On peut récrire cela comme,

$$\frac{dU}{dt} = \frac{V}{R_1(C_1 + C_2)} - \frac{U}{\tau} \tag{19}$$

où on identifie

$$\tau = R_{\text{eff}} C_{\text{eff}} = \frac{C_1 + C_2}{1/R_1 + 1/R_2} = 20.25\mu s \tag{20}$$

Exercice 3 (points)

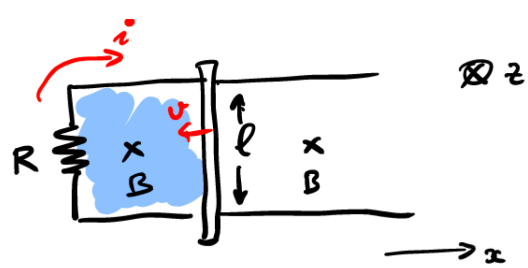
a) Tout d'abord on exprime le flux magnétique à travers le circuit,

$$\Phi_B = \int \vec{B} \cdot \vec{ds} = lBx \tag{21}$$

si on appelle x la position de la barre selon l'axe horizontal avec $x = 0$ la position de la résistance. Si la barre bouge vers la gauche, donc si elle a une vitesse $v_x < 0$, alors la variation de ce flux est

$$\frac{d\Phi_B}{dt} = Bv_x l < 0 \tag{22}$$

et donc la force électromotrice induite dans le circuit est $\mathcal{E} > 0$, ce qui va induire un courant i dans le sens horaire (dessin).



b) La puissance instantanée est $P = \frac{\mathcal{E}^2}{R}$, et donc la puissance moyenne est, en utilisant les résultats du point (a),

$$\langle P \rangle = \frac{\langle \mathcal{E}^2 \rangle}{R} = \frac{B^2 l^2 \langle v_x^2 \rangle}{R} = \frac{B^2 l^2 v_{\text{rms}}^2}{R} \tag{23}$$

On résoud pour la résistance,

$$R = \frac{B^2 l^2 v_{\text{rms}}^2}{\langle P \rangle} \approx 0.29\ \Omega \tag{24}$$

c) La vitesse de la barre oscille de manière périodique, donc on peut écrire

$$v(t) = v_0 \cos(\omega t) \tag{25}$$

avec $v_{\text{rms}} = \sqrt{\langle v^2 \rangle} = \frac{v_0}{\sqrt{2}}$, donc $v_0 = \sqrt{2} v_{\text{rms}}$. De manière similaire, en intégrant la vitesse, on trouve la position de la barre, qui elle aussi oscille de manière périodique, avec la même fréquence,

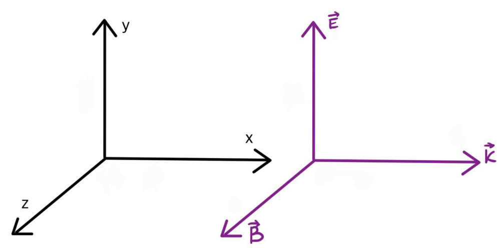
$$x(t) = \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t) = x_{\max} \sin(\omega t) \tag{26}$$

et l'excursion totale est $2x_{\max} = 0.6$, donc la fréquence est donnée par

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{v_0}{2\pi x_{\max}} = \frac{\sqrt{2} v_{\text{rms}}}{2\pi x_{\max}} \approx 2.2\ Hz \tag{27}$$

Exercice 4 (20 points)

- L'onde électromagnétique, et donc les champs électriques et magnétiques, se propage le long de l'axe x.
- Puisque l'onde est polarisée dans la direction de l'axe y, le champ électrique n'a que la composante E_y.



- La perturbation du champ magnétique se produit donc dans la direction z : il a seulement la composante B_z.
- La fonction qui décrit ce type d'onde électromagnétique est donc

$$E(x,t) = E_y(x,t) = E_0 cos(kx - \omega t) \tag{28}$$
$$B(x,t) = B_z(x,t) = B_0 cos(kx - \omega t) \tag{29}$$

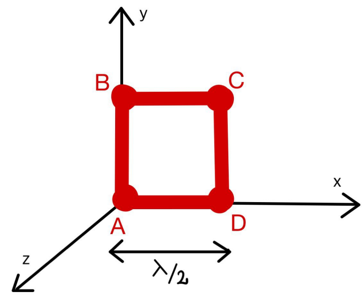
avec $E_0/B_0 = c$, $k = 2\pi/\lambda$.

a) Maintenant, on considère l'effet du champ électrique de l'onde sur le circuit.

— La force électromotrice générée dans le circuit par le champ électrique est :

$$\varepsilon_E = \oint_C E_y(x,t)\vec{e_y} \cdot \vec{dl} \tag{30}$$

avec C le contour de le circuit.



— Cette intégrale est égale à zéro dans les segments de circuit parallèles à l'axe x, car $E_y\vec{e_y} \cdot \vec{dl} = 0$.

— On a donc :

$$\begin{aligned}
\varepsilon_E &= \varepsilon_{E_{AB}} + \varepsilon_{E_{CD}} \quad \textit{(voir le dessin)} && (31)\\
&= E_0 cos(-\omega t)\int_A^B dy \quad + \quad E_0 cos(\frac{2\pi}{\lambda}\frac{\lambda}{2} - \omega t)\int_C^D dy && (32)\\
&= E_0\frac{\lambda}{2}cos(\omega t) + E_0\frac{\lambda}{2}cos(\omega t) && (33)\\
&= E_0\lambda cos(\omega t) && (34)
\end{aligned}$$

b) Maintenant, on considère l'effet du champ magnétique de l'onde sur le circuit.

— La force électromotrice générée dans le circuit par le champ magnétique est :

$$\varepsilon_B = -\frac{d\Phi_B}{dt} \tag{35}$$

— Le flux magnétique est :

$$\Phi_B = \int_S B_z(x,t)\vec{e_z} \cdot \vec{n} dS \tag{36}$$

avec S la surface du circuit, délimitée par le contour C, et $\vec{n}$ le vecteur unitaire normal à la surface élémentaire dS et orienté selon la règle de la main droite.

— Dans ce cas, en considérant la circulation dans le sens ABCD, $\vec{n}dS = -dxdy\vec{e_z}$

$$\Phi_B = -\frac{\lambda}{2}\int_0^{\frac{\lambda}{2}} B_0 cos(kx - \omega t)dx \tag{37}$$

et donc

$$\begin{aligned}
\Phi_B &= -\frac{\lambda}{2}\frac{B_0}{k}(sin(k\frac{\lambda}{2} - \omega t) - sin(-\omega t)) && (38)\\
&= -\frac{\lambda}{2}\frac{B_0}{k}(sin(\pi - \omega t) + sin(\omega t)) && (39)\\
&= -\lambda\frac{B_0}{k}sin(\omega t) && (40)
\end{aligned}$$

— Finalement, la f.é.m est donnée par

$$\varepsilon_B = \lambda \frac{B_0}{k} \omega cos(\omega t) \tag{41}$$
$$= \lambda c B_0 cos(\omega t) \tag{42}$$
$$= \lambda E_0 cos(\omega t) \tag{43}$$

c) Les champs électriques et magnétiques sont liés entre eux. En particulier, par la loi de Faraday la force force électromotrice induite $\varepsilon_E = \varepsilon_B$, puisque

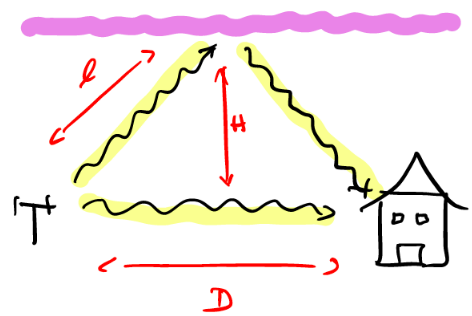
$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\vec{\nabla} \times \vec{E} \tag{44}$$

où de manière plus évidente en forme intégrale,

$$\oint_C \vec{E} \cdot \vec{dl} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot \vec{n} dS \tag{45}$$

Exercice 5 (20 points)

a) Le signal peut être réduit à cause du phénomène d'interférence : si les deux ondes (directe et réfléchie) se superposent de manière destructive alors le signal est localement annulé. Ceci requiert un déphasage particulier.



b) Pour avoir interférence destructive maximale, il faut que (voir dessin ci-dessus)

$$2l - D = \frac{\lambda}{2} \tag{46}$$

avec $l = \sqrt{H^2 + D^2/4}$ et $\lambda = c/f$ où f est la fréquence de l'onde. On résoud pour H et on trouve :

$$H = \frac{1}{2}\sqrt{\lambda D + \lambda^2/4} \tag{47}$$

On a donc, avec $lambda \approx 350$ m, une valeur pour la hauteur minimale de la ionosphère de $H \approx 1.622$ km.

c) Maintenant, en supposant des interférences constructives, on pourrait avoir un champ magnétique maximal $|B| = B_{0,1} + B_{0,2}$, i.e. la somme des amplitudes des champs de chacune des deux ondes (directe et réfléchie). Pour calculer ces amplitudes, on utilise la relation entre la puissance d'émission P_0 (connue) et l'intensité I d'une onde à une certaine distance,

$$I = \frac{P_0}{4\pi R^2} \tag{48}$$

ainsi que la relation entre l'intensité I, qui est la valeur moyenne temporelle du vecteur de Poynting, et l'amplitude du champ de l'onde,

$$I = \langle S \rangle = \frac{1}{2}\epsilon_0 c E_0^2 \tag{49}$$

ce qui nous donne, en utilisant $E_0 = cB_0$,

$$\frac{P_0}{4\pi R^2} = \frac{1}{2}\epsilon_0 c^3 B_0^2 \tag{50}$$

et donc une amplitude de champ magnétique

$$B_0 = \sqrt{\frac{2P_0}{\epsilon_0 c^3 4\pi R^2}} \tag{51}$$

Pour l'onde directe, on a $R = D$, et pour l'onde réfléchie, on a $R = 2l$, avec cette fois-ci la condition d'interférence constructive,

$$2l - D = \lambda \tag{52}$$

et donc $2l = D + \lambda$. Finalement, on trouve donc, pour le maximum théorique du champ magnétique total,

$$|B_{\max}| = \sqrt{\frac{2P_0}{\epsilon_0 c^3 4\pi}}\left(\frac{1}{D} + \frac{1}{D+\lambda}\right) \tag{53}$$

L'application numérique donne environ $|B_{\max}| \approx 1.76 \times 10^{-10}$ T.