Corrigé d'exam de physique générale III

02 février 2017 **Sections:** SV/CH

Exercice 1.

(A) Pour z<0 ; Nous savons qu'un plan infini chargé uniformément avec une densité superficielle de charge σ crée à une distance arbitraire z entre ce plan et le point d'observation un champ électrique $E=-\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$ (point d'observation se trouve au-dessous du plan). Dans le cas ici considéré, la densité de charge superficielle vaut : $\sigma(z)=\rho(z)dz=\rho_0\exp(-az)dz$

Donc pour un point arbitraire $z_0<0$ nous obtenons par intégration :

$$E_z=-\int_0^\infty \frac{1}{2\varepsilon_0}\rho_0\exp(-az)dz=-\frac{\rho_0}{2\varepsilon_0 a}$$

Et par symétrie, $E_x=E_y=0$.

(B) Pour un point $z_o>0$, nous devons diviser l'intégration en deux parties car la contribution au champ électrique total de la distribution de charge qui se trouve en dessus du plan $z>z_o$ est négative tandis que la distribution de charge en dessous de $0<z<z_o$ contribue avec un camp électrique positif.
Pour $z>z_0$:

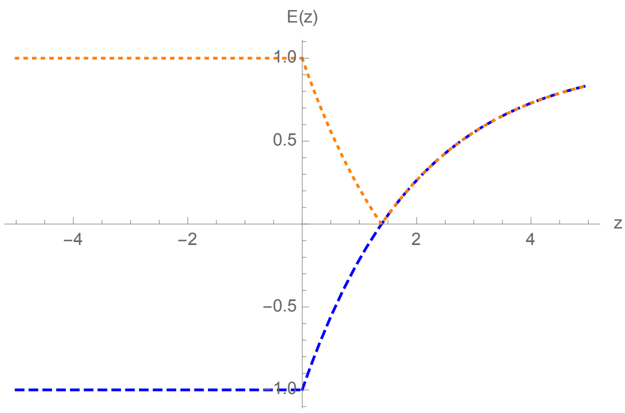
$$E_1=-\int_{z_0}^\infty \frac{1}{2\varepsilon_0}\rho_0\exp(-az)dz=-\frac{\rho_0}{2\varepsilon_0 a}\exp(-az_0)$$

tandis que pour $0<z<z_0$:

$$E_2=\int_0^{z_0}\frac{1}{2\varepsilon_0}\rho_0\exp(-az)dz=\frac{\rho_0}{2\varepsilon_0 a}(1-\exp(-az_0)).$$

Donc le champ résultant vaut $E_z=E_1+E_2=\frac{\rho_0}{2\varepsilon_0 a}(1-2\exp(-az_0))$. $E_x=E_y=0$ par symétrie.

(C) La valeur de la fonction $E(z)$ passe de $-\frac{\rho_o}{2\varepsilon_o a}<0$ pour $z<0$ à $\frac{\rho_o}{2\varepsilon_o a}>0$ pour $z=\infty$, sa valeur absolue minimale sera donc zéro. Donc nous avons la condition $1-2\exp(-az_0)=0$ qui nous donne $z_0=\frac{\ln 2}{a}$. En bleu le champ électrique et en orange sa valeur absolue.

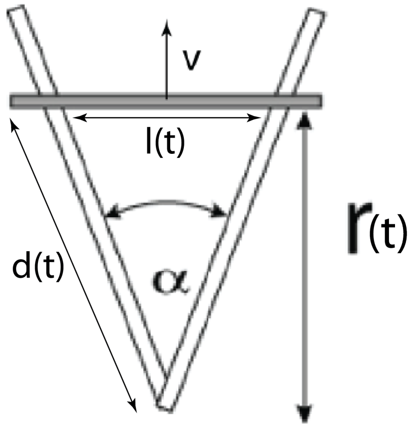


D) L'application numérique donne $z_0 = 1.39\ m$.

E) $E(-0.6)=225.5\ V/m$.

Exercice 2

Nous calculons quelques quantités qui seront nécessaires par la suite.



$r(t) = vt\ ;\ l(r) = 2r \cdot tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)$

ou en fonction du temps : $l(t) = 2vt \cdot tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)$

$d(r) = \sqrt{\left(\frac{l(r)}{2}\right)^2 + r^2}\ ;\ d(r) = r\sqrt{tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) + 1} = \frac{r}{cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$

$$d(r)_{tot} = \frac{2r}{cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \quad ;;;; \qquad d(t) = \frac{vt}{cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$$

Flux du champ magnétique à travers le circuit quand le champ magnétique est perpendiculaire au plan du dessin et la tension induite :

$$\phi_B(t) = \frac{Bl(t)r(t)}{2} = Bv^2t^2tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$V_{ind}(t) = -\frac{\partial\phi_B(t)}{\partial t} = -2Bv^2t \cdot tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$V_{ind}(r) = -\frac{\partial\phi_B(t)}{\partial t} = -2Bvr \cdot tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

Résistance des deux bouts de rail :

$$R(r) = \frac{\rho 2d(r)}{S} = \frac{2\rho r}{S \cdot cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$$

$$R(t) = \frac{2\rho}{S \cdot cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}vt$$

A) Le courant induit à la position *r* :

$$I(r) = \frac{V_{ind}(r)}{R(r)} = -\frac{BvS}{\rho}tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = -\frac{BvS}{\rho}sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

Le courant ne dépend pas de r !

B) $I(t) = \frac{V_{ind}(t)}{R(t)} = -\frac{BvS}{\rho}tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 17\ mA$

C) Force

$$F(t) = B \cdot I_{Ind}(t) \cdot l(t) = -B \cdot \frac{BvS}{\rho} tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot 2vt \cdot tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{2B^2v^2tS}{\rho} cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

D) $F(t) = \frac{2B^2v^2tS}{\rho} sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{2B^2vrS}{\rho} sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 3.78 \cdot 10^{-4}$ N

Exercice 3

1) Quand l'interrupteur est maintenu en position [a] le courant circule seulement dans la maille formée par la batterie, la résistance R et la bobine L. Nous appliquons la deuxième loi de Kirchhoff à cette maille et obtenons l'équation différentielle suivante $RI + L\frac{dI}{dt} = V$, dont la solution donne le courant I en fonction du temps : $I = \frac{V}{R}(1 - \exp(-\frac{R}{L}t))$.
(La solution de l'équation différentielle peut être obtenue en séparant les variables nous obtenons $\frac{dI}{V - RI} = \frac{dt}{L}$ avec la condition initiale *I(0)=0*, ou bien en sachant qu'il s'agit d'une équation différentielle inhomogène on cherche la solution générale de l'équation homogène et on y ajoute une solution quelconque de l'équation inhomogène).

Pour t=2 s nous obtenons : I_0= 4.5 A, il s'agit de l'amplitude du courant ici.

2) Après que l'interrupteur est placé en position [b], des oscillations apparaissent dans le circuit formé par la bobine L et par le condensateur C dont la fréquence angulaire d'oscillation est $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$. La fréquence sera donc $f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = 382.9\ Hz$.

3) Nous appliquons la deuxième loi de Kirchhoff à la maille formée par la bobine et le condensateur et obtenons l'équation différentielle suivante :

$$\frac{Q(t)}{C} - L\frac{dI(t)}{dt} = 0$$

ce qui nous amène à l'équation différentielle suivante pour Q(t) :
$\frac{Q(t)}{C} - L\frac{d^2Q(t)}{dt^2} = 0$

donc $Q(t) = Q_o \sin(t/\sqrt{LC})$ (nous utilisons le sinus et pas de cosinus parce que *Q(0)=0*) et qui nous permet d'obtenir la fréquence d'oscillation $\omega = 2406\ Hz$ et donc f=383 Hz.

Nous avons aussi *I(t)=dQ(t)/dt* et donc $I(t) = \frac{Q_0}{\sqrt{LC}}\cos(t/\sqrt{LC})$; donc $\frac{Q_0}{\sqrt{LC}} = I_0$ et $Q_0 = \sqrt{LC}I_0$, où I_o est le courant calculé au point 1). Le même résultat peut être obtenu par la loi de conservation d'énergie $\frac{1}{2}LI_0^2 = \frac{1}{2}\frac{Q_0^2}{C}$.