Corrigé de l'examen de Physique Générale III, sections CGC/SV du 18 Janvier 2018.

Exercice 1

Il faut utiliser le principe de superposition du champ électrique pour calculer le champ électrique total. On considère ce système comme composé d'une distribution de charge homogène infinie pour tout l'espace entre les plans $z = -R$ et $z = +R$ et d'une distribution cylindrique de rayon R uniformément chargée de densité $\rho_{cyl} = -\rho$.

a) Champ électrique de la distribution pour $|z| > R$.

a.1) Champ électrique de la distribution homogène plane et infinie pour $|z| > R$. On peut considérer, à cause de la symétrie de la distribution, que toute la charge est concentrée dans un plan $z = 0$ avec une densité de charge superficielle $\sigma = \rho \cdot 2R$. Alors en appliquant la loi de Gauss, on trouve que le champ électrique a seulement une composante en direction z et ne dépend pas de la coordonnée z :

$$\vec{E} = \left\{0,0, \pm \frac{\sigma}{2\varepsilon_o}\right\} = \left\{0,0, \pm \frac{\rho R}{\varepsilon_o}\right\}$$

Le signe + pour $z > R$ et le signe – pour $z < -R$.

a.2 Champ électrique de la distribution cylindrique de charge homogène $\rho_{cyl} = -\rho$ et de rayon R. Nous appliquons la loi de Gauss pour un distribution cylindrique de longueur infinie et cherchons le champ à la distance $r = \sqrt{y^2 + z^2} > R$.

$$E(r) \cdot h \cdot 2\pi r = \frac{\rho_{cyl} \cdot h \cdot \pi R^2}{\varepsilon_o}$$

(où h est la longueur du bout de cylindre que nous considérons pour appliquer la loi de Gauss) et obtenons :

$$E(r) = \frac{\rho_{cyl} \cdot R^2}{2\varepsilon_o r} = \frac{-\rho \cdot R^2}{2\varepsilon_o r} = \frac{-\rho \cdot R^2}{2\varepsilon_o \sqrt{y^2 + z^2}}$$

En composantes cartésiennes on aura :

$$\vec{E} = \left\{0, \frac{-\rho \cdot R^2}{2\varepsilon_o r}\frac{y}{r}, \frac{-\rho \cdot R^2}{2\varepsilon_o r}\frac{z}{r}\right\} = \left\{0, \frac{-\rho \cdot R^2 y}{2\varepsilon_o (y^2 + z^2)}, \frac{-\rho \cdot R^2 z}{2\varepsilon_o (y^2 + z^2)}\right\}$$

où $\frac{y}{r} = \cos\theta$ et $\frac{z}{r} = \sin\theta$, les projections du vecteur du champ électrique sur les axes y et z.

Le champ électrique total sera la superposition des deux contributions :

$$\vec{E}_{tot} = \left\{0,0, \pm\frac{\rho R}{\varepsilon_o}\right\} + \left\{0, \frac{-\rho \cdot R^2 y}{2\varepsilon_o (y^2 + z^2)}, \frac{-\rho \cdot R^2 z}{2\varepsilon_o (y^2 + z^2)}\right\}$$

ce qui donne :

$$\vec{E}_{tot} = \left\{0, \frac{-\rho \cdot R^2 y}{2\varepsilon_o (y^2 + z^2)}, \pm\frac{\rho R}{\varepsilon_o}\frac{-\rho \cdot R^2 z}{2\varepsilon_o (y^2 + z^2)}\right\}$$

et à nouveau le signe + est pour $z > R$ et le signe – pour $z < -R$.

b) Calcul du champ électrique à l'intérieur du « trou » cylindrique, c'est à dire pour $\sqrt{y^2 + z^2} < R$.

b.1) Calcule du champ électrique généré par la distribution plane et infinie pour $|z| < R$. Pour ce faire on divise cette distribution en couches d'épaisseur dz avec la densité de charge superficielle $\sigma = \rho dz$. Cette distribution génère un champ électrique qui a seulement la composante z différente de zéro et qui dépend de z de la manière suivante :

$$E_z = \int_{-R}^{z} \frac{\rho}{2\varepsilon_o} dz - \int_{z}^{+R} \frac{\rho}{2\varepsilon_o} dz$$

Après intégration on obtient :

$$E_z = \frac{\rho}{2\varepsilon_o}[(z + R) - (R - z)] = \frac{\rho z}{\varepsilon_o}$$

En coordonnées cartésiennes :

$$\vec{E} = \left\{0,0, \frac{\rho z}{\varepsilon_o}\right\}$$

b.2) Calcule du champ électrique généré par la distribution cylindrique pour $\sqrt{y^2+z^2} < R$. On applique la loi de Gauss pour l'intérieur du cylindre :

$$E(r) \cdot h \cdot 2\pi r = \frac{\rho_{cyl} \cdot h \cdot \pi r^2}{\varepsilon_o}$$

et obtenons à la distance $r = \sqrt{y^2+z^2}$

$$E(r) = \frac{\rho_{cyl} r}{2\varepsilon_o} = \frac{-\rho r}{2\varepsilon_o}$$

En composantes cartésiennes et après projections sur les axes y et z :

$$\vec{E} = \left\{0, \frac{-\rho y}{2\varepsilon_o}, \frac{-\rho z}{2\varepsilon_o}\right\}$$

le champ électrique total sera donc :

$$\vec{E} = \left\{0, \frac{-\rho y}{2\varepsilon_o}, \frac{\rho z}{\varepsilon_o} - \frac{\rho z}{2\varepsilon_o}\right\} = \left\{0, \frac{-\rho y}{2\varepsilon_o}, \frac{\rho z}{2\varepsilon_o}\right\}$$

L'amplitude du champ électrique :

$$\left|\vec{E}\right| = \frac{\rho}{2\varepsilon_o}\sqrt{y^2+z^2}$$

Exercice 2

a) Le champ magnétique créé par le courant $I(t)$ à la distance x vaut :

$$B(x,t) = \frac{\mu_o I(t)}{2\pi x}$$

Donc le flux magnétique qui traverse le cadre métallique vaut :

$$\Phi(t) = L \int_{x_o}^{x_o+W} \frac{\boldsymbol{\mu_o I(t)}}{\boldsymbol{2\pi x}} dx = \frac{L\boldsymbol{\mu_o I(t)}}{\boldsymbol{2\pi}} \ln\left(1 + \frac{W}{x_o}\right)$$

b) Pour déterminer la fonction $\boldsymbol{I(t)}$ du courant on considère le courant I_{ind}

est constant et que donc :

$$V_{ind} = -\frac{\mathrm{d}\Phi(t)}{dt}$$

et si la résistance du cadre vaut R, le courant induit sera :

$$I_{ind} = -\frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}\Phi(t)}{dt} = \frac{L\mu_o}{2\pi R}\ln\,(1+\frac{W}{x_o})\frac{dI(t)}{dt}$$

Nous négligeons le signe – car il n'a pas d'importance ici.
Ceci implique que si

$$\frac{\mathrm{d}\Phi(t)}{dt} = constante$$

alors

$$\frac{\mathrm{dI}(t)}{dt} = constante = a$$

Avec l'information que $\mathrm{I}(t)$ diminue dans le temps, l'équation différentielle précédente pour $\mathrm{I}(t)$ nous donne :

$$\mathrm{I}(t) = I(0) - a \cdot t$$

On obtient :

$$I_{ind} = \frac{L\mu_o}{2\pi R}\ln\,(1+\frac{W}{x_o})a$$

ou

$$a = \frac{2\pi R I_{ind}}{L\mu_o \ln\,(1+\frac{W}{x_o})}$$

et donc :

$$\mathrm{I}(t) = I(0) - \frac{2\pi R I_{ind}}{L\mu_o \ln\,(1+\frac{W}{x_o})} \cdot t$$

La résistance du cadre vaut :

$$R = \frac{\rho 2(W + L)}{\pi(d/2)^2} = 2.16\ \Omega$$

et donc a $= 2158.6\ A/s$

c) Pour $t = 50\ ms$ le courant dans le fil infini sera :

$$\mathrm{I}(t) = 200\ A - 2158.6 \cdot 50 \cdot 10^{-3} A = 92\ A$$

d) L'énergie dissipée dans le cadre est donnée par la puissance instantanée fois le temps car la puissance dissipée est constante :

$$\mathrm{W} = \mathrm{P} \cdot t$$

$$\mathrm{P} = V_{ind} \cdot I_{ind} = R I_{ind}^2$$

$$\mathrm{W} = R I_{ind}^2 \cdot t = 2.43\ 10^{-9}\ J = 2.43\ nJ$$

Exercice 3.

a) Nous calculons d'abord la situation stationnaire avant l'ouverture de l'interrupteur. La résistance totale vaut:

$$R_{tot} = R_1 + \frac{R_2\, R_3}{R_2 + R_3} = 22\ \Omega$$

ce qui nous donne un courant total de:

$$I_{tot} = \frac{V_o}{R_{tot}} = 2\ A$$

Par conséquence le potentiel qui est appliqué aux résistances $R_2\ et\ R_3$ vaut:

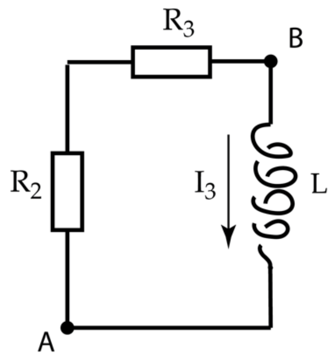
$$V_1 = V_o - R_1 I_{tot} = 24\ V$$

Le courant I_3 avant l'ouverture de l'interrupteur vaut:

$$I_3^o = \frac{V_1}{R_3} = 0.8\ A$$

Ce courant sera la valeur initiale de courant $I_3(0)$ après l'ouverture de l'interrupteur.

b) L'évolution du courant est donnée par la deuxième loi de Kirchhoff appliquée à la maille formée par les résistances R_2 *et* R_3 et la bobine L. Cette loi nous donne, si le courant circule en sens horaire dans la maille :



$$(V_B - V_A) + (V_A - V_B) = 0$$

$$-(R_2 + R_3)I_3(t) - L\frac{dI_3(t)}{dt} = 0$$

dont la solution avec la condition initiale $I_3(0) = I_3^o$ vaut :

$$I_3(t) = I_3^o \, e^{(-(R_2+R_3)t/L)}$$

L'application numérique donne pour $t = 40\ ms$ $I_3(t = 40\ ms) = 0.294\ A$.