Physique générale : fluides et électromagnétisme

École Polytechnique Fédérale de Lausanne

Cours donné par : Christian Theiler

Notes de révision

Juan Felipe Celis Rojas

February 28, 2025

Table des matières

1 Fluides au repos

1.1 Introduction

Definition 1.1 (Fluide)**.** Corps à l'état liquide, gaz ou plasma. C'est un système d'un grand nombre de particules qui est susceptible de s'écouler facilement. Il est déformable et il n'a pas de forme propre.

1.1.1 Densité de fluide

Definition 1.2 (Densité)**.** La densité est le rapport entre masse et volume.

$$\rho(\vec{r}, t) = \lim_{\Delta V \to \mathrm{d}V} \frac{\Delta m}{\Delta V}$$

Ici, $\mathrm{d}V = \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, avec $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$, et $\mathrm{d}z$ des longueurs infinitésimales . En pratique, on les considère petites aux échelles des variations des quantités fluides mais grandes par rapport à la distance entre particules.

Exemple numérique. *Aux conditions normales de température et de pression, on a* $\rho_{eau} \approx 1000\mathrm{kg/m}^3$ *et* $\rho_{eau} \approx 1.29\mathrm{kg/m}^3$*. Typiquement le rapport de la densité d'un liquide et d'un solide est environ un facteur 1000.*

Avec la densité du fluide on peut calculer la masse d'un volume de fluide V:

$$m = \iiint_V \rho(\vec{r}, t) dV$$

On note ici aussi que la masse qui traverse une surface S par unité de temps est donnée par (voir série 1):

$$\phi = \iint_S \rho\vec{u} \cdot d\vec{S}$$

1.1.2 Pression dans un fluide

Definition 1.3 (Pression)**.** La pression dans un fluide est la force par unité de surface exercée par le fluide sur une parois ou sur une autre partie du fluide.

Elle est perpendiculaire à la surface. L'unité de la pression est le Pascal

$$[p] = \frac{N}{m^2} = Pascal = Pa$$

La pression est un champ scalaire et elle est isotrope dans le cas où il n'y a pas des forces de cisaillement (voir série 2).

1.2 Pression hydrostatique

Quelle est la pression $p(\vec{r})$ pour un fluide en repos ? On suppose ici le cas où le fluide est incompressible ($\rho = const$). On a montré que :

$$p = p_0 + \rho g h$$

Ceci suggère que la variation de pression dans un fluide au repos ne dépend que de la profondeur h, indépendant de la forme du fluide, et en particulier ne varie pas perpendiculairement à $\vec{g}$.

Principe 1.1 (de Pascal)**.** *Un changement de la pression appliquée sur un fluide incompressible et au repos est transmise à chaque partie du fluide et à chaque portion des parois.*

Application 1.2. *Machines hydrauliques :*

$$\frac{F_1}{S_1} = p_1 = p_2 = \frac{F_2}{S_2} \to F_1 = \frac{S_1}{S_2} F_2$$

La force exercée par la pression est

$$F = pS := \text{pression fois surface}$$

1.3 Densité de force associée à la pesanteur

Nous calculons la force exercée sur un volume de fluide infinitésimale $\mathrm{d}V = \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ due à la pression. On trouve que la densité de force associée à la pression est $-\nabla p$. Ceci nous donne que, pour la force de pression totale exercée sur un volume arbitraire V du fluide, on a :

$$\vec{F_p} = \iiint_V -\vec{\nabla} p dV$$

Maintenant : $p = p_0 - \rho g z$ pour $z < 0$. On trouve,

$$\vec{F_p} = mg\vec{e_z}$$

Ceci reste valable même si le volume V est un solide. Il en suit :

Principe 1.3 (Poussée d'Archimède)**.** *Tout corps plongé dans un fluide reçoit de celui-ci une poussée verticale égale au poids du fluide déplacé.*

1.4 Tension superficielle

1.4.1 Origine et définition de la tension superficielle

Il y a moins d'interactions moléculaires (moins de "liaisons intermoléculaires") pour une molécule à la surface d'un liquide qu'à l'intérieur. Pour l'amener là-bas et agrandir la surface S par une valeur ΔS, il faut un travail.

$$\Delta W = \gamma \Delta S$$

Tension superficielle $=: \gamma$, $[\gamma] = \frac{N}{m}$.

$$\vec{F_\gamma} = l \cdot \gamma, \quad l := \text{longueur de la ligne de contact}$$

La force $\vec{F_\gamma}$ est tangentielle à la surface du liquide et perpendiculaire à son bord. Elle cherche à minimiser la surface.

Dans plusieurs cas il y a deux surfaces de contact, il ne faut pas oublier la deuxième dans le calcul.

1.4.2 Interface solide/liquide/gaz et angle de contact

Loi 1.1 (de Young)**.**

$$\cos\theta = \frac{\gamma_{sg} - \gamma_{sl}}{\gamma_{lg}}$$

1.4.3 Loi de Laplace

Loi 1.2 (de Laplace)**.** *A travers la surface d'un liquide avec une courbure, il y a un saut de pression:*

$$p_1 = p_2 + \gamma\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$$

où R_1 et R_2 sont les rayons de courbures principales au point de la surface considérée.

Cas à connaître :

- Sphère : $R_1 = R_2 = R$
- Cylindre : $R_1 = R$, $R_2 = \infty$
- Plan : $R_1 = R_2 = \infty$

Loi 1.3 (de Jurin)**.**

$$h = \frac{2\gamma\cos\theta}{\rho g r}$$

2 Dynamique des fluides

2.1 Introduction

Les fluides en mouvement sont décrits par la densité, la pression et la vitesse.

Remarque. La vitesse est celle d'un élément fluide infinitésimale à $\vec{r}$ et t. Ce n'est pas la vitesse "thermique" des atomes/molécules, mais leur vitesse moyenne dans un tel élement.

En général $\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \neq 0$. Dans ce cas, les lignes de courant sont en général différentes à la trajectoire des éléments fluides.

Types d'écoulements :

- Écoulement statique : $\vec{u}(\vec{r}, t) = 0 \; \forall \vec{r}, t$
- Écoulement stationnaire : $\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = 0$, $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$, $\frac{\partial p}{\partial t} = 0$
- Écoulement laminaire : "Couches successives du fluide se déplacent doucement et régulièrement l'une à côté de l'autre" $\rightarrow$ typiquement à basse vitesse
- Écoulement turbulent : Si non-laminaire. Mouvement irrégulier et chaotique. $\rightarrow$ typiquement à haute vitesse

2.2 Dérivée convective

Attention : $\frac{\partial \vec{u}}{\partial t}$ est la variation de $\vec{u}$ par unité de temps à un endroit fixe. Ce n'est pas l'accélération de l'élément fluide. Et $\frac{\partial p}{\partial t}$ est la variation de pression par unité de temps à la position $\vec{r}$ fixe. Ce n'est pas la variation de p vue par un observateur entraîné par l'écoulement.

La variation temporelle de p le long de la trajectoire est :

$$\frac{Dp}{Dt} := \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla}\right) p$$

De même la variation temporelle de $\vec{u}$ le long de la trajectoire (l'accélération) est :

$$\frac{D\vec{u}}{Dt} := \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla}\right) \vec{u} = \vec{a}$$

On définit la dérivée convective d'une fonction f comme :

$$\frac{D}{Dt}(f) := \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla}\right) (f)$$

Il y a deux manières de décrire un écoulement :

- Description Lagrangienne d'un fluide : Mesure des quantités pression, densité et vitesse en des endroits qui se déplacent avec le fluide.
- Description Euleriènne d'un fluide : On mesure les quantités pression, densité et vitesse au cours du temps en un endroit fixe.

2.3 Équations fluides

Pour déterminer l'évolution des cinq fonctions $\rho, p, \vec{u}$ (fonction vectorielle) il faut cinq équations.

2.3.1 Équation de continuité

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho(\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) = 0$$

Ceci est équivalent à :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho\vec{u}) = 0$$

Definition 2.1 (Fluide incompressible)**.** On appelle un fluide incompressible si $\rho = const.$

Dans ce cas, l'équation de continuité devient :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0$$

2.3.2 Équation d'Euler

Definition 2.2 (Fluide parfait)**.** On appelle un fluide parfait s'il n'a pas de frottements internes (pas de viscosité) ni conduction de chaleur.

Pour les fluides parfaits nous avons l'équation d'Euler :

$$\rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = \rho \vec{g} - \vec{\nabla} p$$

2.3.3 Équation d'état

- Gaz parfait, sans échange de chaleur entre élements fluides (processus adiabatique). Sans conduction de chaleur, on a pV^{γ} constant le long de la trajectoire, où γ est l'indice "d'adiabaticité".L'équation d'état pour un gaz parfait est, dans ce cas :

  $$\frac{D}{Dt}(p\rho^{-\gamma}) = 0$$

  Pour un fluide uniforme, au repos, après linéarisation, cette équation devient

  $$\frac{\partial p_1}{\partial t} - \gamma \frac{p_0}{\rho_0} \cdot \frac{\partial \rho_1}{\partial t} = 0$$

- Liquide
  On fait souvent l'approximation d'un fluide incompressible. Donc, l'équation de continuité est simplifiée en $\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0$.

De plus, on doit aussi considérer les conditions aux limites pour résoudre les équation des fluides.

2.3.4 Théorème de Bernoulli

Théorème 2.1 (de Bernoulli)**.** *Ici on considère un fluide parfait, incompressible en écoulement stationnaire dans un champ de pesanteur $\vec{g}$ constant. Nous avons que*

$$\frac{1}{2}\rho u^2 + \rho g z + p = const \text{ le long d'une ligne de courant}$$

2.4 Viscosité, écoulement d'un fluide visqueux

2.4.1 Définition de la viscosité

Observation des expériences du cours : Pour la même fréquence angulaire, le moment de force nécessaire pour faire tourner le cylindre plongé dans un fluide (eau, glycérine, ...) dépend du type de fluide.

Il nous faut agir contre une force de cisaillement

$$F_x = \eta S \frac{u_0}{h}, \eta := \quad \text{coefficient de viscosité dynamique} \tag{1}$$

$$= \eta S \frac{\partial u_x}{\partial y} \tag{2}$$

2.4.2 Force de viscosité par unité de volume et équation de Navier-Stokes incompressible

Dans le cas général pour un fluide incompressible (et Newtonien) la force de viscosité par unité de volume est :

$$\vec{F} = \eta \Delta \vec{u}$$

Ici on définit Δ comme l'opérateur Laplace de la forme suivante :

$$\Delta = \vec{\nabla}^2 = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)$$

Maintenant on peut écrire l'équation de Navier-Stokes incompressible :

$$\rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = \rho \vec{g} - \vec{\nabla} p + \eta \Delta \vec{u}$$

3 Phénomènes ondulatoires

3.1 Onde transverse et longitudinale et l'équation d'onde

Une onde transporte de l'énergie et/ou de l'information, pas de matière !

Definition 3.1 (Onde transverse)**.** Perturbation perpendiculaire à la direction de propagation de l'onde. Par exemple une onde sur une corde.

Definition 3.2 (Onde longitudinale)**.** Perturbation parallèle à la direction de propagation de l'onde. Par exemple une onde de pression (onde sonore) ou une onde le long d'un ressort.

Nous avons l'équation d'onde en 1D :

$$\frac{\partial^2 y_0}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y_0}{\partial x^2}$$

Pour une corde $c = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$
Les solutions de l'équation d'onde peuvent être écrites comme

$$y_0(x,t) = f(x - c\,t) + g(x + c\,t)$$

3.2 Ondes sinusoïdales

Cas particulier des ondes :

$$y_0(x,t) = A\cos(\omega t - kx + \varphi)$$

Nous avons :

$$\begin{aligned}
A &: \text{ Amplitude de l'onde} \\
k &: \text{ Nombre d'onde} \\
\omega &: \text{ Pulsation ou fréquence angulaire} \\
\varphi &: \text{ Déphasage} \\
\omega\, t - k\, x + \varphi &: \text{ La phase de l'onde} \\
c = \frac{\omega}{k} &: \text{ La vitesse de propagation (de phase) de l'onde}
\end{aligned}$$

De plus, on a :

$$\begin{aligned}
\lambda = \frac{2\pi}{k} &: \text{ La longueur d'onde} \\
T = \frac{2\pi}{\omega} &: \text{ La période} \\
\nu = \frac{1}{T} &: \text{ La fréquence}
\end{aligned}$$

On a aussi que :

$$c = \frac{\omega}{k} = \nu\, \lambda$$

Souvent, on utilise la notation complexe pour les ondes, en rappelant que la partie physique est la partie réelle.

$$\tilde{y_0} = \tilde{A} e^{i(\omega t - k\, x)}$$

3.3 Ondes stationnaires

Revenons au cas de la corde : points P_1 et P_2 fixés (conditions aux bords).

Nous avons les solutions suivantes (ondes stationnaires) :

$$y_0(x,t) = d \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right) \cos\left(\frac{c\pi}{l} nt + \varphi\right)$$

On a :

$$k = \frac{n\pi}{l} = \frac{2\pi}{\lambda} \implies \lambda = \frac{2l}{n} = \frac{2\pi}{k}$$

On a trouvé les modes normaux de la corde (= solutions à une fréquence precise). *Les fréquences propres de la corde sont données par*

$$\nu = \frac{c}{\lambda} = \frac{c\, n}{2l}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Tout mouvement arbitraire de la corde en régime linéaire est une somme (infinie) des modes normaux.

3.4 Ondes en 3D

En 3D l'équation d'onde devient :

$$\frac{\partial^2 y_0}{\partial t^2} = c^2 \Delta y_0$$

Les ondes sinusoïdales deviennent des ondes sinusoïdales planes :

$$\tilde{y_0} = \tilde{A} e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$$

Une surface équiphase est définie par

$$\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} = const$$

Elles sont des plans qui se déplacent le long de $\vec{k}$ à vitesse $c = \frac{\omega}{k}$.

3.5 Quelques conséquences du principe de superposition linéaire

Il y a deux vitesses :

- Vitesse de phase (propre à l'onde, de propagation) : $c = \frac{\omega}{k}$
- Vitesse de groupe (vitesse de l'enveloppe de l'onde) : $v_G = \frac{\partial \omega}{\partial k}$

Une perturbation dans un milieu dispersif (cas où $\frac{\partial \omega}{\partial k} \neq const.$):

- Se déforme au cours de la propagation
- Se déplace avec la vitesse de groupe

Plus général : Une onde sinusoïdale se déplace avec la vitesse de phase. Tandis qu'un pulse se déplace avec la vitesse de groupe. C'est-à-dire que l'information se déplace avec la vitesse de groupe.

4 Ondes dans les milieux fluides

4.1 Ondes dans un fluide uniforme

Les ondes dans un fluide uniforme sont longitudinales.

On considère des petites perturbations $\rho_1, \vec{u}_1, p_1$ telles que $\rho_1 \ll \rho_0$, $p_1 \ll p_0$, $|\vec{u}_1| \ll c$. On a $\rho = \rho_0 + \rho_1$, $p = p_0 + p_1$ et $\vec{u} = \vec{u}_1$.

Nous avons les suivantes équation d'onde

$$\rho_1(\vec{r}, t) = \frac{\rho_0}{\gamma p_0} \tilde{p_1} e^{i(\omega t - kz)}$$

$$\vec{u}_1(\vec{r}, t) = \frac{k}{\omega \rho_0} \tilde{p_1} e^{i(\omega t - kz)}$$

$$p_1(\vec{r}, t) = \tilde{p_1} e^{i(\omega t - kz)}$$

$$c = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\gamma \frac{p_0}{\rho_0}} = \sqrt{\gamma \frac{K_B T}{m}}$$

4.2 Quelques mots sur les ondes linéaires à la surface d'un fluide parfait

Les vagues sur l'eau sont une combinaison d'onde transverse et longitudinale.

5 Électrostatique

5.1 Charge électrique

Definition 5.1. Un corps est dit neutre si les charges positives et négatives s'annulent.

Un corps est dit chargé s'il y a un excès d'un type de charge.

Principe 5.1. *La quantité de charge totale est conservée dans toutes les expériences.*

5.2 Loi de Coulomb

On a deux charges ponctuelles q_1 et q_2. La force exercée par q_1 sur q_2 est :

$$\vec{F}_{1\to 2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{|\vec{r}_{12}|^2}\frac{\vec{r}_{12}}{|\vec{r}_{12}|}$$

Principe 5.2 (de superposition)**.** *Force de n charges ponctuelles q_i à $\vec{r}_i$ sur une charge q à $\vec{r}$:*

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_i q}{|\vec{r}-\vec{r}_i|^2}\frac{\vec{r}-\vec{r}_i}{|\vec{r}-\vec{r}_i|}$$

5.3 Champ électrique

Definition 5.2 (Champ magnétique)**.** Le champ électrique généré par une charge q_1 à $\vec{r}_1$ dans un point $\vec{r}$ dans l'espace est défini par :

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{|\vec{r}-\vec{r}_1|^2}\frac{\vec{r}-\vec{r}_1}{|\vec{r}-\vec{r}_1|}$$

Le principe de superposition nous permet de définir le champ électrique généré par n charges q_i à position $\vec{r}_i$:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_i}{|\vec{r}-\vec{r}_i|^2}\frac{\vec{r}-\vec{r}_i}{|\vec{r}-\vec{r}_i|}$$

Le champ $\vec{E}$ est dans la direction de la force ressenti par une charge positive.

5.3.1 Champ $\vec{E}$ dû à une distribution de charge quelconque

Nous allons traiter deux cas.

- Densité de charge ρ_{el}
$$\rho_{el}(\vec{r}) = \lim_{\Delta V \to dV} \frac{\Delta q}{\Delta V}$$
$$\implies \vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint_V \frac{\rho_{el}(\vec{r}')(\vec{r}-\vec{r}')}{\|\vec{r}-\vec{r}'\|^3} dV'$$

- Densité de surface σ_{el}
$$\sigma_{el}(\vec{r}) = \lim_{\Delta S \to dS} \frac{\Delta q}{\Delta S}$$
$$\implies \vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iint_S \frac{\rho_{el}(\vec{r}')(\vec{r}-\vec{r}')}{\|\vec{r}-\vec{r}'\|^3} dS'$$

5.3.2 Lignes de champ électrique

Definition 5.3 (Lignes de champ électrique)**.** Elles sont définies comme les lignes qui sont tangentielles à $\vec{E}$ et tout point.

5.4 Loi de Gauss

Loi 5.1 (de Gauss)**.** *Le flux du champ électrique à travers une surface S fermée est égale à la somme des charges électriques contenues dans le volume V délimité par S, divisé par la permittivité du vide.*

$$\iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \iiint_V \rho_{el} dV$$

Nous avons aussi la forme différentielle de la loi de Gauss :

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho_{el}}{\varepsilon_0}$$

5.5 Le potentiel électrostatique

En électrostatique on peut définir une fonction scalaire $\phi(\vec{r})$ tel que $\vec{E} = -\nabla\phi$. On appelle ϕ le potentiel électrostatique.

Si on a une seule charge ponctuelle q_1 à $\vec{r}_1$ le potentiel est donné par :

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1}{\|\vec{r}-\vec{r}_1\|} + const$$

Remarquons que nous pouvons généraliser cette expression à n charges avec le principe de superposition.

Avec une distribution de charge arbitraire

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint_V \frac{\rho_{el}(\vec{r}')dV'}{\|\vec{r}-\vec{r}'\|} + const$$

Pour une densité de charge de surface :

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iint_S \frac{\sigma_{el}(\vec{r'})dS'}{\|\vec{r} - \vec{r'}\|} + const$$

5.5.1 Quelques propriétés de ϕ et de $\vec{E}$ en électrostatique

1. Nous avons
$$\nabla \times (\nabla \cdot \phi) = 0$$

2. Le travail pour déplacer une charge q dans un champ $\vec{E}$ de A à B ne dépend pas du chemin suivi et est égal à $q(\phi(B)\phi(A))$

Definition 5.4 (Surface équipotentielle)**.** On définit les surfaces équipotentielles par

$$\phi(\vec{r}) = const$$

Comme $\vec{E} = -\nabla\phi$ les lignes du champ $\vec{E}$ sont perpendiculaires aux surfaces équipotentielles.

5.6 Le rôle des conducteurs en électrostatique

5.6.1 Propriétés de base

En électrostatique, pas de courant.

1. $\vec{E} = 0$ à l'intérieur du conducteur
2. $\nabla \cdot \vec{E} = 0 = \frac{\rho_{el}}{\varepsilon_0} \implies \rho_{el} = 0$ à l'intérieur du conducteur
3. Le potentiel ϕ est constant dedans le conducteur
4. $\vec{E} = -\nabla\phi \implies \vec{E}$ est perpendiculaire à la surface du condensateur parce que cette surface est équipotentielle
5. Des charges peuvent se trouver seulement à la surface du conducteur ($\sigma_{el} \neq 0$ possible)

5.6.2 Densité de charge de surface par influence

Il peut arriver que des densités de surfaces de charges soient générées par influence pour assurer que $\vec{E} = 0$ dans le conducteur.

5.6.3 Effet de pointe

Autour des pointes d'un conducteur le champ $\vec{E}$ peut être très élevé.

5.6.4 Traitement générale, équation de Laplace et de Poisson

Souvent on ne peut plus utiliser la loi de Gauss pour trouver le champ électrique ($\rho el(\vec{r})$ n'est pas connue).

On connaît le potentiel à la surface de chaque conducteur mais pas σel.

- Si $\rho el = 0$ dans l'espace à l'extérieur des conducteurs. Alors $\nabla \cdot \vec{E} = 0$ avec $\vec{E} = -\nabla\phi$ on trouve l'équation de Laplace :

$$\Delta\phi = 0$$

- Si $\rho el \neq 0$ entre conducteurs alors on a l'équation de Poisson :

$$\Delta\phi = \frac{-\rho el}{\varepsilon_0}$$

Théorème 5.1. *Pour les conditions au limites $\phi = \phi_i$ sur la surface du conducteur $i \in \{1, 2, \dots\}$ et $\lim |\vec{r}| \to \infty\phi = 0$, alors la solution de l'équation de Poisson (ou de Laplace) est unique.*

5.7 Capacité et condensateur

5.7.1 Définition de capacité

Deux condensateurs initialement non chargés. Charge $-q$ enlevé de d'un conducteur et placée sur l'autre. Nous avons :

$$\frac{q}{\phi(A) - \phi(B)} = const = C$$

Pour alléger la notation nous écrivons

$$U = \phi(A) - \phi(B)$$

Dans le vide la capacité ne dépend que de la géométrie des deux condensateurs.

5.7.2 Le condensateur

Definition 5.5 (Condensateur)**.** Système de deux condensateurs avec charge $\pm q$. Normalement, la géométrie est choisie pour maximiser la capacité.

Condensateur cylindrique : deux cylindres de conducteurs, un placé dedans l'autre. La capacité de ce condensateur est :

$$C = \frac{2\pi\varepsilon_0 l}{\ln(\frac{R_2}{R_1})}$$

Condensateur plan : deux plaques de conducteurs placées l'une à côté de l'autre. La capacité est :

$$C = \frac{\varepsilon_0 S_c}{d}$$

5.7.3 Énergie stockée dans un condensateur d'énergie électrique

Considérons un condensateur arbitraire. Le travail pour déplacer une charge $-dq$ de conducteur A au condensateur B est

$$dW = -U(-dq) = \frac{q}{C}dq$$

Alors le travail pour déplacer une charge q est :

$$W = \int_0^q dW = \frac{1}{2}CU^2$$

Pour un condensateur plan on a :

$$W = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 S_c d$$

Ce travail est stockée dans le champ E. On pose

$$e_E = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$$

la densité d'énergie électrique dans le vide.

5.7.4 Capacité avec un diélectrique

Un diélectrique est utilisé pour diminuer la tension donc augmenter la capacité.

Definition 5.6 (Moment dipolaire)**.** On pose

$$\vec{p} = \sum_i \vec{r}_i q_i$$

le moment dipolaire. On a

1. $\vec{p}$ ne dépend pas du choix du système de coordonnées
2. Dans un champ $\vec{E}$ uniforme la force sur le système est nulle
3. Par contre, le moment de force en général est non nul.

Dans un diélectrique les électrons ne peuvent pas bouger librement. Mais un champ $\vec{E}$ a quand-même des effets :

1. Moment dipolaire induit. Très faible déplacement d'électrons.
2. En présence de moments dipolaires permanentes le diélectrique forme une densité de charge de surface.

Si le diélectrique est homogène et isotrope, et $\vec{E}$ n'est pas trop fort :

$$\sigma_p = \chi \varepsilon_0 E$$

où χ est la susceptibilité électrique. Posons $\varepsilon_r := 1\chi$ la permittivité relative.

Considérons un condensateur plan avec un diélectrique, nous avons :

$$E = \frac{q}{S_c \varepsilon_0 \varepsilon_r}$$

$$U = \frac{qd}{S_c \varepsilon_0 \varepsilon_r}$$

$$C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r S_c}{d}$$

En général la capacité d'un condensateur ne dépend que de sa géométrie et du diélectrique.

6 Circuits électriques

En électrostatique, pas de courent implique pas de champ électrique dedans les conducteurs.

Definition 6.1 (Appareil à force électromotrice)**.** Appareil qui fourni une tension entre deux bornes.

6.1 Définition de courant

Definition 6.2 (Courant)**.** Le courant est le flux de charge par unité de temps à travers une surface S.

$$I = \frac{dq}{dt}$$

Definition 6.3 (Densité de courant)**.** La densité de courant $\vec{j}$ est donnée par :

$$\vec{j} = \rho_{el}(\vec{r}, t) \cdot \vec{u}(\vec{r}, t)$$

Nous avons

$$I(t) = \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

6.2 La résistance R, la loi d'Ohm et l'effet Joule

Definition 6.4 (Résistance)**.** On définit la résistent comme le voltage appliqué sur le courant :

$$R = \frac{U}{I}$$

Dans certains cas le courant est proportionnel à la tension, donc la résistance est constante. on parle de la loi de Ohm.

Loi 6.1 (de Ohm)**.**

$$R = \frac{U}{I} = const$$

De manière plus générale on écrit la loi de Ohm de la forme suivante

$$\vec{j} = \sigma_c \cdot \vec{E} = \frac{1}{\rho_c} \cdot \vec{E}$$

Avec σ_c la conductibilité électrique et ρ_c la résistivité électrique.

À partir de la loi de Ohm on peut déduire $U = RI$. Donc,

$$R = \frac{\rho_c l}{S} = \frac{l}{\sigma_c S} = const$$

la résistance dépend de la géométrie et du type de conducteur.

Effet Joule : Si une charge q se déplace de A à B, le travail exercé par le champ $\vec{E}$ sur la charge est Uq. Dans une résistance cette énergie est transformée en chaleur. Nous avons une puissance P définie par :

$$P = \frac{U^2}{R} = IU = I^2 R$$

Cette puissance est fournie par l'appareil à fem.

6.3 Conservation de charge, équation de continuité

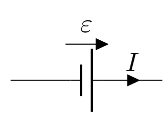
Équation de continuité pour la charge :

$$\frac{\partial \rho_{el}}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{j} = 0$$

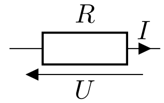
6.4 Circuits électriques et lois de Kirchhoff

Considérons les éléments suivants :

- Source de tension continue



- Résistance



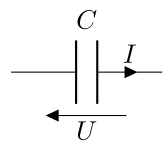
$U = RI$

Résistance équivalente en série : $R_{equil} = \sum_i R_i$

Résistance équivalente en parallèle : $R_{equil} = \left(\sum_i \frac{1}{R_i}\right)^{-1}$

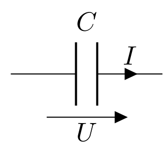
- Condensateur et capacité

  Cas 1:



$$U = \frac{q}{C} \quad I = \frac{dq}{dt}$$

  Cas 2:



$$U = \frac{q}{C} \quad I = \frac{-dq}{dt}$$

  Capacité équivalente en série : $C_{equil} = \left(\sum_i \frac{1}{C_i}\right)^{-1}$

  Capacité équivalente en parallèle : $C_{equil} = \sum_i C_i$

Loi 6.2 (Loi des noeuds)**.** *La somme de tous les courants qui arrivent à un noeud d'un circuit est égale à la somme de tous les courants qui le quittent. Pas d'accumulation de charge dans les noeuds.*

Loi 6.3 (Loi des mailles)**.** *La somme algébrique des variations de potentiel le long de toutes les mailles fermées d'un circuit est nulle.*

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

Valable que en électrostatique/magnéto-statique ou si les variations temporelles ne sont pas trop importantes.

Application 6.1 (lois de Kirchhoff sur un circuit)**.** *Pour un circuit quelconque il faut :*

1. *Définir le sens des courants.*
2. *Indiquer la direction de l'augmentation de potentiel.*
3. *Écrire les équations pour les noeuds sauf 1 et pour les mailles indépendantes.*
4. *Si on trouve $I_i < 0$, la direction de I_i est différente que indiquée dans le dessin. À part ça, le calcul reste juste.*

Remarque. **Loi des mailles** $= \pm\varepsilon_{ind}$**?**

Si l'orientation de $d\vec{S}$ et la direction du choix de I sont selon la règle de vis et la loi est évaluée dans le sens de I. Alors on a

$$\text{Loi de mailles } = -\varepsilon_{ind}$$

7 Magnétostatique

7.1 Définition du champ $\vec{B}$ et force de Lorentz

On trouve expérimentalement la force de Lorentz

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

et on définit la norme de $\vec{B}$ pour que l'égalité d'en haut soit vraie.

Une autre expression de la force de Lorentz est :

$$d\vec{F} = I d\vec{l} \times \vec{B}$$

7.2 Loi d'Ampère

Loi 7.1 (Loi d'Ampère)**.** *Considérons un contour C fermée et des conducteurs portant des courants I_m. Dans ce cas :*

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \cdot \sum_m I_m$$

Version intégrale de la loi d'Ampère :

$$\oint_\gamma \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

Version différentielle de la loi d'Ampère :

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

7.3 Loi de Gauss pour $\vec{B}$

Loi 7.2 (Loi de Gauss)**.** *Considérons un champ magnétique $\vec{B}$ et une surface fermée S alors :*

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

7.4 Loi de Biot-Savart

Loi 7.3 (Loi de Biot-Savart)**.** *Quel est le champ $\vec{B}$ crée par un fil mince de forme abstraite parcouru par un courant I ?*

$$\vec{B}(\vec{p}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{fil} \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{|\vec{r}|^3}$$

8 Phénomènes d'induction magnétique

8.1 Loi d'induction de Faraday

Interprétation d'un champ électrique induit avec la loi d'Ohm :

$$\vec{E} = \frac{I}{S\sigma_c}\frac{d\vec{l}}{dl}$$

Donc

$$\oint_\gamma \vec{E} \cdot d\vec{l} = IR = \varepsilon_{ind}$$

On appelle ε_{ind} la tension induite ou force électromotrice. Cette tension dans le fil peut être induite par :

- Le mouvement d'un aimant
- Par le champ magnétique généré par une bobine
- Un aimant (ou bobine) fixe mais on bouge le fil
- La variation temporelle du champ magnétique

Loi 8.1 (Loi d'induction de Faraday)**.**

$$\varepsilon_{ind} = \oint_\gamma \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{-d}{dt}\iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \frac{-d}{dt}\Phi$$

où on définit :

$$\Phi = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} := \textit{ flux du champ}\vec{B} \textit{ à travers } S$$

Remarque. Nous remarquons que

- L'orientation de $d\vec{l}$ et $d\vec{S}$ est relative et selon la règle de vis.
- La loi de Faraday reste valable si l'orientation et/ou la forme du fil varie au cours du temps.

8.2 Loi de Faraday différentielle

Avec le théorème de Stokes nous pouvons écrire la loi de Faraday sous forme différentielle :

$$\nabla \times \vec{E} = \frac{-\partial \vec{B}}{\partial t}$$

8.3 La règle de Lenz

Quelle est la direction du courant et du champ $\vec{E}$ induit ?

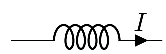
Loi 8.2 (Règle de Lenz)**.** *Le courant induit I dans la boucle est orienté tel que le champ $\vec{B}$ qu'il crée lui-même s'oppose au changement du flux magnétique.*

On a vu les exemples de la canette qui se comprime, et les courants de Foucault.

8.4 Circuits électriques en présence de phénomènes d'induction

8.4.1 Self-inductance

Considérons une bobine



le champ magnétique $\vec{B}$ induit par la bobine est orienté par la loi de vis et définit par :

$$B = \mu_0 I n$$

où n est le nombre de tours par mètre de la bobine.

Alors le flux du champ magnétique par boucle de section S est :

$$\Phi = BS = \mu_0 INS$$

La bobine est de longueur l alors le flux total est :

$$\Phi_{TOT} = \mu_0 n^2 lSI$$

On définit

$$L = \mu_0 n^2 lS := \text{ l'auto inductance ou "self" de la bobine}$$

On peut voir que la bobine induit une tension dans elle même !

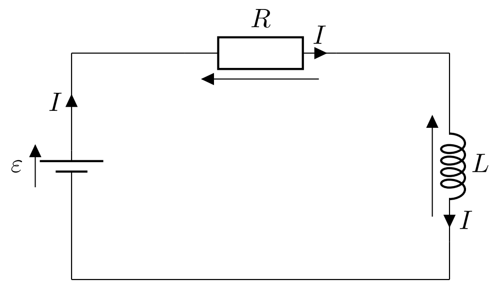
$$\varepsilon_{ind} = -L\frac{dI}{dt}$$

Ce phénomène s'appelle self-inductance.

8.4.2 Circuit électrique avec une self

Nous allons présenter la solution $I(t)$ pour un circuit RL et un circuit RLC.

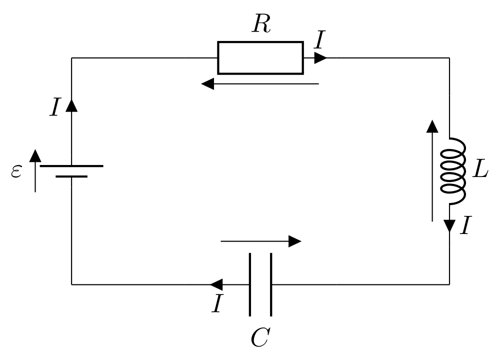
Circuit RL :



La solution du courant est :

$$I(t) = I_0 e^{\frac{-R}{L}t} + \frac{\varepsilon}{R}$$

Circuit RLC :



On a une équation différentielle ordinaire linéaire du second ordre donnée par la loi des mailles :

$$\frac{d^2I}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dI}{dt} + \frac{1}{LC}I = 0$$

8.4.3 Énergie magnétique

Nous trouvons que la densité d'énergie magnétique est :

$$e_B = \frac{1}{2\mu_0}B^2$$

Alors l'énergie magnétique stockée dans un volume par le champ magnétique est :

$$W = \iiint_V e_B dV$$

9 Équations de Maxwell

9.1 Critique de l'équation $\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$

Les expériences nous montrent que la loi d'Ampère en général n'est pas valable (s'il y a des dépendances temporelles).

9.2 Courant de déplacement de Maxwell

Maxwell a postulé un nouveau terme dans la loi d'Ampère si $\frac{\partial}{\partial t} \neq 0$.

Loi 9.1 (Loi d'Ampère-Maxwell)**.**

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Forme intégrale d'Ampère-Maxwell :

$$\oint_\gamma \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \iint_S (\vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t})$$

9.3 Les équations de Maxwell

Valables en générale. On présente les équation sous deux formes différentes.
Forme différentielle :

1. Loi de Gauss :
$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho_{el}}{\varepsilon_0}$$
2. Loi de Faraday :
$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$
3. Loi de Gauss pour le champ magnétique :
$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$
4. Loi d'Ampère Maxwell :
$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Forme intégrale :

1. Loi de Gauss :
$$\iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \iiint_V \rho_{el} dV$$

2. Loi de Faraday :

$$\oint_\gamma \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{-\partial}{\partial t} \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

3. Loi de Gauss pour le champ magnétique :

$$\iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

4. Loi d'Ampère Maxwell :

$$\oint_\gamma \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \iint_S \left(\vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S}$$

9.4 Ondes électromagnétiques dans le vide

Nous trouvons que $\vec{E}$ et $\vec{B}$ satisfait une équation d'onde dans le vide!

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0} \Delta \vec{E}$$

$$\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0} \Delta \vec{B}$$

Nous avons que la vitesse de l'onde est

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = \text{ Vitesse de la lumière}$$

Maxwell a correctement conclut que la lumière est une onde électromagnétique.

Contrairement aux ondes sonores, les ondes électromagnétiques n'ont pas besoin d'un médium pour se propager.

9.4.1 Ondes planes dans le vide

Nous cherchons des solutions du type d'onde sinusoïdales planes. Nous trouvons que la solution est :

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \tilde{\vec{E}}_0 \cdot e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \phi)}$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \tilde{\vec{B}}_0 \cdot e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \phi)}$$

Où nous avons :

$$\omega = c \cdot \left| \vec{k} \right|$$

$$\left| \tilde{\vec{B}}_0 \right| = \frac{1}{c} \left| \tilde{\vec{E}}_0 \right|$$

Nous remarquons que $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont des ondes transverses et que $\vec{E}, \vec{B}, \vec{k}$ forment un repère orthogonale droit. L'onde électromagnétique se propage dans la direction de $\vec{k}$.

Nous avons aussi :

$$\vec{B} = \frac{\vec{k} \times \vec{E}}{\omega}$$

Remarques additionelles :

- Dans un médium la vitesse de phase des ondes électromagnétiques peut être différente : $c \to \frac{c}{n}$ où n est l'indice de réfraction.

- Une onde électromagnétique transporte de l'énergie :

  $$E_{EM} = \iiint_V e_{EM} dV = \iiint_V \frac{1}{2}(\varepsilon_0 \vec{E}^2 + \frac{1}{\mu_0}\vec{B}^2) dV$$

  Nous définissons $\vec{S}$ l'énergie transportée le long de $\vec{k}$ par unité de surface et de temps. Nous avons :

  $$\vec{S} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0} := \text{ Vecteur de Poynting}$$