

III. ONDES

Physique Générale III-IV, L. Villard, CRPP-EPFL. Version 03.2006

Contents

1	Introduction et résumé	3
2	Onde de pression dans un fluide parfait gaz parfait	4
3	Equation d'Alembert. Ondes indéformables	6
3.1	L'équation d'Alembert et sa solution générale	6
3.2	Analyse de la solution générale	7
3.3	Exemple de l'onde de pression dans un fluide parfait gaz parfait	9
4	Principe de superposition linéaire	11
5	Ondes sinusoïdales. Notation complexe. Relation de dispersion	12
5.1	Définitions. Cas de l'Eq. d'Alembert	12
5.2	Notation complexe, démarche générale	14
5.3	Réflexion d'ondes sinusoïdales, ondes stationnaires et cavités résonantes 1D	15
6	Ondes planes et ondes sphériques	17
7	Vitesse de phase et vitesse de groupe	20
8	Energie et intensité d'une onde	24

8.1	Généralités	24
8.2	Intensité d'une onde plane dans un gaz parfait fluide parfait	26
8.3	Mesure des intensités	28
8.4	Intensité d'une onde sphérique sinusoïdale	29
8.5	Conservation de l'énergie	30
9	Interférences et Diffraction. Diffusion de Bragg	31
9.1	Interférence d'ondes émises par 2 sources ponctuelles	32
9.2	Diffraction par une fente de largeur finie	35
9.3	Interférence de N sources ponctuelles	38
9.4	Diffraction des rayons X par les cristaux (Bragg)	42
10	Polarisation	44
11	Effet Doppler	47

1 Introduction et résumé

Une onde est une perturbation qui se propage dans l'espace et le temps. Dans ce cours, nous étudierons les phénomènes ondulatoires dits *linéaires*, c'est-à-dire où l'onde se propage dans un milieu en le perturbant suffisamment peu, pour que cela ne modifie pas les propriétés de propagation de l'onde. Signalons cependant que de nombreux phénomènes peuvent apparaître lorsque l'amplitude de la perturbation devient importante (ondes dites non-linéaires): ondes de choc, auto-focalisation, désintégration paramétrique, etc.

Expérience du cours: ondoscope. Dans cette expérience, où des tiges rigides sont reliées entre elles par une corde élastique, la perturbation est perpendiculaire à la direction de propagation: on parle d'**onde transverse**. Un autre exemple d'onde transverse est l'onde EM dans le vide (voir chapitre précédent), où la perturbation (champs \vec{E} et \vec{B}) est perpendiculaire à la direction de propagation \vec{k} . L'expérience de l'ondoscope permet de mettre en évidence les phénomènes de **réflexion** et d'**amortissement**.

Expérience du cours: chaîne linéaire. Dans cette expérience, où des corps sont reliés entre eux par des ressorts, la perturbation est parallèle à la direction de propagation: on parle alors d'**onde longitudinale**. Un autre exemple d'onde longitudinale est l'onde sonore, que nous allons étudier plus en détail dans la Section suivante. Voir aussi l'expérience de propagation de l'onde sonore dans l'hélium.

Expérience du cours: superposition d'ondes. Lorsque plusieurs ondes sont émises par plusieurs sources, ou que plusieurs ondes sont le résultat de réflexions, il y a **superposition** des perturbations associées. Pour de petites amplitudes, cette superposition est **linéaire**: la perturbation résultante est, en tout point de l'espace-temps, la somme des perturbations de chacune des ondes.

Ce qui se transmet lorsqu'une onde se propage n'est pas de la matière (ce n'est pas une convection), mais c'est une **perturbation**. Cette perturbation est dans certains cas (ex. onde sonore) associée à un mouvement de matière, mais ce n'est pas la matière qui se déplace à la vitesse de propagation de l'onde. Voir p.ex. des vagues sur la mer.

Une onde transmet aussi de l'énergie et de l'information.

On trouvera à l'adresse <http://www.falstad.com/mathphysics.html> plusieurs applets illustrant les différents phénomènes ondulatoires dont nous allons parler dans ce cours.

2 Onde de pression dans un fluide parfait gaz parfait

Soit un fluide parfait, gaz parfait, d'indice d'adiabaticité γ , initialement statique, uniforme, à l'équilibre:

$$P_0, \rho_0, \vec{v}_0 = 0, \quad \frac{\partial P_0}{\partial t} = 0, \frac{\partial P_0}{\partial x_i} = 0, \frac{\partial \rho_0}{\partial t} = 0, \frac{\partial \rho_0}{\partial x_i} = 0. \quad (1)$$

Soit une **perturbation** de cet équilibre. Ainsi

$$P(\vec{x}, t) = P_0 + P'(\vec{x}, t), \quad \rho(\vec{x}, t) = \rho_0 + \rho'(\vec{x}, t), \quad \vec{v}(\vec{x}, t) = \vec{v}'(\vec{x}, t). \quad (2)$$

Pour des ondes linéaires, on fait l'hypothèse de **petites perturbations**:

$$P' \ll P_0, \quad \rho' \ll \rho_0, \quad (3)$$

de telle sorte que l'on **négligera les termes quadratiques ou d'ordre supérieur**:

$$(P')^2, (\rho')^2, (v')^2, P'v', P'\rho', \text{etc.} \quad (4)$$

Cette opération s'appelle la **linéarisation des équations**. (D'où le terme d'onde linéaire). Le but de ce qui suit est de

1. montrer qu'à partir de ces hypothèses, on peut trouver des équations pour la perturbation qui sont de la forme:

$$\boxed{\frac{\partial^2}{\partial t^2} P' = \frac{\gamma P_0}{\rho_0} \nabla^2 P'}, \quad (5)$$

(et de même pour ρ' et \vec{v}');

2. établir des relations entre les composantes de la perturbation, c.a.d. entre P', ρ', \vec{v}' ;
3. montrer que ces équations ont des solutions ondulatoires, de vitesse de propagation

$$\boxed{v_{ph} = \sqrt{\frac{\gamma P_0}{\rho_0}}}. \quad (6)$$

On fera la démonstration détaillée dans le cas unidimensionnel, c'est-à-dire où les quantités perturbées ne dépendent que de (x, t) . Les **équations de base** du modèle sont celles du fluide parfait, gaz parfait, donc l'équation d'Euler, l'équation de continuité et l'équation d'état (voir Ch.I). Puisque l'on a supposé P_0 et ρ_0 uniformes, cela revient à dire que l'on a négligé la pesanteur $\rho \vec{g}$. Il vient:

$$\text{Euler : } (\rho_0 + \rho') \left(\frac{\partial \vec{v}'}{\partial t} + (\vec{v}' \cdot \nabla) \vec{v}' \right) = -\nabla(P_0 + P') \quad (7)$$

$$\text{Continuité : } \frac{\partial(\rho + \rho')}{\partial t} + \nabla \cdot ((\rho_0 + \rho')\vec{v}') = 0 \quad (8)$$

$$\text{Etat : } \left(\frac{\partial}{\partial t} + (\vec{v}' \cdot \nabla) \right) ((P_0 + P')(\rho_0 + \rho')^{-\gamma}) = 0 \quad (9)$$

Eliminant les termes non linéaires, ces équations deviennent:

$$\text{Euler : } \boxed{\rho_0 \frac{\partial v'_x}{\partial t} = -\frac{\partial P'}{\partial x}, \quad \frac{\partial v_y}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial v_z}{\partial t} = 0} \quad (10)$$

$$\text{Continuité : } \boxed{\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial v'_x}{\partial x} = 0} \quad (11)$$

$$\text{Etat : } \boxed{\frac{\partial P'}{\partial t} - \frac{\gamma P_0}{\rho_0} \frac{\partial \rho'}{\partial t} = 0} \quad (12)$$

On tire de (10) que $v_y = \text{const}$ et $v_z = \text{const}$, et comme initialement les vitesses sont nulles, $v_y = 0$ et $v_z = 0$. Il nous reste donc un système de 3 équations (10,11,12), aux dérivées partielles, couplées, linéaires, à coefficients constants, pour 3 fonctions inconnues de (x, t) : P', ρ, v'_x . La méthode de résolution de ce système est d'éliminer v'_x et ρ' et d'obtenir une équation pour P' .

$$\frac{\partial}{\partial x}(10) : \quad \rho_0 \frac{\partial^2 v'_x}{\partial x \partial t} = -\frac{\partial^2 P'}{\partial x^2} \quad (13)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(11) : \quad \rho_0 \frac{\partial^2 v'_x}{\partial x \partial t} = -\frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} \quad (14)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(12) : \quad \frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} = \frac{\rho_0}{\gamma P_0} \frac{\partial^2 P'}{\partial t^2} . \quad (15)$$

Substituant les 2 dernières Eqs dans la première:

$$\boxed{\frac{\partial^2 P'}{\partial t^2} = \frac{\gamma P_0}{\rho_0} \frac{\partial^2 P'}{\partial x^2}} \quad (16)$$

N.B. A partir des Eqs (10,11,12), on peut obtenir des équations de forme similaire pour ρ' et v'_x :

$$\frac{\partial^2 v'_x}{\partial t^2} = \frac{\gamma P_0}{\rho_0} \frac{\partial^2 v'_x}{\partial x^2} \quad (17)$$

$$\frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} = \frac{\gamma P_0}{\rho_0} \frac{\partial^2 \rho'}{\partial x^2} \quad (18)$$

La généralisation de l'Eq.(16) au cas de perturbations dépendant de (x, y, z, t) est:

$$\boxed{\frac{\partial^2 P'}{\partial t^2} = \frac{\gamma P_0}{\rho_0} \nabla^2 P'} \quad (19)$$

L'Eq.(19) est du type appelé **équation d'Alembert**. On étudiera ses solutions à la Section suivante.

Les Eqs.(10,11,12) donnent les relations entre les différentes composantes de la perturbation P', ρ', v'_x .

La perturbation de vitesse \vec{v}' est parallèle à la direction de propagation: c'est donc une onde longitudinale.

3 Equation d'Alembert. Ondes indéformables

3.1 L'équation d'Alembert et sa solution générale

Les équations que nous avons établies pour de petites perturbations dans un fluide parfait gaz parfait sont de la forme (cas 1D):

$$\boxed{\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = u^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}}, \quad (20)$$

où $\psi = \psi(x, t)$ représente la perturbation soit de pression, soit de densité, soit de vitesse, et $u = \sqrt{\gamma P_0 / \rho_0}$. Dans le cas des ondes EM dans le vide, on peut montrer, à partir des Eqs. de Maxwell, que les composantes des champs \vec{E} et \vec{B} satisfont aussi une équation d'Alembert, avec $u = c$. Les autres exemples sont nombreux (cordes vibrantes, ondes élastiques, etc). L'Eq. d'Alembert semble donc représenter une structure mathématique commune à de nombreux phénomènes ondulatoires. Le but de cette Section est d'obtenir la solution générale de cette équation.

La solution générale de l'Eq. d'Alembert est:

$$\boxed{\psi(x, t) = f(x - ut) + g(x + ut)}, \quad (21)$$

où f et g sont deux fonctions *arbitraires*, deux fois différentiables, d'une variable réelle.

Preuve. Soit $\alpha(x, t) = x - ut$ et $\beta(x, t) = x + ut$. On a $\psi(x, t) = f(\alpha(x, t)) + g(\beta(x, t))$. De la règle de dérivation des fonctions composées, on obtient de (21):

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{df}{d\alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial t} + \frac{dg}{d\beta} \frac{\partial \beta}{\partial t} = f'(-u) + g'u$$

Redérivant par rapport à t ,

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = f''(-u)(-u) + g''uu = u^2(f'' + g'')$$

De même,

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = f' + g' \Rightarrow \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = f'' + g''$$

La comparaison des deux dernières équations montre que l'Eq. d'Alembert est bien satisfaite.

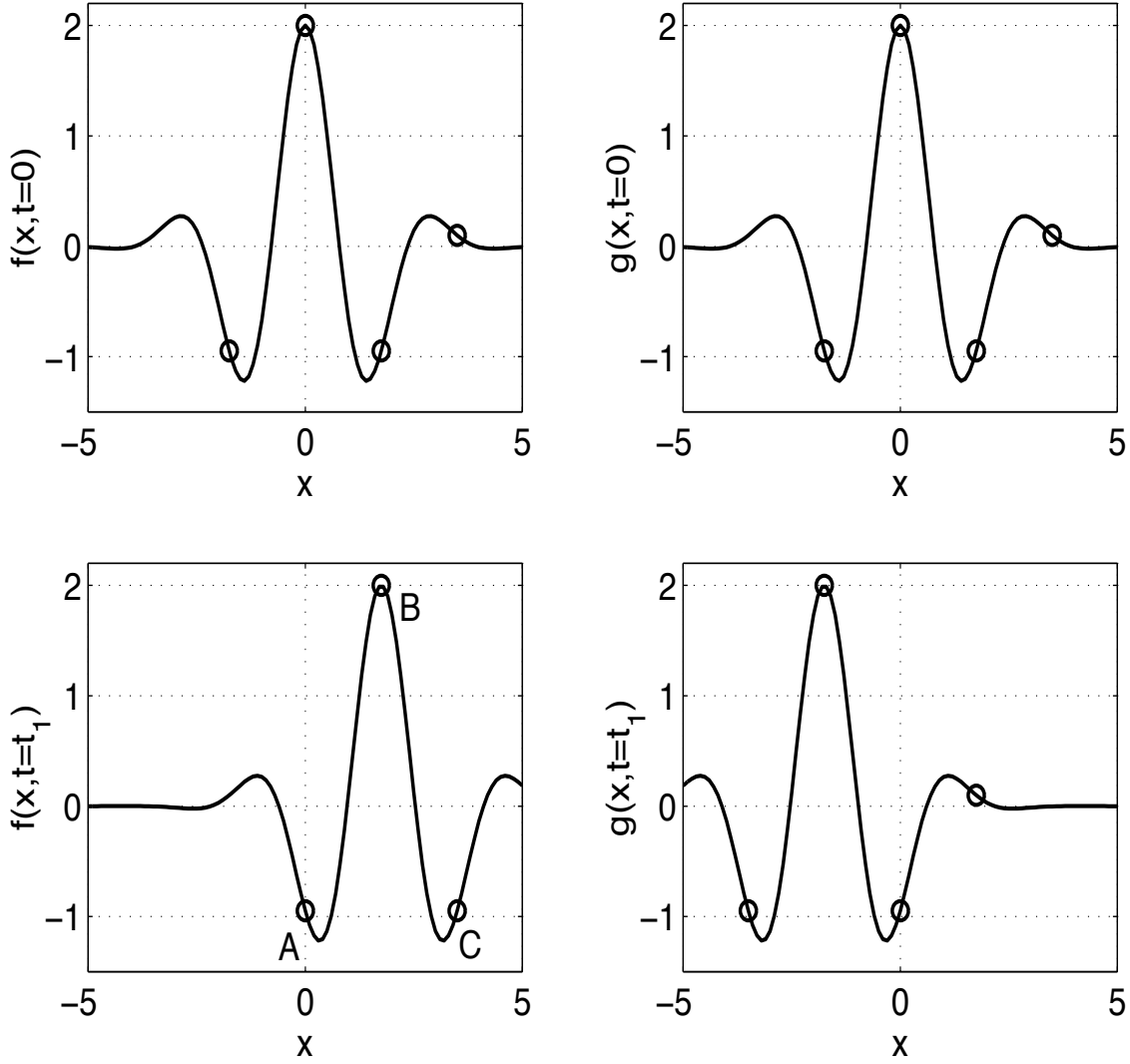


Figure 1: *Solution de l'Eq. d'Alembert: Perturbation dans l'espace à $t = 0$ (haut) et à $t = t_1$ (bas), pour une onde progressive (gauche) et pour une onde rétrograde (droite).*

3.2 Analyse de la solution générale

Signification de $f(x - ut)$ et $g(x + ut)$. Perturbation dans l'espace à un instant donné. Voir Figure 1. Dans le cas où $\psi(x, t) = f(x - ut) = f(\alpha)$, $f(\alpha)$ représente la forme (dans l'espace) de perturbation au temps $t = 0$: $\psi(x, t = 0) = f(\alpha)$.

On obtient la forme de la perturbation (dans l'espace) à un instant $t_1 > 0$ par $\psi(x, t = t_1) = f(\alpha = x - ut_1)$. Par exemple, au point A, en $x = 0$, la perturbation est $\psi_A = \psi(0, t_1) = f(-ut_1)$. Au point B, en $x = ut_1$, la perturbation est $\psi_B = \psi(ut_1, t_1) = f(ut_1 - ut_1) = f(0)$. Au point C, en $x = 2ut_1$, la perturbation est $\psi_C = \psi(2ut_1, t_1) = f(2ut_1 - ut_1) = f(ut_1)$. Et ainsi de suite. En d'autres termes, *la forme de la perturbation (dans l'espace) au temps $t = t_1$ est identique à la forme de la perturbation (dans l'espace)*

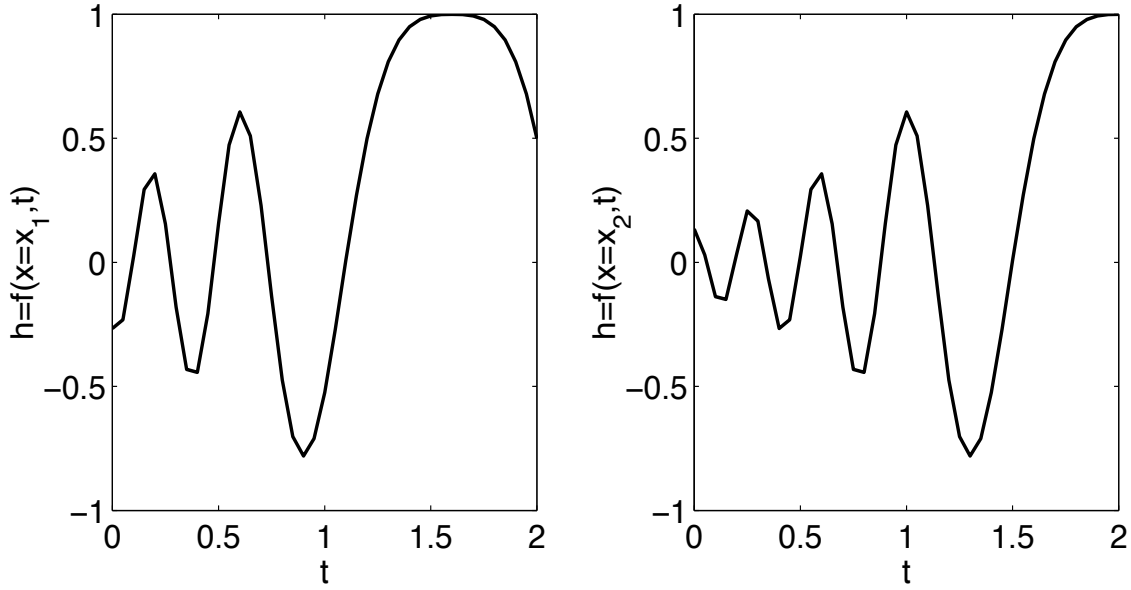


Figure 2: *Solution de l'Eq. d'Alembert: Perturbations dans le temps à une position $x = x_1$ fixée (gauche) et à une position $x = x_2 > x_1$ fixée (droite).*

au temps $t = 0$, décalée de la quantité ut_1 , donc vers les x positifs.

On parle ainsi d'onde progressive **indéformable**.

Dans le cas où $\psi(x, t) = g(x + ut) = g(\beta)$, $g(\beta)$ représente la forme (dans l'espace) de perturbation au temps $t = 0$: $\psi(x, t = 0) = g(\beta)$. Un raisonnement similaire conduit au résultat que dans ce cas la forme de la perturbation (dans l'espace) au temps $t = t_1$ est identique à la forme de la perturbation (dans l'espace) au temps $t = 0$, décalée de la quantité $-ut_1$, donc vers les x négatifs.

On parle ainsi d'onde rétrograde **indéformable**.

Signification de $f(x - ut)$ et $g(x + ut)$. Perturbation dans le temps à une position donnée. Voir Figure 2. Il s'agit donc des signaux temporels à un endroit donné x_1 fixe. soit $h(t)$ ce signal: $h(t) = \psi(x_1, t) = f(x_1 - ut) = f(\alpha = x_1 - ut)$. Le graphe de la fonction $h(t)$ est donc semblable à celui de la perturbation instantanée dans l'espace (renversé à cause du signe “-” devant ut).

Le signal à un endroit x_2 fixé est de forme identique (dans le temps) à celui en x_1 fixé, mais décalé dans le temps de la quantité $\Delta t = (x_2 - x_1)/u$, qui n'est autre que le **temps de propagation du signal entre x_1 et x_2** .

Dans le cas d'une onde rétrograde, le signal à un endroit x_2 fixé est de forme identique (dans le temps) à celui en x_1 fixé, mais décalé dans le temps de la quantité $\Delta t = -(x_2 -$

$x_1)/u$, qui n'est autre que le **temps de propagation du signal entre x_1 et x_2** .

La solution générale de l'Eq.d'Alembert est donc la superposition d'une onde progressive indéformable et d'une onde rétrograde indéformable. La vitesse de propagation est $\pm u$.

3.3 Exemple de l'onde de pression dans un fluide parfait gaz parfait

On a $\psi = P'$ (ou $\psi = \rho'$ ou $\psi = v'_x$). La vitesse de propagation de l'onde sonore est

$$u = \sqrt{\frac{\gamma P_0}{\rho_0}}. \quad (22)$$

On peut récrire cette expression en utilisant la loi des gaz parfaits, $P_0 = (N/V)_0 k_B T_0$, où $k_B = 1.38 \times 10^{-23} \text{J/K}$ est la constante de Boltzmann, T_0 est la température d'équilibre, et $(N/V)_0$ est la densité numérique du gaz à l'équilibre; comme ρ_0 est la densité de masse à l'équilibre, on a $P_0 = (\rho_0/m) k_B T_0$, où m est la masse d'une molécule de gaz. On a ainsi

$$u = \sqrt{\frac{\gamma k_B T_0}{m}}. \quad (23)$$

On constate que la vitesse du son est proportionnelle à la vitesse thermique. Pour l'air aux conditions atmosphériques standard, $P_0 = 1.01 \times 10^5 \text{Pa}$, $\rho_0 = 1.29 \text{kg/m}^3$, $T_0 = 293 \text{K}$, $\gamma \approx 1.4$, $m \approx 29 * 1.67 \times 10^{-27} \text{kg}$ ¹, on trouve $u \approx 340 \text{ms}^{-1} \approx 1220 \text{km/h}$.

Pour de l'hélium (masse atomique 4) à la pression et température de l'atmosphère standard, on trouve $u \approx 1000 \text{ms}^{-1} \approx 3600 \text{km/h}$. La vitesse du son dans l'hélium est 3 fois plus élevée que dans l'air. Dans l'**expérience du cours**, la voix est modifiée vers les hautes fréquences: en effet les "cordes vocales" et l'ensemble de la cage thoracique sont des "cavités résonantes" (voir Section 5.3), dont les fréquences propres sont proportionnelles à la vitesse de propagation u .

ATTENTION, la vitesse u n'a RIEN A VOIR AVEC la VITESSE v' : alors que u est la vitesse du son, v' est la vitesse fluide du gaz dans la perturbation. Voir l'expérience de la chaîne linéaire d'oscillateurs.

Perturbations de pression, de densité et de vitesse.

¹L'air est composé à peu près de 3/4 d'azote (N_2 , masse atomique $2*14$), et 1/4 d'oxygène (O_2 , masse atomique $2*16$), donc une masse atomique moyenne d'environ 29

Soit l'expérience suivante. On donne, en $x = 0$, un signal $h(t)$ sous la forme d'une perturbation de pression

$$h(t) = P'(x = 0, t)$$

et on suppose que le signal se transmet par une onde progressive. La question est de calculer les perturbations de pression $P'(x, t)$, de densité $\rho(x, t)$ et de vitesse $v'_x(x, t)$ en tout point de l'espace-temps.

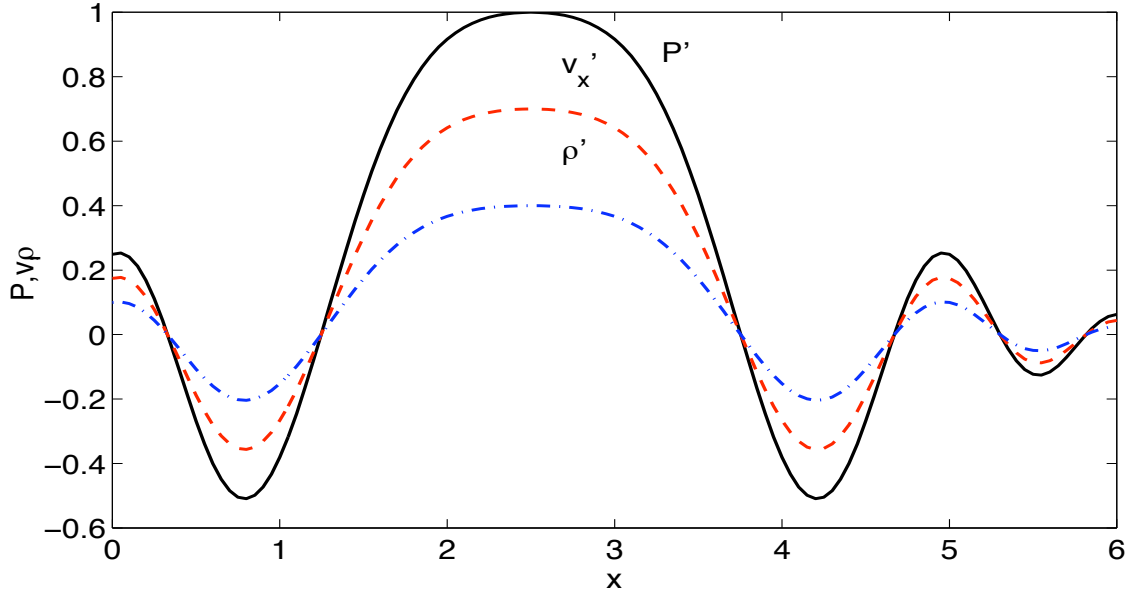


Figure 3: Perturbations de pression P' , de vitesse v'_x et de densité ρ' dans une onde sonore.

Comme on sait que P' est solution progressive de l'Eq. d'Alembert, on a $P'(x, t) = f(\alpha) = f(x - ut)$. En particulier, en $x = 0$, donc $f(-ut) = h(t)$, autrement dit $f(\alpha) = h(-\alpha/u)$. Ainsi,

$$P'(x, t) = h\left(-\frac{x}{u} + t\right).$$

La perturbation de vitesse $v'_x(x, t)$ s'obtient de l'Eq.(10):

$$\frac{\partial v'_x}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P'}{\partial x}$$

Or,

$$\frac{\partial P'}{\partial x} = \frac{dh}{dt'} \Big|_{t'=t-x/u} \left(\frac{-1}{u} \right)$$

Donc

$$v'_x(x, t) = \frac{1}{\rho_0 u} \int_0^t \frac{dh}{dt'} \Big|_{t'=t-x/u} dt' = \frac{1}{\rho_0 u} h \Big|_{t=t-x/u} = \frac{1}{\rho_0 u} P'(x, t)$$

La perturbation de densité s'obtient de l'Eq.(12):

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} = \frac{\rho_0}{\gamma P_0} \frac{\partial P'}{\partial t} = \frac{1}{u^2} \frac{\partial P'}{\partial t}$$

et en intégrant sur le temps, on obtient

$$\rho'(x, t) = \frac{1}{u^2} P'(x, t) .$$

Les perturbations de pression, densité et vitesse sont esquissées à la Figure 3. Elles ont la même forme, et sont en phase. On notera que le temps $t' = t - x/u$ est un temps retardé de la durée de la propagation du signal entre son “émission” en $x = 0$ et sa “réception” en $x \neq 0$.

4 Principe de superposition linéaire

Soit une source no.1 (p.ex. un haut-parleur) produisant un signal $h_1(t)$. L'onde émise est notée $\psi_1(\vec{x}, t)$.

Soit une source no.2 (p.ex. un haut-parleur) produisant un signal $h_2(t)$. L'onde émise est notée $\psi_2(\vec{x}, t)$.

L'onde résultant du signal $h_1(t)$ amplifié d'un facteur a_1 est $a_1\psi_1(\vec{x}, t)$.

L'onde résultant du signal $h_2(t)$ amplifié d'un facteur a_2 est $a_2\psi_2(\vec{x}, t)$.

Lorsque les 2 sources sont en fonction, l'onde résultant du signal $h_1(t)$ amplifié d'un facteur a_1 et du signal $h_2(t)$ amplifié d'un facteur a_2 est:

$$\boxed{\psi(\vec{x}, t) = a_1\psi_1(\vec{x}, t) + a_2\psi_2(\vec{x}, t)} . \quad (24)$$

Ce principe dit de **superposition linéaire** est vrai pour toute solution d'équations linéaires. Physiquement, cela correspond à des amplitudes suffisamment petites.

Pratiquement toute la suite de ce chapitre est consacré à des applications de ce principe de superposition linéaire. On mentionnera les applications et expériences suivantes:

- Croisement d'ondes indéformables
- Réflexion d'ondes
- Onde progressive + onde rétrograde \Rightarrow onde stationnaire
- 2 ondes sinusoïdales de fréquences différentes ω_A et $\omega_B \Rightarrow$ battement de fréquence $|\omega_A - \omega_B|$
- 2 sources de même fréquence, à deux endroits différents \Rightarrow interférences

- N sources de même fréquence, à N endroits différents \Rightarrow diffraction
- N signaux sinusoïdaux de fréquences $n\omega_0$, avec n entier, \Leftrightarrow n'importe quel signal de période $T = 2\pi/\omega_0$ (Fourier, spectre en fréquence, spectre en longueur d'onde)
- Modulation de fréquence, modulation d'amplitude
- Cavités résonantes: ondes stationnaires dans les 3 directions de l'espace
- Guides d'ondes: ondes stationnaires dans 2 directions de l'espace, propageantes dans une direction
- "Paquets d'ondes": voir aussi représentation quantique d'une particule, Ch.IV
- 2 ondes de même fréquence, même direction de propagation, perturbations dans des directions différentes, déphasées \Rightarrow polarisations linéaire, circulaire, elliptique

5 Ondes sinusoïdales. Notation complexe. Relation de dispersion

Dans cette section, nous nous restreindrons au cas unidimensionnel dans l'espace. La généralisation au cas 3D sera faite à la Section suivante.

5.1 Définitions. Cas de l'Eq. d'Alembert

Une onde sinusoïdale pour une perturbation ψ s'écrit, dans le cas unidimensionnel (1D):

$$\boxed{\psi(x, t) = \hat{\psi} \cos(kx - \omega t + \varphi)} \quad (25)$$

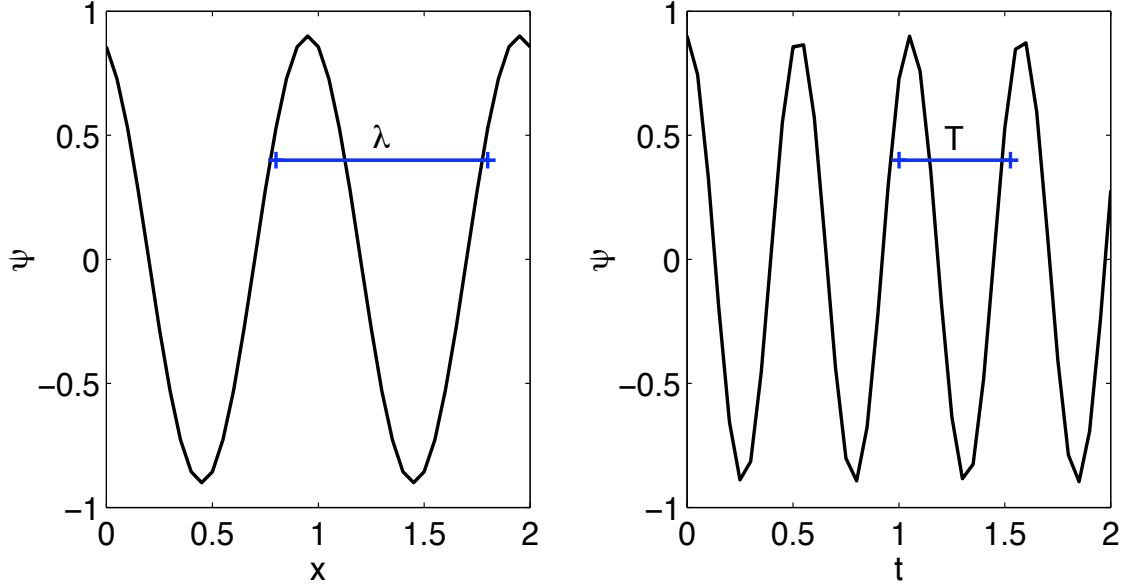
On a les définitions suivantes: $\hat{\psi}$ est l'amplitude, k est le nombre d'onde [m^{-1}], ω est la fréquence angulaire [s^{-1}], φ est le déphasage, $kx - \omega t + \varphi$ est la phase, une surface définie par phase=const est appelée surface de phase. $\hat{\psi}$, k , ω et φ sont des constantes.

Les graphes de la perturbation en fonction de x à t fixé, et en fonction de t à x fixé sont représentés à la Figure 4. La longueur d'onde λ est définie comme la périodicité spatiale de la perturbation à t fixé. On a

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} . \quad (26)$$

La période T dans le temps à x fixé est

$$T = \frac{2\pi}{\omega} . \quad (27)$$


 Figure 4: Onde sinusoïdale à t fixé (gauche) et à x fixé (droite).

La fréquence ν (unité : Hertz, [Hz]), est le nombre d'oscillations par unité de temps à x fixé:

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \quad (28)$$

Si le système est tel que la perturbation doit satisfaire une équation de type d'Alembert, alors on sait que toute solution doit pouvoir s'écrire comme une fonction de $x \pm ut$. On peut récrire l'onde sinusoïdale (25) comme

$$\psi(x, t) = \hat{\psi} \cos \left[k \left(x - \frac{\omega}{k} t \right) + \varphi \right]$$

D'Alembert est satisfait si

$$\boxed{\frac{\omega}{k} = u} \Leftrightarrow \boxed{\omega = ku}. \quad (29)$$

C'est la **relation de dispersion** pour l'Eq. d'Alembert. Elle lie le nombre d'onde et la fréquence angulaire, autrement dit la longueur d'onde et la fréquence:

$$\boxed{u = \lambda \nu}. \quad (30)$$

La vitesse de propagation u s'appelle dans ce cas **vitesse de phase** $\boxed{v_{ph} = \omega/k}$. C'est en effet la vitesse à laquelle les surfaces de phase se déplacent.

Exemple 1: onde sonore dans l'atmosphère standard, son "la": $\nu = 440$ [Hz]. On a $u = 340$ [m/s], et on trouve $\lambda = 0.772$ [m], $k = 8.14$ [m⁻¹], $\omega = 2764.6$ [s⁻¹], $T = 2.273 \times 10^{-3}$ [s].

Exemple 2: lumière rouge dans le vide. C'est une onde EM. On a $u = c = 3 \times 10^8$, la longueur d'onde du rouge est $\lambda = 0.6$ [μm]. Donc $\nu = 5 \times 10^{14}$ [Hz], $\omega = 3.14 \times 10^{15}$ [s⁻¹], $k = 1.047 \times 10^7$ [m⁻¹], $T = 2 \times 10^{-15}$ [s].

Pour les ondes EM dans la matière, on définit l'indice de réfraction N comme le rapport de la vitesse de propagation dans le vide et celle dans la matière:

$$N = \frac{c}{u} = \frac{ck}{\omega} \quad (31)$$

5.2 Notation complexe, démarche générale

On peut récrire une onde sinusoïdale comme:

$$\boxed{\psi(x, t) = \mathcal{Re} \left[\hat{\psi} e^{i(kx - \omega t)} \right]}, \quad (32)$$

c'est-à-dire comme la partie réelle d'une champ complexe $\Psi(x, t) = \hat{\psi} \exp[i(kx - \omega t)]$. La constante $\hat{\psi}$ est l'amplitude complexe, qui peut s'écrire en représentation polaire:

$$\hat{\psi} = |\hat{\psi}| e^{i\varphi}. \quad (33)$$

On a $|\hat{\psi}|$ qui est l'amplitude réelle. Les quantités k, ω, φ sont des constantes réelles². Mais ω et k ne sont pas complètement arbitraires: il existe une relation (la relation de dispersion) qu'ils doivent satisfaire, pour que (32) soit une solution possible des équations du système.

La démarche est schématiquement la suivante.

- Equations de base du système considéré (en général: système d'EDP nonlinéaires pour les champs(x, t))
- Ecrire les champs comme des champs d'équilibre + perturbation(x, t)
- Hypothèse des petites perturbations: linéariser les équations
- Système d'EDP linéaires
- Recherche de solutions sinusoïdales complexes de la forme (32)
- Substitution dans le système d'EDP linéaires
- Substituer formellement

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow -i\omega} \quad (34)$$

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial x} \rightarrow ik} \quad (35)$$

²Pour des ondes amorties, k et ω peuvent être complexes

- Système d'équations algébriques linéaires pour les amplitudes complexes. Soit $\hat{\underline{x}}$ le vecteur des amplitudes complexes. Le système peut s'écrire avec une matrice M :

$$\boxed{M\hat{\underline{x}} = 0} \quad (36)$$

- Ce système n'a de solution non triviale que si son déterminant est nul:

$$\boxed{\det M = 0} \Leftrightarrow \boxed{\omega = \omega(k)}. \quad (37)$$

C'est la relation de dispersion cherchée

- La solution générale du système d'EDP linéarisées s'obtient en superposant des solutions sinusoïdales de type (32) qui satisfont chacune d'elles la relation de dispersion; on prend finalement la partie réelle du résultat.

Nous avons déjà appliqué cette méthode pour trouver des solutions ondulatoires des équations de Maxwell (Chapitre II, Electromagnétisme). Nous appliquerons cette méthode dans le cas des ondes sonores, en exercice.

La solution s'écrit donc formellement

$$\psi(x, t) = \mathcal{Re} \left[\sum_l \hat{\psi}_l e^{i(k_l x - \omega(k_l)t)} \right] \quad (38)$$

si on cherche des solutions périodiques en x , et

$$\psi(x, t) = \mathcal{Re} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\psi}(k) e^{i(kx - \omega(k)t)} dk \right] \quad (39)$$

dans le cas non-périodique; on voit, de ces deux dernières expressions, que les $\hat{\psi}_l$ sont les coefficients de la série de Fourier de ψ , et $\hat{\psi}(k)$ est la transformée de Fourier de ψ .

5.3 Réflexion d'ondes sinusoïdales, ondes stationnaires et cavités résonantes 1D

Expérience du cours: ondes sonores, ondes dans une corde vibrante, ondes EM

Par exemple, considérons une onde sinusoïdale incidente dans une corde vibrante attachée à une de ses extrémités (point fixe). Voir Figure 5. La perturbation incidente se réfléchit. La perturbation résultante est donc

$$\psi(x, t) = \hat{\psi}_I e^{i(-kx - \omega t)} + \hat{\psi}_R e^{i(+kx - \omega t)}$$

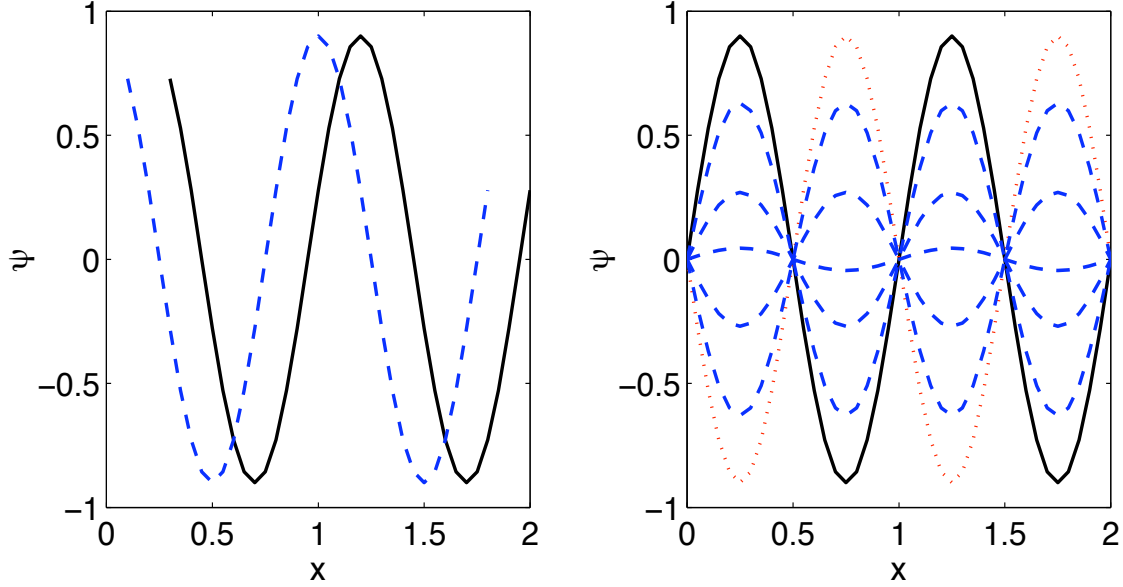


Figure 5: Onde incidente, onde réfléchie, onde stationnaire résultante.

La condition au bord est:

$$\psi(x=0, t) = 0, \forall t,$$

et donc

$$\hat{\psi}_I e^{-i\omega t} + \hat{\psi}_R e^{-i\omega t} = 0, \forall t \Rightarrow \hat{\psi}_R = -\hat{\psi}_I.$$

On voit que l'amplitude de l'onde réfléchie est l'opposé de celle de l'onde incidente. La perturbation résultante s'écrit donc:

$$\psi(x, t) = \hat{\psi}_I (e^{i(-kx-\omega t)} - e^{i(+kx-\omega t)}) = -\hat{\psi}_I e^{-i\omega t} (e^{ikx} - e^{-ikx}) = -2i\hat{\psi}_I e^{-i\omega t} \sin(kx)$$

La solution physique est la partie réelle de ψ . Ecrivant l'amplitude complexe $\psi_I = \hat{a} + i\hat{b}$, on a

$$\boxed{\mathcal{R}e(\psi(x, t)) = 2\hat{b} \sin(kx) \cos(\omega t)}$$

Cette solution est appelée **onde stationnaire**: elle représente une oscillation dans le temps ($\sim \cos(\omega t)$), avec une amplitude fonction de x ($\sim \sin(kx)$). On notera l'existence de points d'amplitude nulle, appelés **noeuds**, entre des points d'amplitude maximale, appelés **ventres** de l'onde stationnaire.

Si, en plus de fixer la corde en $x=0$, on la fixe aussi en $x=L$, alors on doit avoir

$$\psi(x=L, t) = 0, \forall t$$

donc

$$\sin(kL) = 0 \Leftrightarrow kL = n\pi \Leftrightarrow k = \frac{n\pi}{L} \Leftrightarrow \lambda = 2\frac{L}{n} \Leftrightarrow L = \frac{n\lambda}{2}.$$

Autrement dit, **seules certaines longueurs d'onde sont permises**: on doit avoir un nombre entier de demi-longueurs d'onde le long de la corde. Voir Figure 6. Comme les

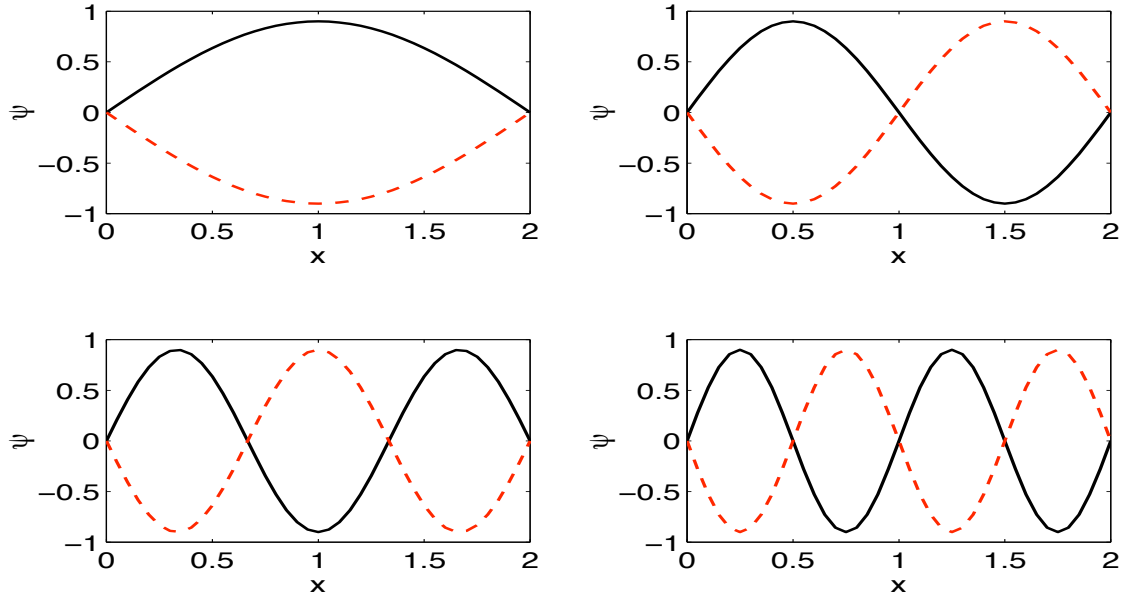


Figure 6: *Modes propres dans une cavité résonante 1D.*

fréquences et les longueurs d'onde sont liées par la relation de dispersion ($\omega = \omega(k)$), cela implique que **seules certaines fréquences sont permises**. Dans le cas d'une relation de dispersion du type $\omega = ku$, ces fréquences sont

$$\omega = \frac{n\pi}{L}u \Leftrightarrow \nu = \frac{nu}{2L}.$$

On les appelle les **fréquences propres** ou **fréquences de résonance** du système, qui constitue ce qu'on appelle une **cavité résonante**. La fréquence pour $n = 1$ est appelée fondamentale, les fréquences pour $n \geq 2$ sont appelées harmoniques. A chacune de ces fréquences propres correspond un mouvement ondulatoire particulier, appelé aussi **mode propre**. Chaque mode propre est donc caractérisé par sa fréquence propre et une structure spatiale particulière de noeuds et ventres.

Expériences du cours: modes propres dans une corde, dans une plaque, dans du verre, etc.

6 Ondes planes et ondes sphériques

Ce sont des généralisations à l'espace 3D.

- Une **onde plane** est une onde sinusoïdale de direction de propagation quelconque. On l'écrit, en représentation complexe,

$$\boxed{\psi(\vec{x}, t) = \mathcal{Re} \left[\hat{\psi} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)} \right]} = |\hat{\psi}| \cos(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t + \varphi) \quad (40)$$

avec $\hat{\psi} = |\hat{\psi}|e^{i\varphi}$ amplitude complexe, \vec{k} vecteur de nombres réels est appelé **vecteur d'onde**, ω fréquence angulaire réelle, φ déphasage réel. La **phase de l'onde** est $\delta = \vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t + \varphi$.

Une **surface de phase** est définie comme le lieu géométrique des points de l'espace où, à un instant t donné, la phase de l'onde est une constante donnée. Dans le cas de l'onde plane, une surface de phase est donc donnée par

$$\vec{k} \cdot \vec{x} = \text{const.}$$

C'est l'équation d'un **plan perpendiculaire à \vec{k}** . D'où le nom “onde plane”. Les plans de phase se déplacent à la vitesse de phase \vec{u} , parallèle au vecteur d'onde \vec{k} : par

$$\boxed{|\vec{u}| = \frac{\omega}{|\vec{k}|}}, \quad \boxed{\vec{u} = |\vec{u}| \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|}} \quad (41)$$

Pour trouver les relations entre les amplitudes, et la relation de dispersion, la méthode est la même que présentée à la section 5.2. La seule différence est la substitution formelle pour l'opérateur ∇ :

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow -i\omega} \quad (42)$$

$$\boxed{\nabla \rightarrow i\vec{k}} \quad (43)$$

Ainsi, par exemple:

$$\boxed{\nabla P \rightarrow \vec{k}\hat{P}} \quad \boxed{\nabla \cdot \vec{v} \rightarrow i\vec{k} \cdot \hat{\vec{v}}} \quad \boxed{\nabla \times \vec{E} \rightarrow i\vec{k} \times \hat{\vec{E}}} \quad (44)$$

- Une **onde sphérique sinusoïdale** s'écrit:

$$\boxed{\psi(\vec{x}, t) = \mathcal{Re} \left[\hat{\psi}(r) e^{i(kr - \omega t)} \right]} = |\hat{\psi}(r)| \cos(kr - \omega t + \varphi) \quad (45)$$

Elle correspond à une perturbation dont les surfaces de phase sont des sphères, se déplaçant à la vitesse $u = \omega/k$ dans la direction radiale. L'amplitude de la perturbation est fonction de la distance r . Si k et ω ont le même signe, la propagation est vers les r croissants: c'est une onde **divergente** (image: vagues créées par un caillou jeté dans l'eau). Le point $r = 0$ joue ainsi le rôle de source ponctuelle émettant dans toutes les directions³. Si k et ω sont de signes opposés, les surfaces de phase se propagent vers les r décroissants: c'est une onde **convergente** (image: vagues créées dans une tasse de café émises depuis la circonférence). Voir Figure 7.

³On peut généraliser les ondes sphériques aux cas où l'amplitude dépend non seulement de r , mais aussi de θ : voir par exemple le champ EM rayonné par une particule accélérée, Chapitre II Electromagnétisme, Section 5.5.1.

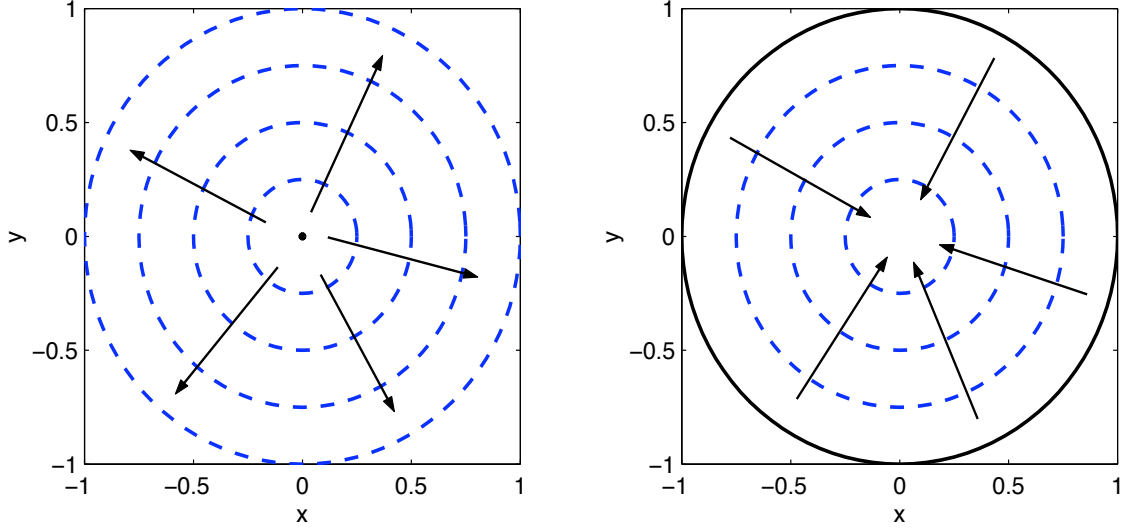


Figure 7: *Surfaces de phase d'une onde sphérique divergente (gauche) et d'une onde sphérique convergente (droite).*

Pour obtenir la relation entre les amplitudes des différentes composantes des champs d'onde, ainsi que la relation de dispersion, la méthode est similaire à celle présentée à la section 5.2. La seule différence est la substitution formelle pour l'opérateur ∇ , qui doit être exprimé en coordonnées sphériques. La dérivée partielle $\partial/\partial r$ qu'il contient opère à la fois sur l'exponentielle et sur l'amplitude. Le système d'EDP des équations de base linéarisées devient ainsi un système d'équations différentielles ordinaire pour les amplitudes $\hat{\psi}(r)$.

Dans le cas de l'onde sonore, à partir des équations de base, Eqs.(7-9), après linéarisation puis utilisation de l'Ansatz d'onde sphérique sinusoïdale, Eq.(45), on trouve finalement une solution de la forme:

$$P'(r, t) = \frac{A}{r} \cos(kr - \omega t + \varphi) \quad (46)$$

$$\vec{v}'(r, t) = \left[\frac{A}{\rho_0 u} \frac{1}{r} \cos(kr - \omega t + \varphi) + \frac{C}{r^2} \sin(kr - \omega t + \varphi) \right] \vec{e}_r \quad (47)$$

avec la relation de dispersion

$$\omega = ku = k \sqrt{\frac{\gamma P_0}{\rho_0}}. \quad (48)$$

On remarque que l'amplitude de la perturbation de pression varie avec la distance à la source en $\sim 1/r$; l'amplitude de la perturbation de vitesse a un 1er terme en $\sim 1/r$, qui va dominer, pour de grandes distances, sur le 2e terme en $\sim 1/r^2$. [Dans le cas du champ EM émis par une charge accélérée, on trouve aussi une combinaison de termes en $\sim 1/r$ et en $\sim 1/r^2$, voir Chapitre II Electromagnétisme, Section 5.5.1].

Une application des ondes sphériques est le principe de Huygens, voir Section 9.

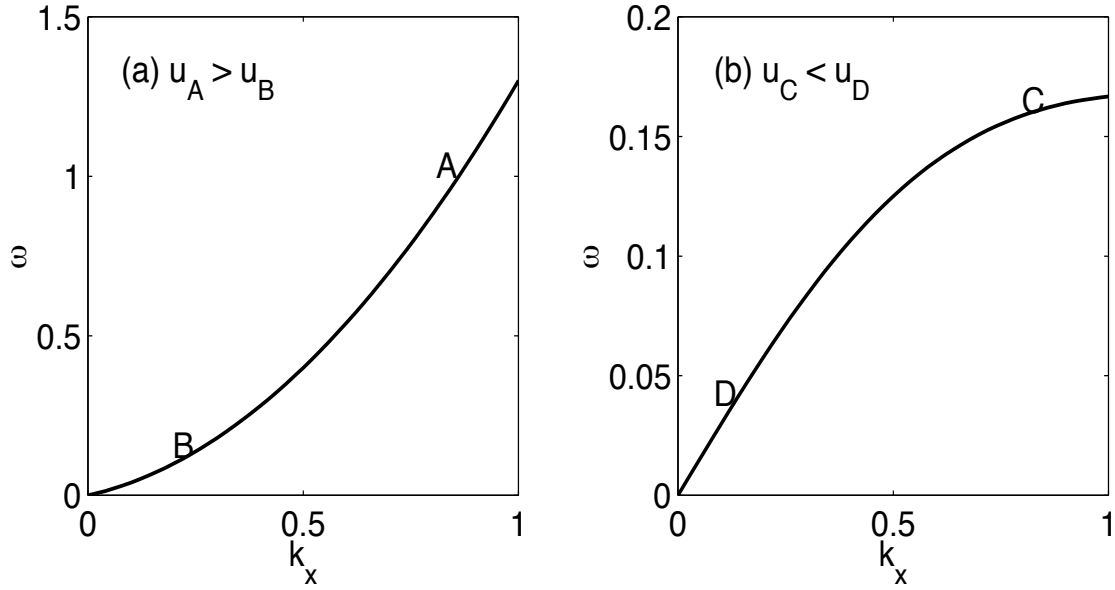


Figure 8: Relations de dispersions. Cas (a) et (b).

7 Vitesse de phase et vitesse de groupe

Il y a des cas où la vitesse de phase ne dépend pas de la longueur d'onde (ni donc de la fréquence), autrement dit $u = \omega/|\vec{k}|$ est indépendant de \vec{k} et de ω . On dit alors que le milieu considéré est **non dispersif** pour les ondes. Les ondes sont indéformables. C'est le cas de tout système obéissant à des équations de type d'Alembert, par exemple l'onde sonore $u = \sqrt{\gamma P_0/\rho_0}$.

Mais il y a aussi des cas où la vitesse de phase dépend de la longueur d'onde (ou de la fréquence). Voir Figure 8. On dit alors que le milieu considéré est **dispersif** pour les ondes. Les ondes sont déformables. On peut avoir des cas où les courtes longueurs d'onde (A) ont une vitesse de phase supérieure aux grandes longueurs d'onde (B) (Fig.8a). On peut avoir des cas où les grandes longueurs d'onde (D) ont une vitesse de phase supérieure aux courtes longueurs d'onde (C) (Fig.8b).

Le but de ce qui suit est d'introduire la notion de **vitesse de groupe** \vec{v}_g . La démarche est la suivante.

- Faire un “paquet d'onde” en superposant des ondes sinusoïdales de fréquences voisines.
- Regarder comment l'amplitude (“l'enveloppe”) de la perturbation se propage.

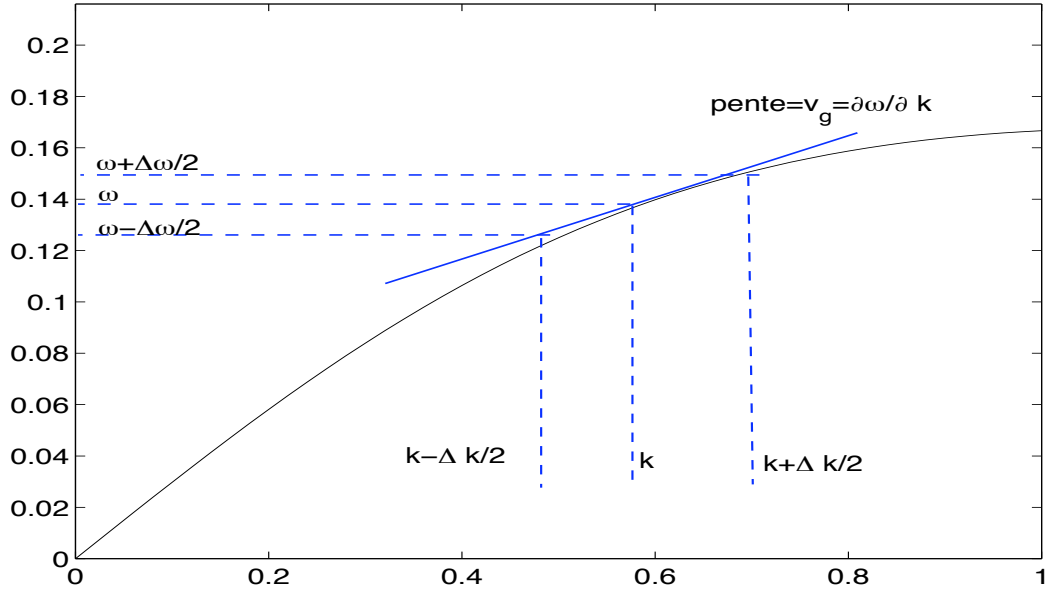


Figure 9: *Superposition de deux ondes de fréquences voisines.*

- Montrer que l'enveloppe se propage à la vitesse

$$\boxed{\vec{v}_g = \frac{\partial \omega}{\partial \vec{k}}} \quad (49)$$

où $\omega = \omega(\vec{k}) = \omega(k_x, k_y, k_z)$ est la relation de dispersion.

Cas 1D. Battements

Superposons 2 ondes planes de même amplitude, de fréquences angulaires voisines, ω_1 et ω_2 . Soit $\omega = \omega(k)$ la relation de dispersion. Voir Figure 9. Les nombres d'onde correspondants, k_1 et k_2 seront également voisins.

$$\begin{aligned} k_1 &= k_0 - \frac{\Delta k}{2} \\ k_2 &= k_0 + \frac{\Delta k}{2} \end{aligned} \quad (50)$$

Par la relation de dispersion, on a donc

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \omega\left(k_0 - \frac{\Delta k}{2}\right) \approx \omega(k_0) - \left.\frac{d\omega}{dk}\right|_{k_0} \frac{\Delta k}{2} \\ \omega_2 &= \omega\left(k_0 + \frac{\Delta k}{2}\right) \approx \omega(k_0) + \left.\frac{d\omega}{dk}\right|_{k_0} \frac{\Delta k}{2}. \end{aligned} \quad (51)$$

Soit

$$\omega_0 = \omega(k_0) \quad v_g = \left.\frac{d\omega}{dk}\right|_{k_0}.$$

L'onde résultante s'écrit alors

$$\begin{aligned}
 \psi(x, t) &= \hat{\psi} \left(e^{i(k_1 x - \omega_1 t)} + e^{i(k_2 x - \omega_2 t)} \right) \\
 &\approx \hat{\psi} \left(e^{i[(k_0 - \Delta k/2)x - (\omega_0 - v_g \Delta k/2)t]} + e^{i[(k_0 + \Delta k/2)x - (\omega_0 + v_g \Delta k/2)t]} \right) \\
 &= \hat{\psi} e^{i(k_0 x - \omega_0 t)} \left(e^{-i(\Delta k x/2 - v_g \Delta k t/2)} + e^{i(\Delta k x/2 - v_g \Delta k t/2)} \right) \\
 &= \hat{\psi} e^{i(k_0 x - \omega_0 t)} 2 \cos \left(\frac{\Delta k}{2} (x - v_g t) \right)
 \end{aligned} \tag{52}$$

Ceci représente une onde plane de fréquence angulaire ω_0 égale à la moyenne arithmétique

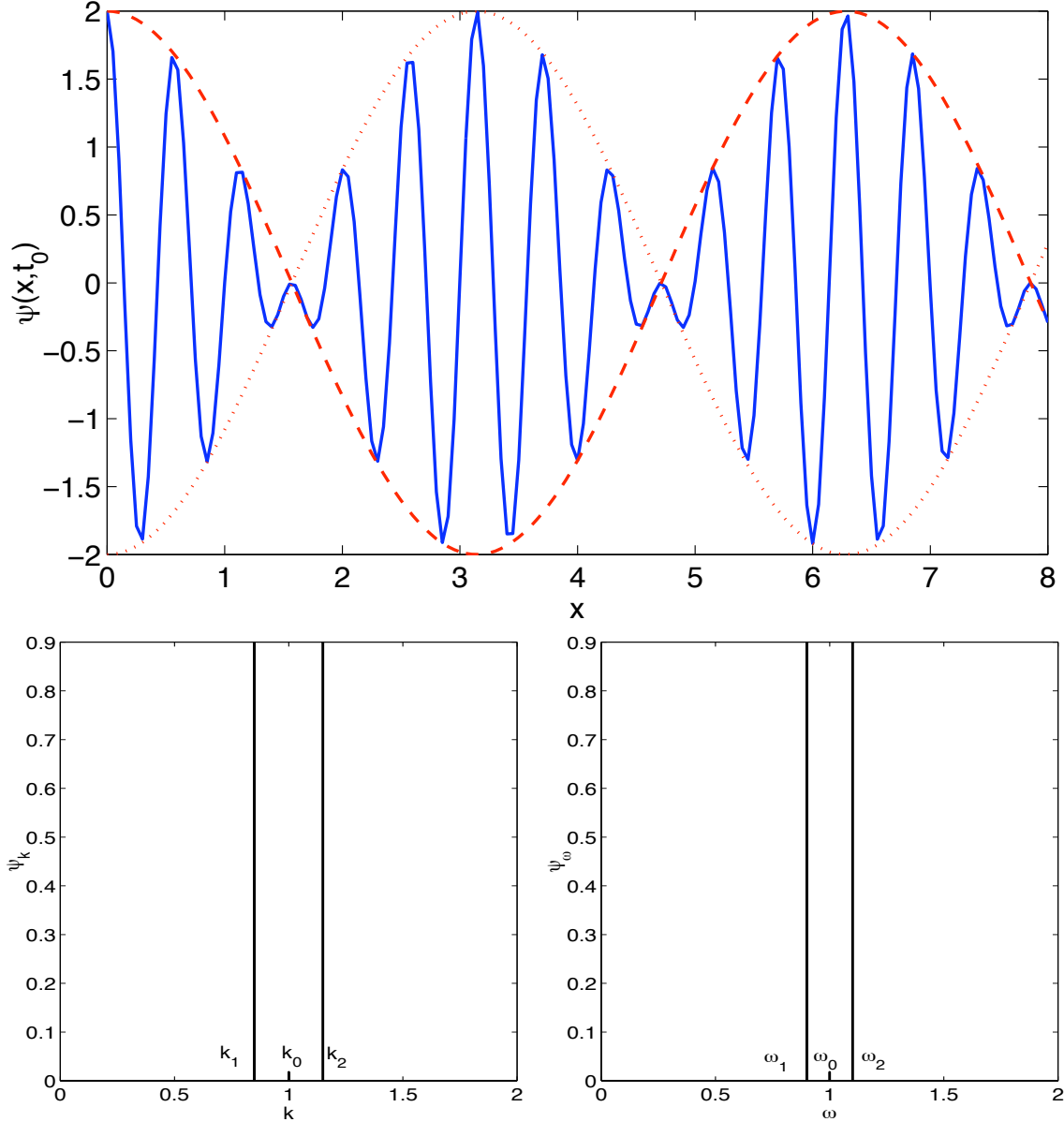


Figure 10: *Battement résultant de la superposition de 2 ondes de fréquences voisines.*

des 2 fréquences, dont l'amplitude est modulée par le terme en $\sim \cos$. **Cette modulation d'amplitude, donc "l'enveloppe" de la perturbation, est du type $f(x - v_g t)$, donc se propage à la vitesse v_g .** Voir Figure 10.

Cas 3D. Paquet d'ondes

On généralise au cas 3D et en superposant linéairement plusieurs ondes planes de vecteurs d'onde \vec{k} différents. C'est la généralisation de l'Eq.(39). Omettant \mathcal{Re} dans ce qui suit,

$$\psi(\vec{x}, t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \iiint \hat{\psi}(\vec{k}) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega(\vec{k})t)} d^3k \quad (53)$$

avec l'amplitude complexe

$$\hat{\psi}(\vec{k}) = |\hat{\psi}(\vec{k})| e^{i\varphi(\vec{k})} \quad (54)$$

qui est la transformée de Fourier 3D de $\psi(\vec{x}, 0)$. On suppose l'amplitude $|\hat{\psi}(\vec{k})|$ maximale

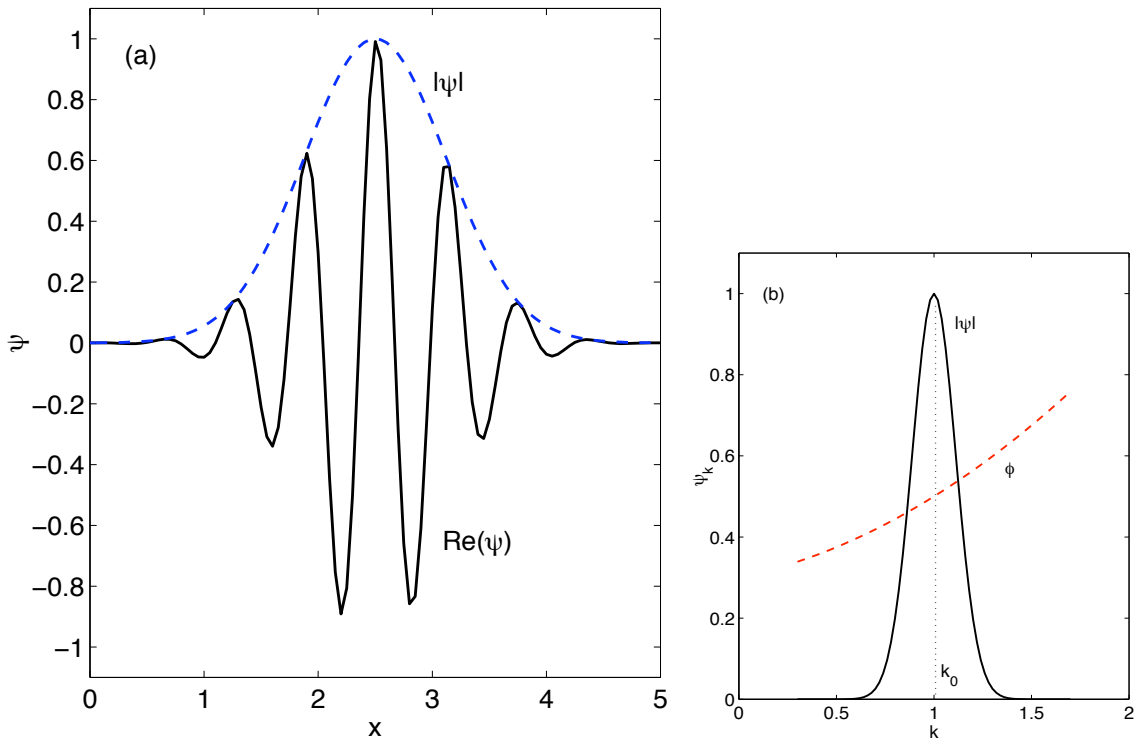


Figure 11: *Paquet d'onde dans l'espace réel à un instant donné (a) et dans l'espace de Fourier k (b).*

en \vec{k}_0 , localisée autour de \vec{k}_0 , (Figure 11), et on fait des développements limités au premier ordre:

$$\varphi(\vec{k}) \approx \varphi(\vec{k}_0) + (\vec{k} - \vec{k}_0) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \vec{k}} \Big|_{\vec{k}=\vec{k}_0}$$

$$\omega(\vec{k}) \approx \omega(\vec{k}_0) + (\vec{k} - \vec{k}_0) \cdot \frac{\partial \omega}{\partial \vec{k}} \Big|_{\vec{k}=\vec{k}_0}$$

Notons

$$\vec{x}_0 = -\frac{\partial \varphi}{\partial \vec{k}} \Big|_{\vec{k}=\vec{k}_0}, \quad \vec{v}_g = \frac{\partial \omega}{\partial \vec{k}} \Big|_{\vec{k}=\vec{k}_0}, \quad \varphi_0 = \varphi(\vec{k}_0), \quad \omega_0 = \omega(\vec{k}_0)$$

Ainsi

$$\begin{aligned}\psi(\vec{x}, t) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \iiint |\hat{\psi}(\vec{k})| e^{i[\varphi_0 - (\vec{k} - \vec{k}_0) \cdot \vec{x}_0 + \vec{k} \cdot \vec{x} - \omega_0 t - (\vec{k} - \vec{k}_0) \cdot \vec{v}_g t]} d^3 k \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{i(\vec{k}_0 \cdot \vec{x} - \omega_0 t + \varphi_0)} \iiint |\hat{\psi}(\vec{k})| e^{i(\vec{k} - \vec{k}_0)(\vec{x} - \vec{x}_0 - \vec{v}_g t)} d^3 k\end{aligned}\quad (55)$$

L'intégrale ci-dessus donne un résultat de module maximal lorsque $\vec{x} - \vec{x}_0 - \vec{v}_g t = 0$, donc

$$\boxed{|\psi(\vec{x}, t)| \text{ maximal} \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{x}_0 + \vec{v}_g t} \quad (56)$$

ce qui veut dire que le pic de "l'enveloppe" de l'onde se déplace à la vitesse

$$\boxed{\vec{v}_g = \frac{\partial \omega}{\partial \vec{k}}} \quad (57)$$

La vitesse de groupe \vec{v}_g est ainsi la vitesse à laquelle des impulsions (donc l'information) se propage. C'est la vitesse à laquelle la modulation d'amplitude se propage.

8 Energie et intensité d'une onde

Nous venons de voir qu'une onde transporte de l'information. Nous allons voir qu'elle transporte aussi de l'énergie.

8.1 Généralités

L'intensité d'une onde est définie comme le flux d'énergie, quantité d'énergie traversant une surface, par unité de temps et par unité de surface. Unités: [W/m²].

Pour les ondes sinusoïdales ($\sim e^{i\omega t}$), on définit **l'intensité moyennée sur une période**:

$$\langle I \rangle = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} I dt. \quad (58)$$

L'intensité est une quantité **quadratique** de la perturbation

$$I \propto \psi^2; \quad \langle I \rangle \propto |\hat{\psi}|^2; \quad (59)$$

ou, plus généralement,

$$I \propto \psi_a \psi_b; \quad \langle I \rangle \propto \boxed{\langle \psi_a \psi_b \rangle = \frac{1}{2} |\hat{\psi}_a| |\hat{\psi}_b| \cos \delta = \frac{1}{2} \text{Re} [\hat{\psi}_a^* \hat{\psi}_b] = \frac{1}{2} \text{Re} [\hat{\psi}_a \hat{\psi}_b^*]}, \quad (60)$$

où δ est le déphasage entre $\hat{\psi}_a$ et $\hat{\psi}_b$, qui sont les amplitudes complexes de 2 composantes de la perturbation, et $*$ indique le complexe conjugué. Preuve:

$$\begin{aligned} \langle \psi_a \psi_b \rangle &= \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} |\hat{\psi}_a| |\hat{\psi}_b| \cos(kx - \omega t + \varphi_a) \cos(kx - \omega t + \varphi_b) dt \\ &= \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} |\hat{\psi}_a| |\hat{\psi}_b| \frac{1}{2} (\cos(\varphi_a - \varphi_b) + \cos(2kx - 2\omega t + \varphi_a + \varphi_b)) dt \\ &= \frac{1}{2} |\hat{\psi}_a| |\hat{\psi}_b| \cos(\varphi_a - \varphi_b) = \frac{1}{2} |\hat{\psi}_a| |\hat{\psi}_b| \cos \delta . \end{aligned}$$

Avec $\hat{\psi}_a^* = |\hat{\psi}_a| e^{-i\varphi_a}$ et $\hat{\psi}_b = |\hat{\psi}_b| e^{i\varphi_b}$, on a

$$\frac{1}{2} \mathcal{Re} [\hat{\psi}_a^* \hat{\psi}_b] = \frac{1}{2} \mathcal{Re} [|\hat{\psi}_a| |\hat{\psi}_b| e^{i(\varphi_a - \varphi_b)}] = \frac{1}{2} |\hat{\psi}_a| |\hat{\psi}_b| \cos \delta .$$

[N.B. On définit parfois une amplitude dite *effective* $\boxed{\hat{\psi}_{eff} = \hat{\psi}/\sqrt{2}}$.]

Le principe de superposition étant valable pour les quantités linéaires, les perturbations s'additionnent, mais **en général PAS les intensités**. On note que

$$\mathcal{Re}(\psi_1) \mathcal{Re}(\psi_2) \neq \mathcal{Re}(\psi_1 \psi_2) \quad (61)$$

Par exemple, le membre de gauche est, pour 2 composantes d'ondes de même longueur d'onde (donc même k et même ω), mais de déphasages $\varphi_1 \neq \varphi_2$,

$$|\hat{\psi}_1| |\hat{\psi}_2| \cos(kx - \omega t + \varphi_1) \cos(kx - \omega t + \varphi_2) ,$$

alors que le membre de droite est

$$|\hat{\psi}_1| |\hat{\psi}_2| \cos(2kx - 2\omega t + \varphi_1 + \varphi_2) .$$

On distingue 2 cas limites:

1. Dans la réalité, bien des sources d'ondes sont constituées d'un nombre immense d'atomes qui émettent du rayonnement; par exemple, dans le cas d'une lampe à incandescence, ce sont les atomes chauffés qui émettent du rayonnement électromagnétique, et les émissions d'atomes différents ne sont pas corrélées: on parle alors de sources **incohérentes**: les phases entre les différentes émissions sont aléatoires, donc la phase de l'onde résultante aussi.

2. Dans certains cas, comme le LASER par exemple, les émissions de lumière sont **cohérentes** et la phase de l'onde résultante est bien déterminée.

Prenons le cas de 2 ondes, de même fréquence, **incohérentes**, c.-à-d qui ont un déphasage aléatoire, alors l'intensité résultante est

$$\langle I \rangle = \langle I_1 \rangle + \langle I_2 \rangle \quad (62)$$

Si les 2 ondes, de même fréquence, sont **cohérentes**, c.-à-d ont un déphasage bien déterminé, alors l'intensité résultante est

$$\boxed{\langle I \rangle = \langle I_1 \rangle + \langle I_2 \rangle + 2\sqrt{\langle I_1 \rangle \langle I_2 \rangle} \cos \delta \neq \langle I_1 \rangle + \langle I_2 \rangle} . \quad (63)$$

Preuve: l'onde résultante s'écrit

$$\psi(x, t) = \mathcal{R}e \left[|\hat{\psi}_1| e^{i(kx - \omega t + \varphi_1)} + |\hat{\psi}_2| e^{i(kx - \omega t + \varphi_2)} \right]$$

Et l'intensité de l'onde résultante est donc

$$\langle I \rangle \propto \langle |\psi|^2 \rangle = |\hat{\psi}_1|^2 + |\hat{\psi}_2|^2 + 2|\hat{\psi}_1||\hat{\psi}_2| \langle \cos \delta \rangle$$

où $\delta = \varphi_2 - \varphi_1$ est le déphasage entre les 2 ondes. Ainsi, dans le cas (1.) d'ondes incohérentes, le déphasage δ est une variable aléatoire de densité de probabilité uniforme entre 0 et 2π . Sa moyenne sur un intervalle de temps T est 0. Et on a $\langle I \rangle = \langle I_1 \rangle + \langle I_2 \rangle$. Dans le cas (2.) d'ondes cohérentes, le déphasage δ a une valeur bien déterminée et constante dans le temps. Sa moyenne sur un intervalle de temps T est δ . On a donc

$$\langle I \rangle = \langle I_1 \rangle + \langle I_2 \rangle + 2\sqrt{\langle I_1 \rangle \langle I_2 \rangle} \cos \delta .$$

8.2 Intensité d'une onde plane dans un gaz parfait fluide parfait

Soit un gaz parfait fluide parfait de densité de masse ρ_0 , pression P_0 , indice d'adiabaticité γ , initialement au repos $\vec{v}_0 = 0$. Soit une onde de fréquence angulaire ω se propageant dans la direction x . Soit une section de fluide de surface perpendiculaire à x , d'aire A , à une position x fixée. Voir Figure 12. On a, à l'endroit x de la section,

$$P' = |\hat{P}| \cos(kx - \omega t + \varphi) \quad \vec{v}' = |\hat{v}| \cos(kx - \omega t + \varphi) \vec{e}_x$$

(en effet les perturbations de pression et de vitesse sont en phase, voir section 3.3, et la perturbation de vitesse est parallèle à la direction de propagation, voir section 2).

Par définition, l'intensité moyennée sur une période est le travail effectué sur la section de fluide par unité de temps, divisé par A , et moyenné sur une période:

$$\begin{aligned} \langle I \rangle &= \left\langle \frac{\text{force} \cdot \text{vitesse}}{\text{surface}} \right\rangle = \langle (P_0 + P') (v_0 + v') \rangle \\ \langle I \rangle &= \frac{1}{T} \int_0^T \left(P_0 + |\hat{P}| \cos(kx - \omega t + \varphi) \right) |\hat{v}| \cos(kx - \omega t + \varphi) dt \end{aligned}$$

Avec

$$\frac{1}{T} \int_0^T \cos(kx - \omega t + \varphi) dt = 0, \quad \text{et} \quad \frac{1}{T} \int_0^T \cos^2(kx - \omega t + \varphi) dt = \frac{1}{2},$$

on obtient

$$\boxed{\langle I \rangle = \frac{1}{2} |\hat{P}| |\hat{v}|} , \quad (64)$$

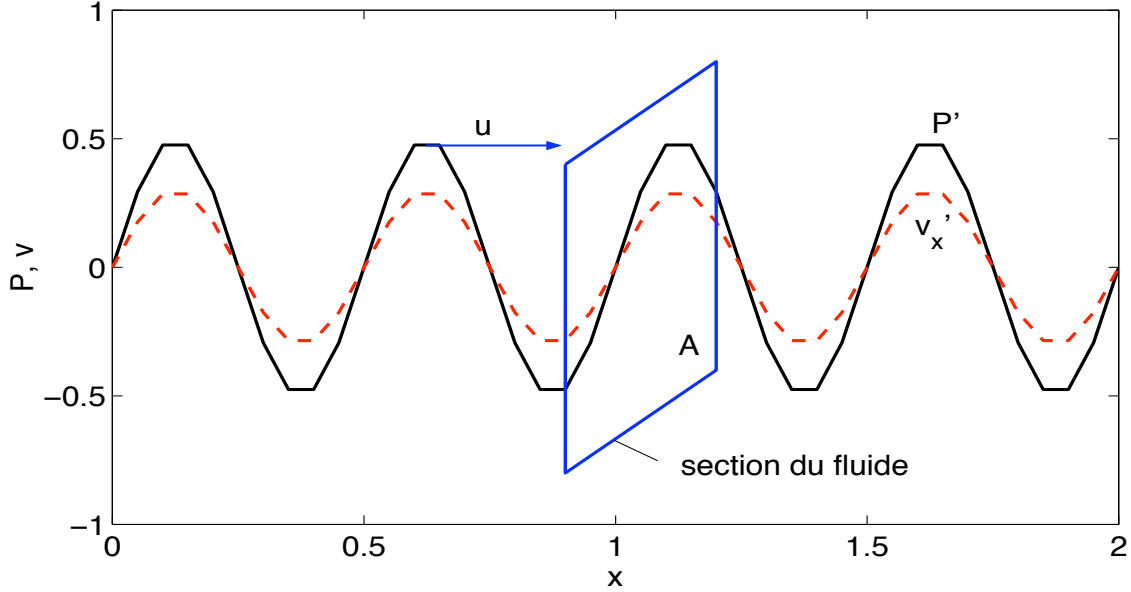


Figure 12: Onde plane sonore dans un fluide parfait gaz parfait. Calcul de l'intensité.

ou, de façon équivalente, en représentation complexe et en notant $*$ le complexe conjugué,

$$\langle I \rangle = \frac{1}{2} \text{Re} \left(\hat{P} \hat{v}^* \right) = \frac{1}{2} \text{Re} \left(\hat{P}^* \hat{v} \right). \quad (65)$$

Cette intensité est mesurée **perpendiculairement à la direction de propagation** $\vec{e}_k = \vec{k}/|\vec{k}|$. On définit le **flux d'énergie** associé à l'onde,

$$\langle \vec{S} \rangle = \langle I \rangle \vec{e}_k \quad (66)$$

On a donc

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{2} |\hat{P}| \hat{v}. \quad (67)$$

A partir des équations linéarisées, Eqs(10,11, 12), et de la relation de dispersion $u = \omega/k = \sqrt{\gamma P_0/\rho_0}$, pour une onde plane en représentation complexe, on obtient des expressions équivalentes pour l'intensité:

$$\rho_0 \frac{\partial v'_x}{\partial t} = -\frac{\partial P'}{\partial x} \Rightarrow \rho_0(-i\omega)\hat{v} = -ik\hat{P} \Rightarrow \hat{v} = \frac{1}{\rho_0 u} \hat{P} \quad (68)$$

$$\frac{\partial P'}{\partial t} - \frac{\gamma P_0}{\rho_0} \frac{\partial \rho'}{\partial t} = 0 \Rightarrow \hat{\rho} = \frac{1}{u^2} \hat{P} \quad (69)$$

Si ξ est le champ de déplacement selon la direction x , on a

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = v'_x \Rightarrow \hat{\xi} = \frac{i}{\omega} \hat{v} \quad (70)$$

$$\Rightarrow \boxed{\langle I \rangle = \frac{1}{2} |\hat{P}| |\hat{v}| = \frac{1}{2 \rho_0 u} |\hat{P}|^2 = \frac{1}{2} \rho_0 u |\hat{v}|^2 = \frac{1}{2} \rho_0 u \omega^2 |\hat{\xi}|^2 = \frac{u}{2 \rho_0} |\hat{\rho}|^2} \quad (71)$$

N.B. En fonction des amplitudes *effectives*, $\hat{P}_{eff} = \hat{P}/\sqrt{2}$ etc, on a

$$\langle I \rangle = |\hat{P}_{eff}| |\hat{v}_{eff}| = \frac{1}{\rho_0 u} |\hat{P}_{eff}|^2 = \rho_0 u |\hat{v}_{eff}|^2 = \rho_0 u \omega^2 |\hat{\xi}_{eff}|^2 = \frac{u}{\rho_0} |\hat{\rho}_{eff}|^2$$

N.B. On remarque que dans tous les cas l'intensité est une quantité quadratique des amplitudes de la perturbation: $\langle I \rangle \propto |\hat{\psi}_a| |\hat{\psi}_b|$, avec $\hat{\psi}_a, \hat{\psi}_b = \hat{v}$ ou \hat{P} ou $\hat{\xi}$ ou $\hat{\rho}$.

8.3 Mesure des intensités

On mesure les intensités, en particulier de l'onde sonore, sur une échelle logarithmique, par rapport à une intensité de référence $\langle I_0 \rangle$. Pour l'onde sonore, on choisit

$$\boxed{\langle I_0 \rangle = 10^{-12} [\text{W/m}^2]},$$

ce qui correspond, pour les conditions atmosphériques standard ($u = 343 [\text{m/s}]$), à une amplitude de perturbation de pression

$$\boxed{|\hat{P}_0| \approx 3 \times 10^{-5} [\text{Pa}]}, \quad \text{ou} \quad \boxed{|\hat{P}_0|_{eff} \approx 2.1 \times 10^{-5} [\text{Pa}]}$$

et on définit l'intensité en **décibels**, [dB], par

$$\boxed{\langle I \rangle [\text{dB}] = 10 \log_{10} \frac{\langle I \rangle}{\langle I_0 \rangle}} \quad (72)$$

Un son d'intensité $I + 10[\text{dB}]$ est 10 fois plus intense qu'un son d'intensité $I[\text{dB}]$. Un son d'intensité $I + 20[\text{dB}]$ est 100 fois plus intense qu'un son d'intensité $I[\text{dB}]$. Doubler l'intensité $\Rightarrow +3[\text{dB}]$. Quadrupler l'intensité $\Rightarrow +6[\text{dB}]$. Et ainsi de suite.

Le seuil d'audibilité de l'oreille humaine "standard" se situe, pour un son de fréquence $\nu = 1000[\text{Hz}]$, aux environs de $\langle I \rangle = 2.5 \times 10^{-12} [\text{W/m}^2]$, soit environ $4[\text{dB}]$. En **exercice**, on calculera à quelles amplitudes de perturbation de pression, de vitesse, de déplacement et de densité cela correspond.

Le seuil de douleur pour l'oreille humaine se situe à environ $\langle I \rangle = 130[\text{dB}]$. Cela correspond à des amplitudes:

$$|\hat{P}| = 94[\text{Pa}] \quad |\hat{v}| = 0.21[\text{m/s}] \quad |\hat{\xi}| = 0.034[\text{mm}]$$

L'oreille humaine n'est pas sensible de la même façon à toutes les fréquences. La sensibilité maximale est entre 1000 et 4000[Hz], et décroît rapidement en dehors de ces valeurs. Fletcher et Munson, en 1933, ont mesuré les courbes d'intensité réelle, pour une intensité perçues subjectivement équivalente, en fonction de la fréquence.

Pour en savoir plus sur la perception physiologique des ondes sonores:

<http://www.phys.unsw.edu.au/~jw/dB.html>

<http://www.phys.unt.edu/~matteson/1251-001/mwf14.ppt>

http://www.inrp.fr/Acces/JIPSP/phymus/m_lexiq/lexbc1.htm

Expériences: bruits

Additionner 2 sources de bruit, de même puissance, non corrélées (phase relative aléatoire): +3[dB]. (Car $I = I_1 + I_2 = 2I_1$, et $10 \log_{10} 2 = 3.0103$)

Additionner 2 sources de bruit, de même puissance, en opposition de phase: ~ -15 [dB]. (Les signaux en provenance directe des 2 hauts-parleurs s'annulent: $\psi = \psi_1 + \psi_2$, et $\psi_2 = -\psi_1$. On aurait donc $-\infty$ [dB]. Il ne reste que le son réfléchi par les parois de la salle. D'où, pour les conditions de l'expérience, les -15[dB].)

Additionner 2 sources de bruit, de même puissance, en phase: +6[dB]. (On a $\psi = \psi_1 + \psi_2 = 2\psi_1$, donc $I = \psi^2 = 4\psi_1^2 = 4I_1$.)

8.4 Intensité d'une onde sphérique sinusoïdale

On a vu deux exemples d'ondes émises par des sources ponctuelles: l'onde sonore et l'onde EM. Dans les deux cas, l'intensité de la perturbation varie avec la distance r à la source ⁴ comme $\sim 1/r$.

$$\psi = \frac{\hat{A}}{r} e^{i(kr - \omega t)}$$

L'intensité d'une telle onde, proportionnelle au carré de l'amplitude de la perturbation, est donc

$$\boxed{\langle I \rangle \propto \frac{|\hat{A}|^2}{r^2}}. \quad (73)$$

L'intensité est inversement proportionnelle au carré de la distance.

On peut en déduire la puissance de la source. En effet, si on considère une sphère Σ de rayon r centrée sur la source, la puissance totale de l'onde traversant Σ sera:

$$P = \oint \langle I \rangle d\sigma \propto 4\pi r^2 \frac{|\hat{A}|^2}{r^2}$$

qui est **indépendant de r** . Ceci nous indique que l'énergie transportée par l'onde est conservée (toute la puissance de la source se retrouve sur la surface Σ , quelle que soit la distance r).

⁴Sauf tout près de la source, où on a un terme en $\sim 1/r^2$, voir Eq.(47); mais ce terme a une phase telle qu'il ne contribue PAS à l'intensité moyennée sur une période.

8.5 Conservation de l'énergie

Il existe une équation de continuité pour l'énergie d'une onde. Soit \vec{S} le flux d'énergie [W/m²]. Soit \mathcal{E} la densité d'énergie [J/m³]. On a

$$\boxed{\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{S} = 0} \quad (74)$$

Avec le théorème de Gauss ("de la divergence"), considérant un volume V dont le bord est la surface fermée notée ∂V ,

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \mathcal{E} d^3x = - \oiint_{\partial V} \vec{S} \cdot d\vec{\sigma}} \quad (75)$$

Le terme de gauche est la variation par unité de temps de l'énergie de l'onde contenue dans V . Le terme de droite est le flux entrant à travers la surface ∂V . On a une analogie avec l'équation de continuité de la masse dans le cas des fluides, voir CH.I. On a vu également une équation de forme similaire pour l'énergie EM, voir CH.II.

Preuve, cas de l'onde sonore.

Le flux d'énergie de l'onde sonore est

$$\boxed{\vec{S} = P' \vec{v}'}, \quad (76)$$

voir Eq.(67) dans le cas sinusoïdal. Donc

$$\nabla \cdot \vec{S} = \nabla P' \cdot \vec{v}' + P' \nabla \cdot \vec{v}'$$

De l'équation d'Euler linéarisée, Eq.(10), $\nabla P' = -\rho_0(\partial \vec{v}' / \partial t)$; de l'équation de continuité linéarisée, Eq.(11), $\nabla \cdot \vec{v}' = (-1/\rho_0)(\partial \rho' / \partial t)$; avec l'équation d'état linéarisée, Eq.(12), on tire $\nabla \cdot \vec{v}' = (-1/\rho_0 u^2)(\partial P' / \partial t)$. Donc

$$\nabla \cdot \vec{S} = -\rho_0 \vec{v}' \cdot \frac{\partial \vec{v}'}{\partial t} - \frac{1}{\rho_0 u^2} P' \frac{\partial P'}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho_0 v'^2 + \frac{1}{2 \rho_0 u^2} P'^2 \right).$$

C'est bien une équation de la forme recherchée. Ainsi,

$$\boxed{\mathcal{E} = \frac{1}{2} \rho_0 v'^2 + \frac{1}{2 \rho_0 u^2} P'^2} \quad (77)$$

est la **densité d'énergie associée à l'onde sonore**.

Pour une onde sinusoïdale, en moyennant sur une période, on a

$$\boxed{\langle \mathcal{E} \rangle = \frac{1}{4} \rho_0 |\hat{v}|^2 + \frac{1}{4 \rho_0 u^2} |\hat{P}|^2 = \frac{1}{2 \rho_0 u^2} |\hat{P}|^2} \quad (78)$$

Pour la 2e égalité, on a utilisé la relation $\hat{v} = (1/\rho_0 u)\hat{P}$, Eq.(68).

Rappel: on avait trouvé une intensité $\langle I \rangle = \frac{1}{2\rho_0 u} |\hat{P}|^2$, Eq.(71). Ainsi,

$$\boxed{\langle I \rangle = \langle \mathcal{E} \rangle u} . \quad (79)$$

Tout se passe comme si on avait une densité d'énergie \mathcal{E} se propageant à la vitesse u .

9 Interférences et Diffraction. Diffusion de Bragg

Nous allons considérer différentes superpositions d'ondes. Voir fin de la Section 4.

Considérons des superpositions d'ondes planes ou sphériques, de même fréquence, mais de directions de propagation \vec{k}/k différentes.

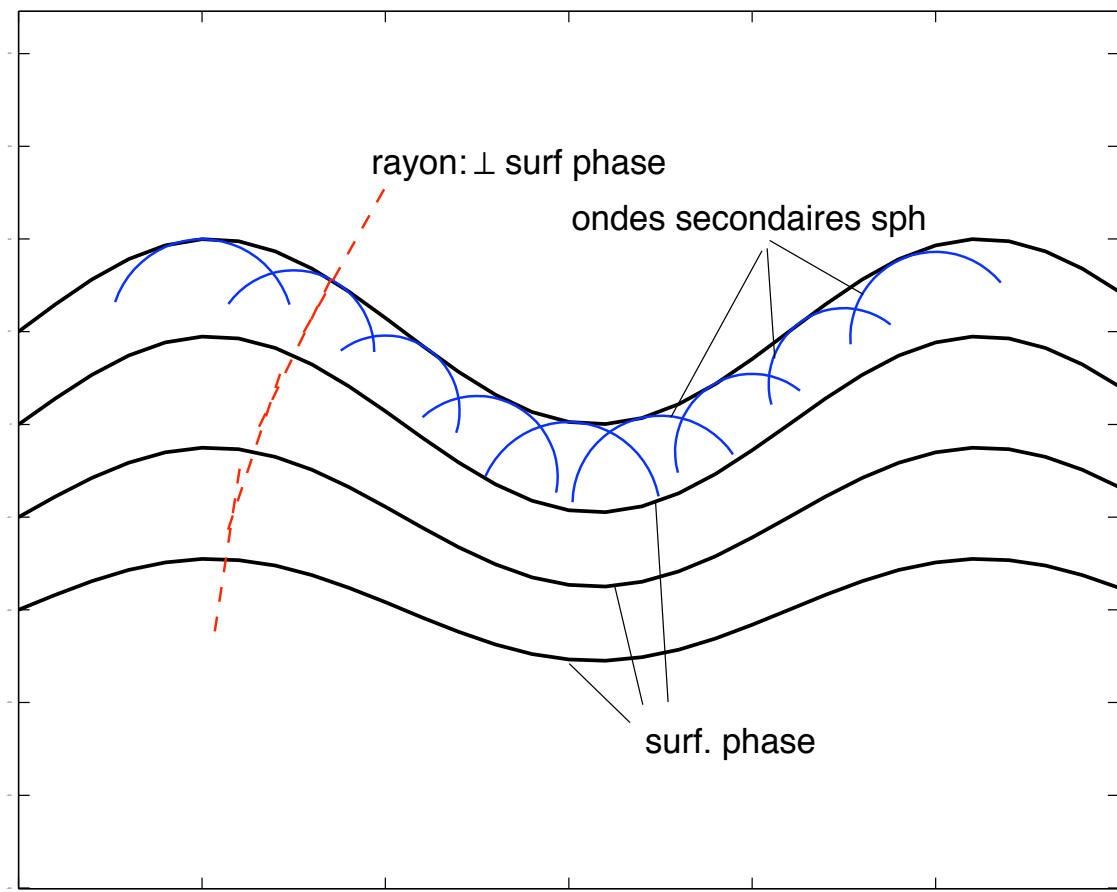


Figure 13: *Illustration du principe de Huygens.*

Principe de Huygens: chaque point atteint par une onde devient source d'une onde secondaire sphérique.

Voir Figure 13.

Chaque point sur une surface de phase “émet” une onde sphérique. La résultante de toutes ces ondes crée une nouvelle surface de phase. On définit un **rayon** comme une ligne perpendiculaire en tout point aux surfaces de phase. C’est le principe de base de l’optique géométrique.

9.1 Interférence d’ondes émises par 2 sources ponctuelles

Considérons 2 sources ponctuelles A et B de même fréquence, en phase, de même puissance. Soit P un point d’observation. Soit $r_a = |\vec{AP}|$ et $r_b = |\vec{BP}|$ (Figure 14). La perturbation en P est

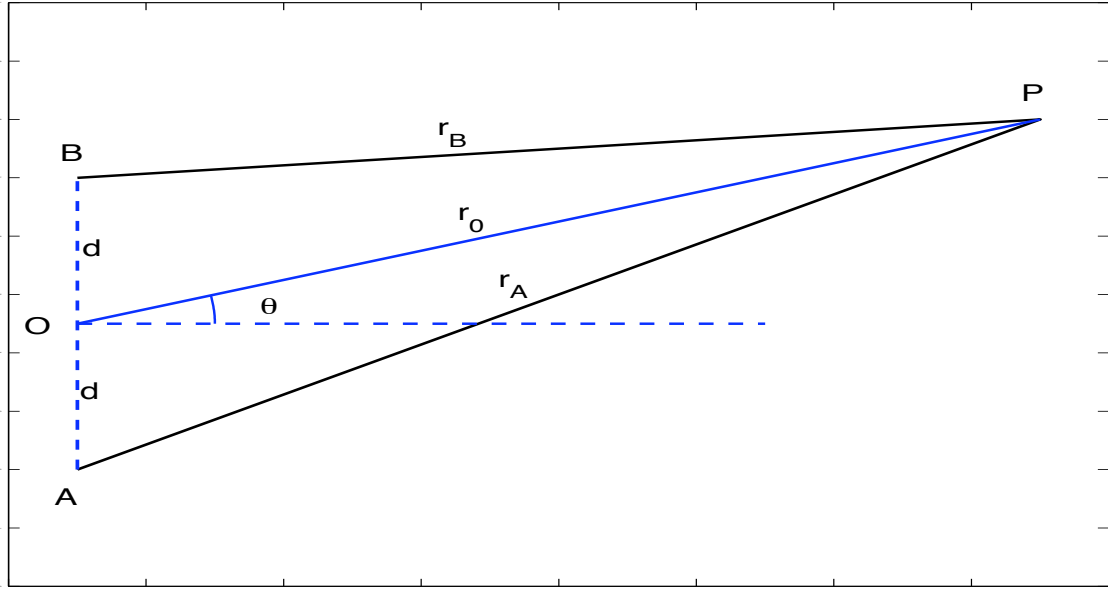


Figure 14: *Interférence de 2 ondes émises par 2 sources ponctuelles en phase.*

$$\psi(\vec{x}_P, t) = \frac{\hat{A}}{r_a} e^{i(kr_a - \omega t)} + \frac{\hat{A}}{r_b} e^{i(kr_b - \omega t)}$$

Soit

$$\hat{\psi}_a = \frac{\hat{A}}{r_a} e^{ikr_a}, \quad \hat{\psi}_b = \frac{\hat{A}}{r_b} e^{ikr_b}.$$

alors

$$\psi(\vec{x}_P, t) = (\hat{\psi}_a + \hat{\psi}_b) e^{-i\omega t},$$

et l’intensité en P est

$$\langle I \rangle(\vec{x}_P) \propto |\hat{\psi}_a + \hat{\psi}_b|^2$$

Soit le déphasage

$$\delta = k(r_b - r_a) = \frac{2\pi}{\lambda}(r_b - r_a)$$

On a alors

$$\langle I \rangle(\vec{x}_P) \propto |\hat{\psi}_a|^2 + |\hat{\psi}_b|^2 + 2|\hat{\psi}_a||\hat{\psi}_b| \cos \delta. \quad (80)$$

L'intensité en P est **maximale** lorsque $\cos \delta = +1 \Leftrightarrow \boxed{\delta = 2n\pi}$, avec n entier. On dit qu'il y a **interférence constructive**.

L'intensité en P est **minimale** lorsque $\cos \delta = -1 \Leftrightarrow \boxed{\delta = (2n + 1)\pi}$, avec n entier. On dit qu'il y a **interférence destructive**.

Avec $\delta = 2\pi/(r_b - r_a)$, on a le résultat que **l'intensité en P est maximale lorsque la différence de longueur de parcours des rayons issus de A et B égale un multiple de la longueur d'onde:**

$$\boxed{r_b - r_a = n\lambda}. \quad (81)$$

Pour chaque valeur de n (entier), c'est l'équation d'une hyperbole de révolution dont A

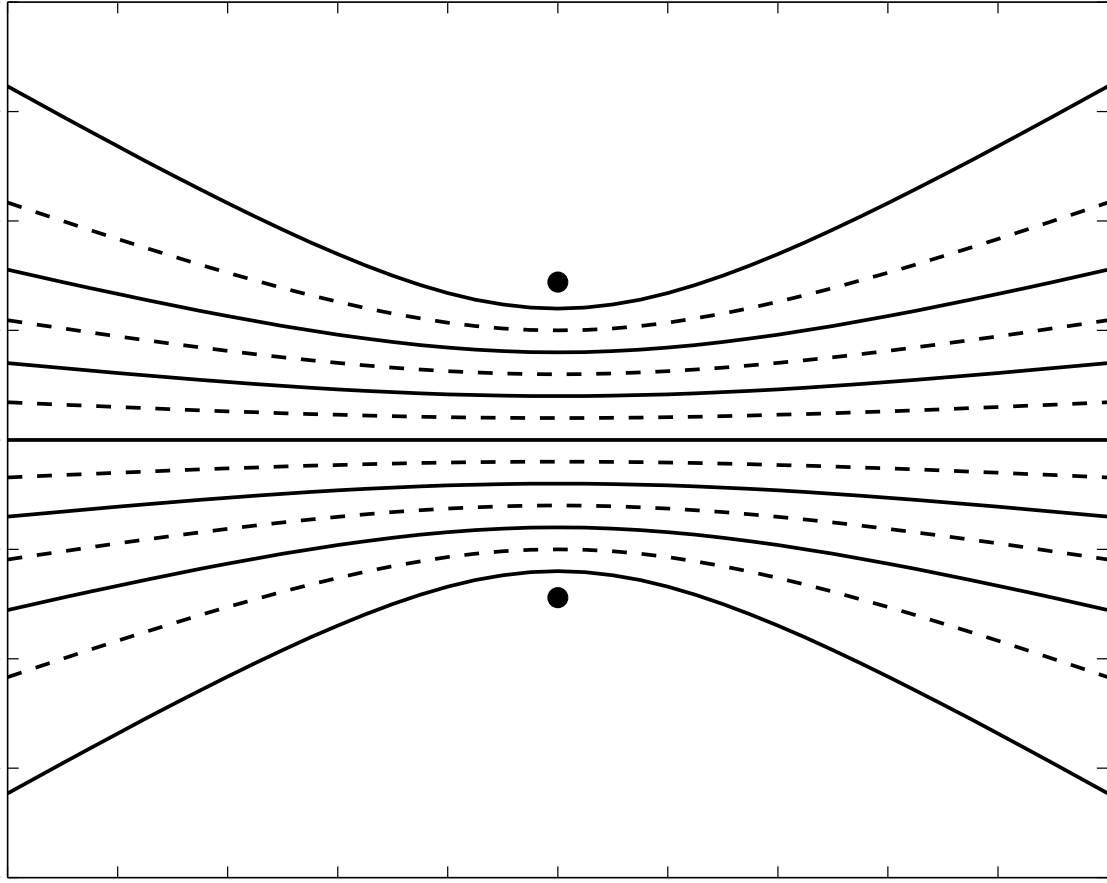


Figure 15: *Figure d'interférence: surfaces d'amplitude maximale(-) et minimale(...), résultant des 2 ondes de la Fig.14.*

et B sont les foyers (figure 15). La superposition des 2 ondes crée ce qu'on appelle une

figure d'interférence. Dans notre cas, c'est en fait une onde stationnaire avec des noeuds hyperboloïdes.

A des grandes distances des 2 sources, $r \gg a$, on peut faire l'approximation dipolaire, qui consiste à faire un développement limité au premier ordre en a/r (comme on l'a fait pour le dipôle électrique, CH.II). En notant O le point milieu de AB , $r_0 = |\vec{OP}|$, $d = a/2$, θ l'angle entre la perpendiculaire à AB et \vec{OP} , on a

$$r_a \approx r_0 + d \sin \theta, \quad (82)$$

$$r_b \approx r_0 - d \sin \theta. \quad (83)$$

Ainsi la perturbation en P s'écrit:

$$\psi(\vec{x}_P, t) \approx \frac{\hat{A}}{r_0} e^{i(kr_0 - \omega t)} (e^{ikd \sin \theta} + e^{-ikd \sin \theta}) = \frac{2\hat{A}}{r_0} e^{i(kr_0 - \omega t)} \cos(kd \sin \theta)$$

et l'intensité en P est:

$$\langle I \rangle(\vec{x}_P) \propto \frac{4|\hat{A}|^2}{r_0^2} \cos^2(kd \sin \theta) \quad (84)$$

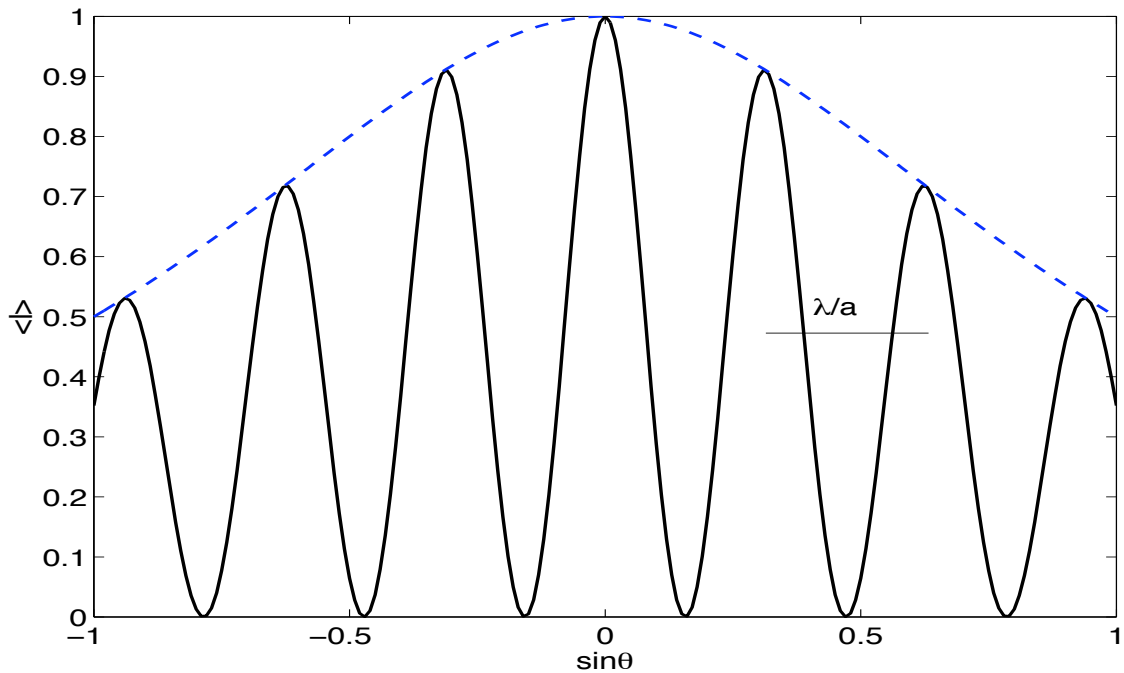


Figure 16: *Franges d'interférence: intensité en fonction de l'angle d'observation, à des distances r_0 grandes par rapport à l'écartement des sources a .*

Il y a des maxima en $kd \sin \theta = n\pi$, donc pour

$$\sin \theta = \frac{n\pi}{kd} = \frac{n\lambda}{2d} = \frac{n\lambda}{a}, \quad (85)$$

et des minima en $kd \sin \theta = (n + 1/2)\pi$, donc pour

$$\sin \theta = \frac{(n + 1/2)\pi}{kd} = \frac{(n + 1/2)\lambda}{2d} = \frac{(n + 1/2)\lambda}{a},$$

On obtient la figure de **franges d'interférences** (Figure 16). La séparation entre franges est $\Delta \sin \theta = \lambda/a$. **Plus la distance entre les sources est petite, plus la séparation entre les franges est grande.** On ne voit donc des franges d'interférence que si $\lambda < a$. La figure d'interférence découle du déphasage dû à la différence de parcours entre les 2 rayons:

$$\delta = k(r_a - r_b) \approx 2kd \sin \theta$$

Les franges d'interférence obtenues en (85) sont les directions des asymptotes des hyperboles trouvées en (81).

Diverses **expériences du cours** mettent en évidence ces propriétés.

9.2 Diffraction par une fente de largeur finie

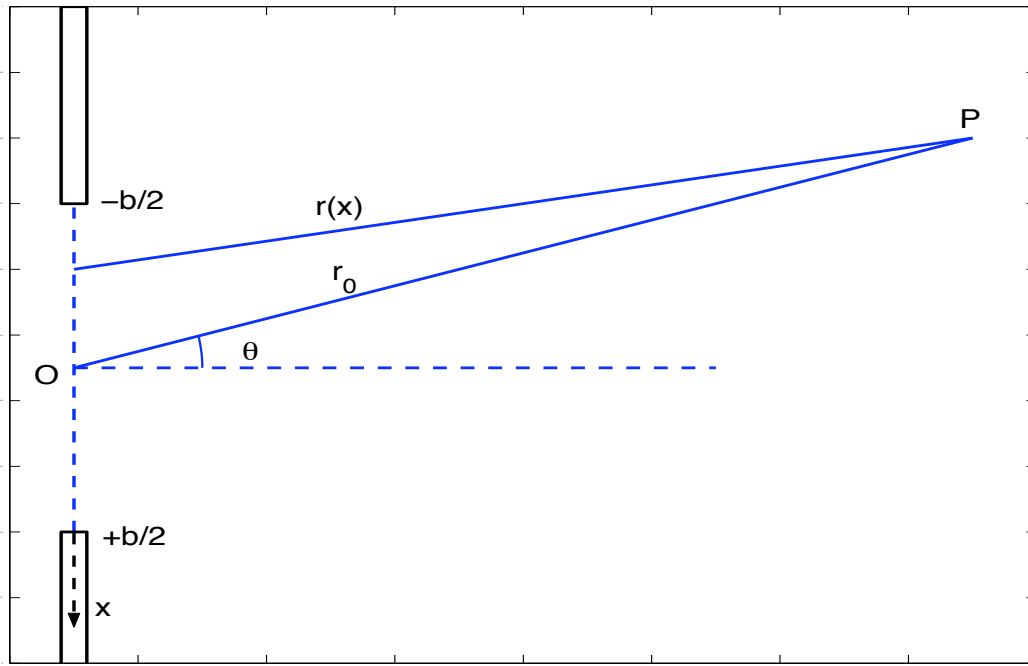


Figure 17: Diffraction par une fente de largeur finie.

On considère une onde plane incidente sur un obstacle (absorbant pour l'onde) percé d'une fente de largeur b . On observe l'onde en un point P situé à distance $r_0 \gg b$ de la fente. Voir Figure 17.

Chaque point de la fente émet une onde sphérique (principe de Huygens), et donc la résultante reçue en P s'écrit:

$$\psi(\vec{x}_P, t) = \int_{-b/2}^{+b/2} \frac{\hat{A}}{r(x)} \exp^{i(kr(x) - \omega t)} dx$$

On utilise l'approximation dipolaire

$$r(x) \approx r_0 + x \sin \theta$$

et on a

$$\psi(\vec{x}_P, t) \approx \frac{\hat{A}}{r_0} \exp^{i(kr_0 - \omega t)} \int_{-b/2}^{+b/2} \exp^{i(kx \sin \theta)} dx = \frac{\hat{A}}{r_0} \exp^{i(kr_0 - \omega t)} \frac{1}{ik \sin \theta} (e^{ik(b/2) \sin \theta} - e^{-ik(b/2) \sin \theta})$$

$$\boxed{\psi(\vec{x}_P, t) \approx \frac{\hat{A}}{r_0} \exp^{i(kr_0 - \omega t)} \frac{2}{k \sin \theta} \sin \left(k \frac{b}{2} \sin \theta \right)} \quad (86)$$

Donc l'intensité en P est

$$\boxed{\langle I \rangle (\vec{x}_P) \propto \left(\frac{\sin \alpha}{\alpha} \right)^2}, \quad \boxed{\alpha = k \frac{b}{2} \sin \theta}. \quad (87)$$

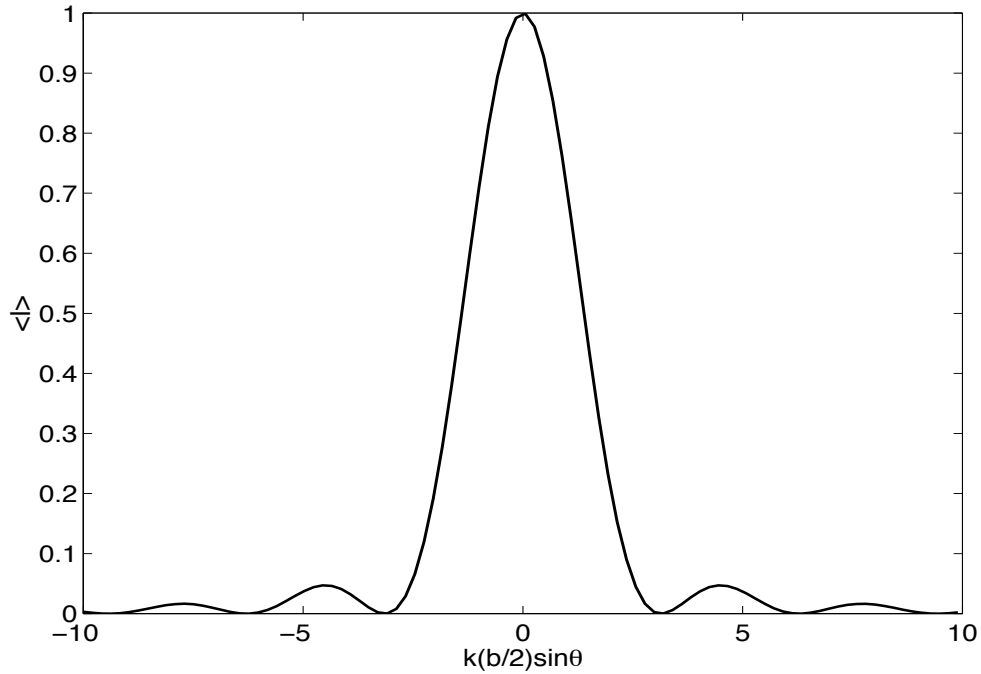


Figure 18: *Figure de diffraction d'une fente de largeur finie.*

L'intensité mesurée en fonction de l'angle θ est représentée à la figure 18. **La largeur de la tache de diffraction est inversement proportionnelle à la taille de la fente.** On appelle cette propriété **principe d'incertitude** (voir CH.IV Mécanique quantique).

Cette relation est utile pour déterminer le **pouvoir séparateur** d'un instrument optique: plus on veut une diffraction petite, plus il faut une ouverture large de l'instrument:

$$\Delta\theta_{min} \approx \frac{\lambda}{b}.$$

(Applications: télescopes, appareils photos, etc).

Généralisation à une fente rectangulaire. Pour une fente de côtés $b_x \times b_y$, on superpose les ondes issues des points (x, y) de la fente, et on utilise

$$r(x, y) \approx r_0 + x \sin \theta_x + y \sin \theta_y$$

et on obtient (evt: exercice!) finalement une figure de diffraction qui est le produit de deux figures 1D en x et en y :

$$\langle I \rangle(\vec{x}_P) \approx \propto \left(\frac{\sin \alpha}{\alpha} \right)^2 \left(\frac{\sin \beta}{\beta} \right)^2$$

avec

$$\alpha = k \frac{b_x}{2} \sin \theta_x, \quad \beta = k \frac{b_y}{2} \sin \theta_y.$$

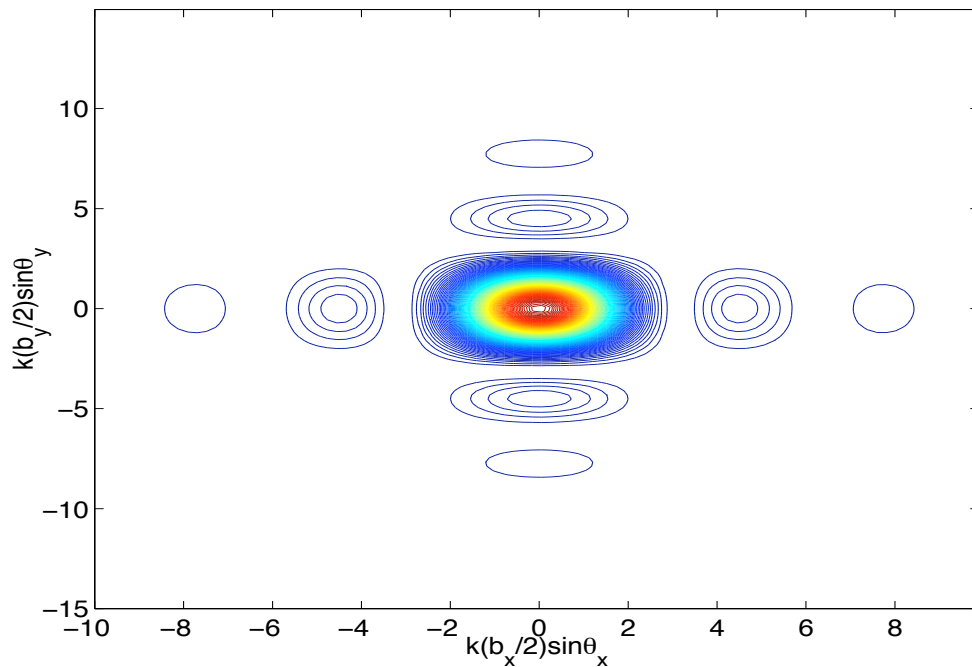
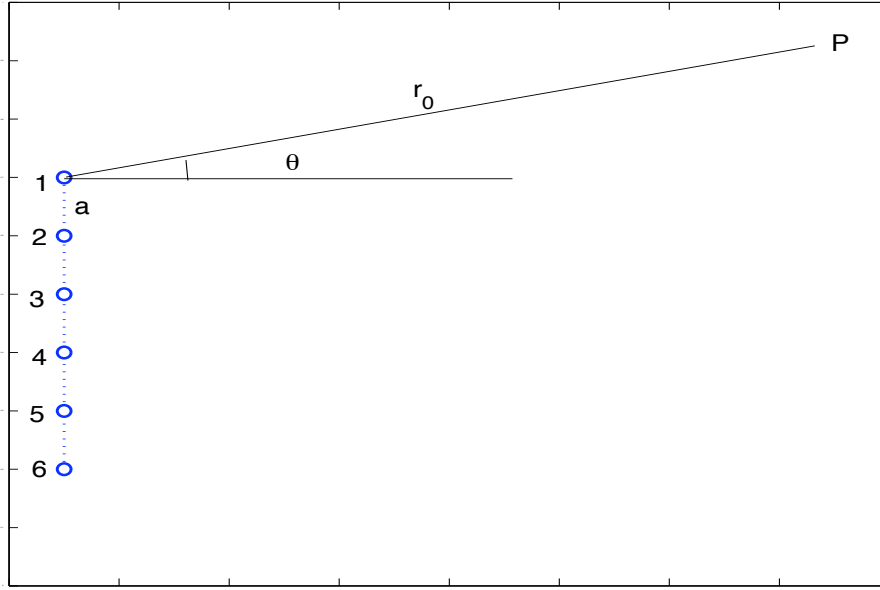


Figure 19: *Diffraction par une fente de largeur et hauteur finies.*

Voir expériences du cours. Voir Figure 19.


 Figure 20: N sources ponctuelles.

9.3 Interférence de N sources ponctuelles

Soient N sources ponctuelles, alignées, équidistantes de a , en phase, que l'on observe en P situé à grande distance $r_0 \gg a$. Voir Figure 20. La distance de la source numéro $m + 1$ au point P est

$$r_m \approx r_0 + ma \sin \theta .$$

Ainsi, l'onde reçue en P s'écrit:

$$\psi(\vec{x}_P, t) \approx \frac{\hat{A}}{r_0} e^{i(kr_0 - \omega t)} \sum_{m=0}^{N-1} e^{imka \sin \theta} = \hat{\psi}_{\text{tot}} e^{-i\omega t} .$$

Il y a donc un déphasage entre 2 ondes reçues en P , émises par 2 sources voisines, de $\delta = ka \sin \theta$. Il faut évaluer l'amplitude du signal reçu en P ,

$$\hat{\psi}_{\text{tot}} = \frac{\hat{A}}{r_0} e^{ikr_0} \sum_{m=0}^{N-1} e^{imka \sin \theta}$$

La somme ci-dessus est représentée dans le plan complexe à la figure 21. C'est une ligne brisée à N côtés de longueur 1. Elle peut donc être inscrite dans un cercle. Soit C le centre et ρ le rayon de ce cercle. On a

$$|OP| = 2|QP| = 2\rho \sin(N\delta/2)$$

$$1 = |OR| = 2|OS| = 2\rho \sin(\delta/2)$$

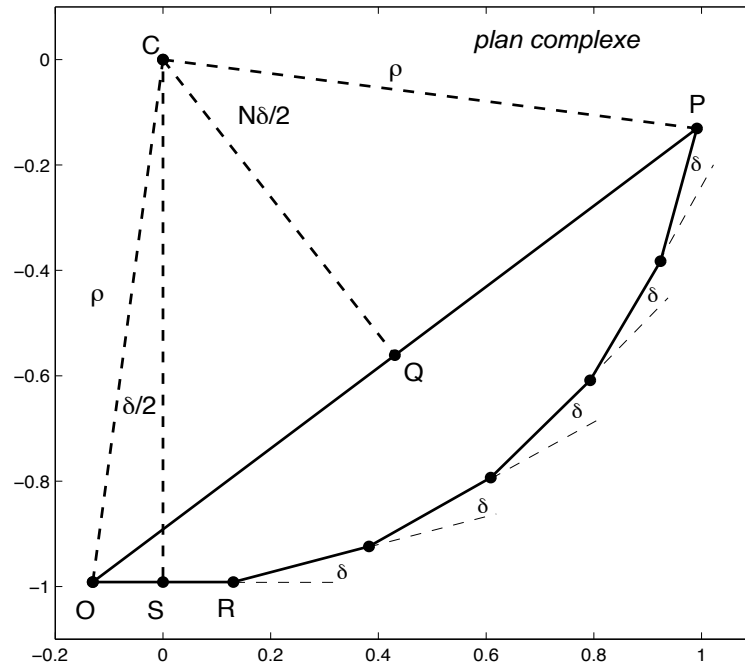


Figure 21: *Calcul de l'amplitude complexe résultante pour l'interférence de N sources ponctuelles. Cas de figure: $N = 6$.*

Ainsi

$$|\hat{\psi}_{\text{tot}}| = \frac{|\hat{A}|}{r_0} |OP| = \frac{|\hat{A}|}{r_0} \frac{\sin(N\delta/2)}{\sin(\delta/2)}$$

et l'intensité en P est

$$\boxed{\langle I \rangle (\vec{x}_P) = \langle I_1 \rangle \left(\frac{\sin(N\delta/2)}{\sin(\delta/2)} \right)^2 = \langle I_1 \rangle \left(\frac{\sin(Nka \sin \theta/2)}{\sin(ka \sin \theta/2)} \right)^2} \quad (88)$$

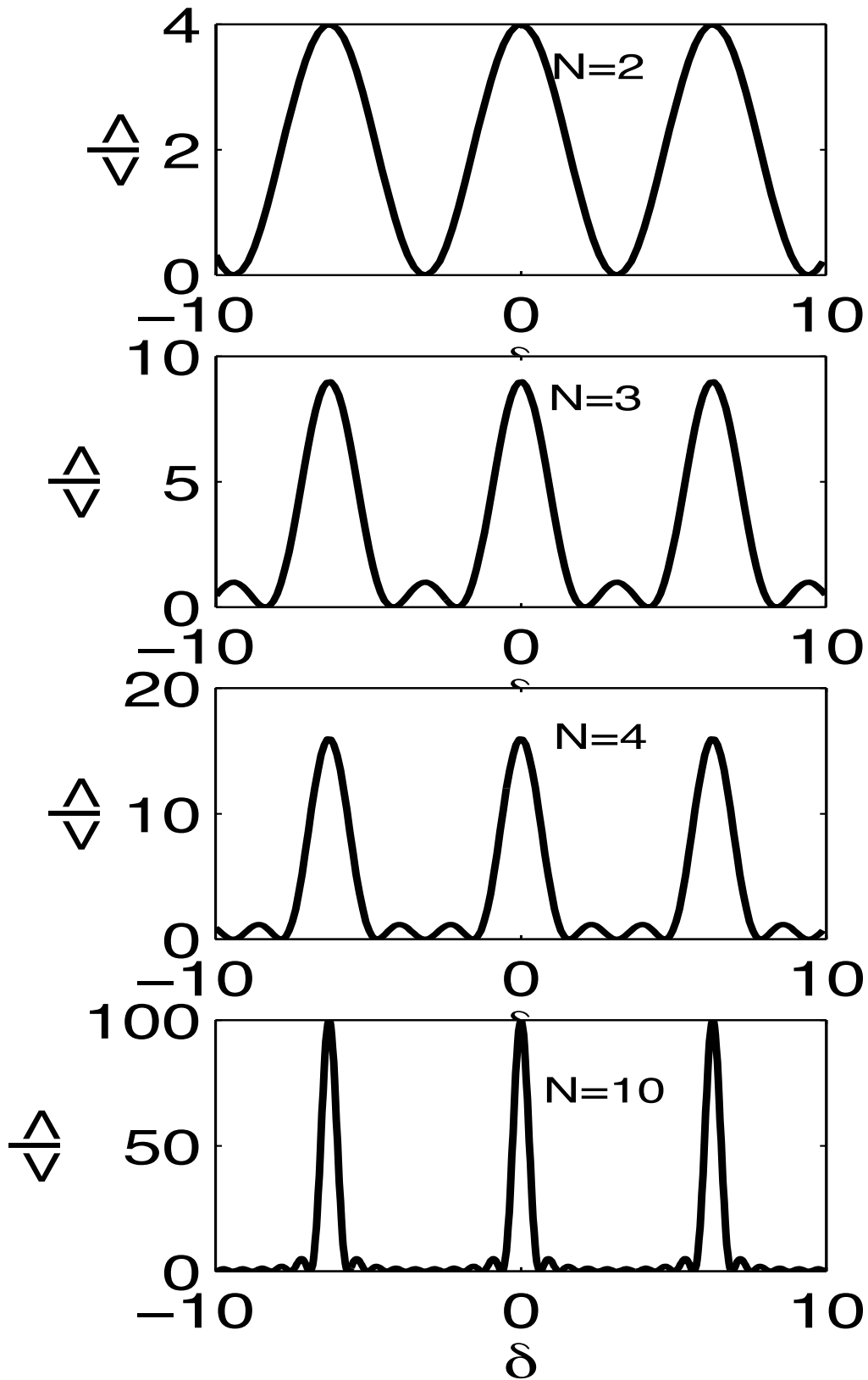
$$\boxed{\langle I \rangle (\vec{x}_P) = \langle I_1 \rangle \left(\frac{\sin(N\pi a \sin \theta / \lambda)}{\sin(\pi a \sin \theta / \lambda)} \right)} \quad (89)$$

où $\langle I_1 \rangle$ serait l'intensité reçue en P s'il n'y avait qu'une seule source.

On a représenté les figures d'interférences correspondantes pour $N = 2, 3, 4, 10$ à la Figure 22. Plus le nombre de sources est grand, plus les pics principaux sont fins et de grande amplitude.

Application: antennes radio.

On dispose les sources de telle sorte que l'intensité soit maximale dans certaines directions. Par exemple, avec 2 sources séparées de $a = \lambda$, on obtient le diagramme polaire d'intensité

Figure 22: *Figures d'interférences de N sources ponctuelles, pour $N = 2, 3, 4, 10$.*

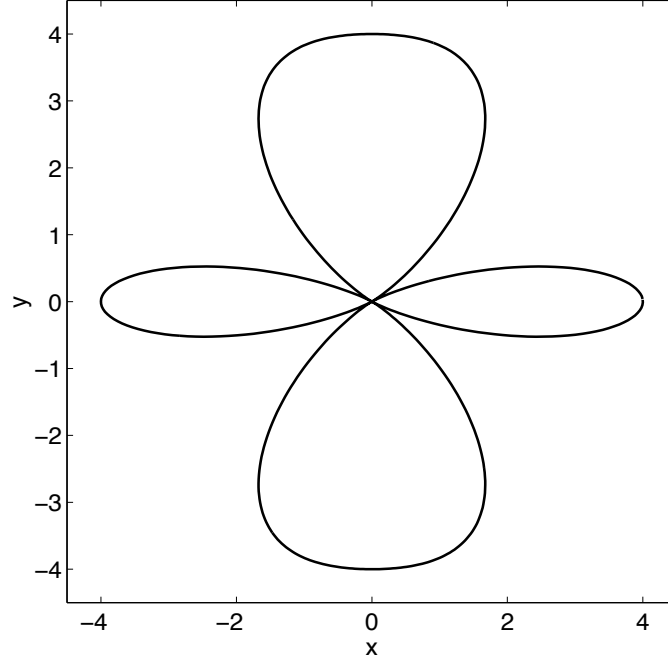


Figure 23: *Diagramme polaire d'intensité des ondes émises par 2 sources séparées d'une longueur d'onde ($a = \lambda$).*

de la Figure 23: les maxima sont en $\sin \theta = n$, donc

$$\begin{aligned} n = 0 &\Rightarrow \theta = 0, \pi \\ n = 1 &\Rightarrow \theta = \pi/2 \\ n = -1 &\Rightarrow \theta = -\pi/2 \end{aligned}$$

Les maxima d'intensité sont dans 4 directions orthogonales de l'espace.

Autre exemple, avec 2 sources séparées de $a = \lambda/2$, on obtient le diagramme polaire d'intensité de la Figure 24: les maxima sont en $\sin \theta = 2n$, donc

$$n = 0 \Rightarrow \theta = 0, \pi$$

Les maxima d'intensité sont dans 2 directions opposées de l'espace, perpendiculaires à l'alignement des 2 sources.

Autre exemple, avec 4 sources séparées de $a = \lambda/2$, on obtient le diagramme polaire d'intensité de la Figure 25: les maxima principaux sont en $\sin \theta = 2n$, donc

$$n = 0 \Rightarrow \theta = 0, \pi$$

Les maxima d'intensité sont dans 2 directions opposées de l'espace, perpendiculaires à l'alignement des 2 sources. Mais il y a aussi les maxima secondaires. L'intensité est nulle pour

$$\sin(N\pi a \sin \theta / \lambda) = 0 \Rightarrow 4\pi a \sin \theta / \lambda = n\pi \Rightarrow \sin \theta = \frac{n}{2}$$

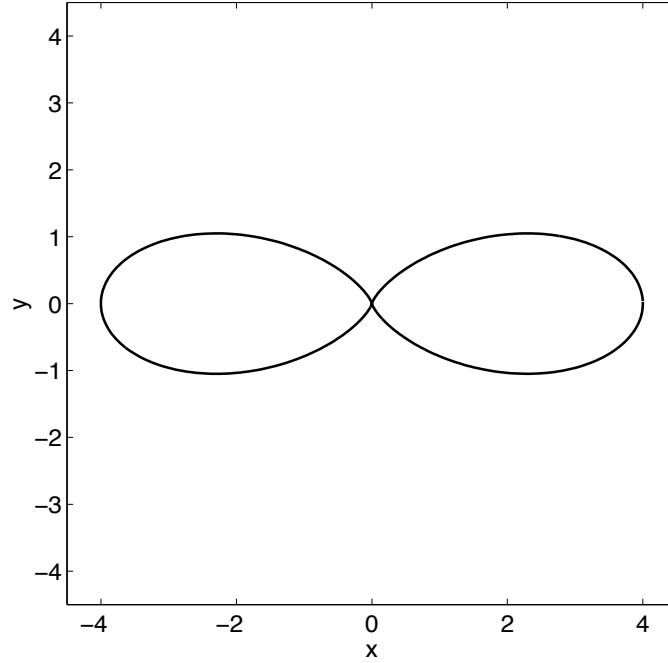


Figure 24: *Diagramme polaire d'intensité des ondes émises par 2 sources séparées d'une demi-longueur d'onde ($a = \lambda/2$).*

donc pour

$$\begin{aligned} n = 1 &\Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \\ n = -1 &\Rightarrow \theta = \frac{-\pi}{6}, \frac{-5\pi}{6} \\ n = 2 &\Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2} \\ n = -2 &\Rightarrow \theta = \frac{-\pi}{2} \end{aligned}$$

9.4 Diffraction des rayons X par les cristaux (Bragg)

Un cristal est un arrangement régulier d'atomes dans l'espace. On éclaire le cristal avec une onde EM. Chaque atome du cristal va osciller en réponse à cette onde. Cette oscillation entraîne l'émission de rayonnement d'une onde EM (voir CH.II.5: une charge accélérée rayonne). La résultante de ces ondes réémises par l'ensemble des atomes du cristal constitue un rayonnement dit de **diffusion de Bragg**.

Considérons **un plan** de l'arrangement régulier des atomes du cristal, figure 26. Si la direction d'observation θ_r et celle de l'onde incidente θ_i sont telles que $\theta_r = \theta_i$, tous les rayons diffusés par les atomes du plan du cristal arrivent en phase les uns par rapport aux autres (car la longueur de parcours des rayons est la même). Il y a donc maximum

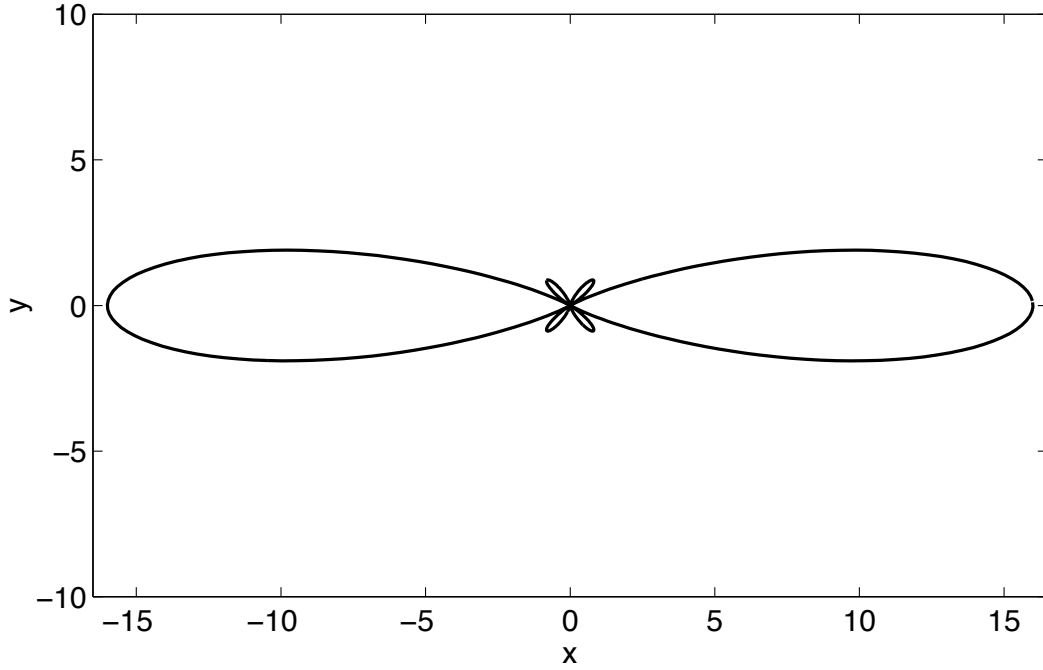


Figure 25: *Diagramme polaire d'intensité des ondes émises par 4 sources séparées d'une demi-longueur d'onde ($a = \lambda/2$).*

d'intensité pour cette condition: c'est la loi de la réflexion bien connue.

Si on considère maintenant 2 plans adjacents, séparés de d , les rayons diffusés (c.-à.-d. réfléchis par ces 2 plans) seront en phase si la différence de longueur de parcours des rayons est un multiple de la longueur d'onde:

$$\boxed{2d \sin \theta = n\lambda} . \quad (90)$$

On aura à cette condition un **maximum d'intensité diffusée**. Autrement dit, un cristal va diffuser des ondes EM **dans certaines directions bien précises, qui dépendent de l'arrangement des atomes dans le cristal (distance entre plans du cristal)**. La relation ci-dessus s'appelle relation de diffusion de Bragg.

Pour $n = 0$, c'est le "shine through": $\theta = 0$. Pour $n = 1$, le rayonnement diffusé constitue ce qu'on appelle le spectre de diffusion d'ordre 1. Pour $n = 2$, on aura le spectre de diffusion d'ordre 2. Et ainsi de suite.

Donc, pour pouvoir observer au moins le spectre de 1er ordre, comme le sinus est < 1 , on doit avoir $\lambda < 2d$. En pratique on choisit

$$\boxed{\lambda \lesssim d} .$$

Il faut donc utiliser des longueurs d'ondes inférieures à la distance interatomique pour pouvoir observer la figure de diffusion. Comme les distances interatomiques dans les

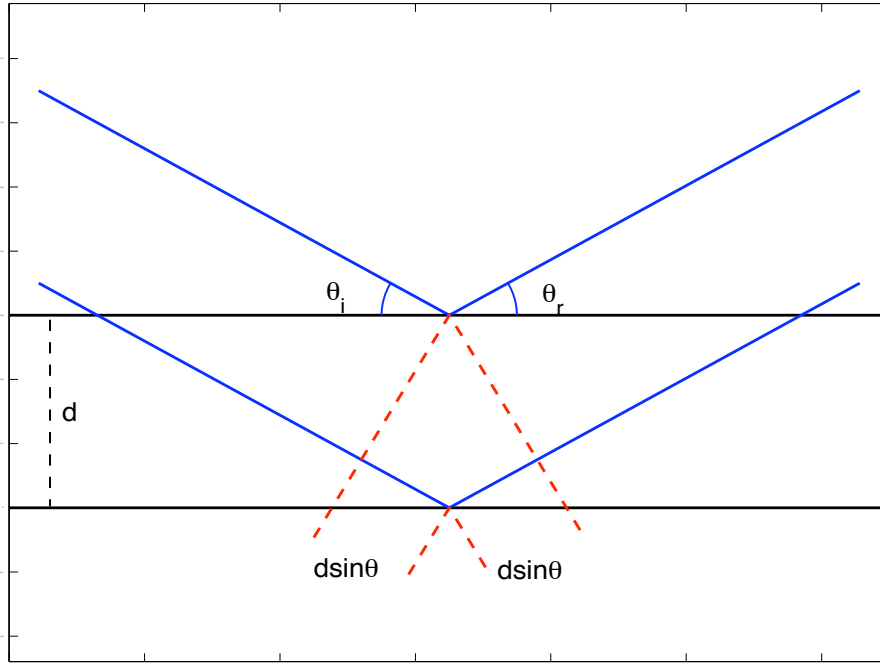


Figure 26: *Calcul de la diffusion par un cristal: ondes réfléchies par 2 plans d'atomes voisins.*

solides sont de l'ordre de quelques Angström ($10^{-10}[\text{m}]$), cela correspond à des **rayons X**.

L'expérience de diffusion des rayons X par les cristaux a démontré leur nature ondulatoire, alors que, lorsqu'ils ont été découverts (par Roentgen à la fin du XIXe siècle), leur nature corpusculaire était mise en évidence. On verra au CH.IV, Mécanique Quantique, que les rayons X, comme toute particule d'ailleurs, ont une nature duale, corpusculaire par certains aspects, ondulatoire par d'autres.

- Si on utilise une source de rayons X de longueur d'onde connue, la mesure du spectre de diffusion renseigne sur la structure de cristal.
- Si on utilise un cristal de structure connue, la mesure du spectre de diffusion renseigne sur la longueur d'onde des rayons X incidents.

10 Polarisation

L'onde EM dans le vide est une onde transverse, c.a.d. que les champs \vec{E} et \vec{B} de la perturbation sont perpendiculaires à la direction de propagation \vec{k} . Voir Ch.II, Section

5.3 le cas de l'onde plane, et Ch.II, Section 5.5 le cas de l'onde EM rayonnée par une charge accélérée.

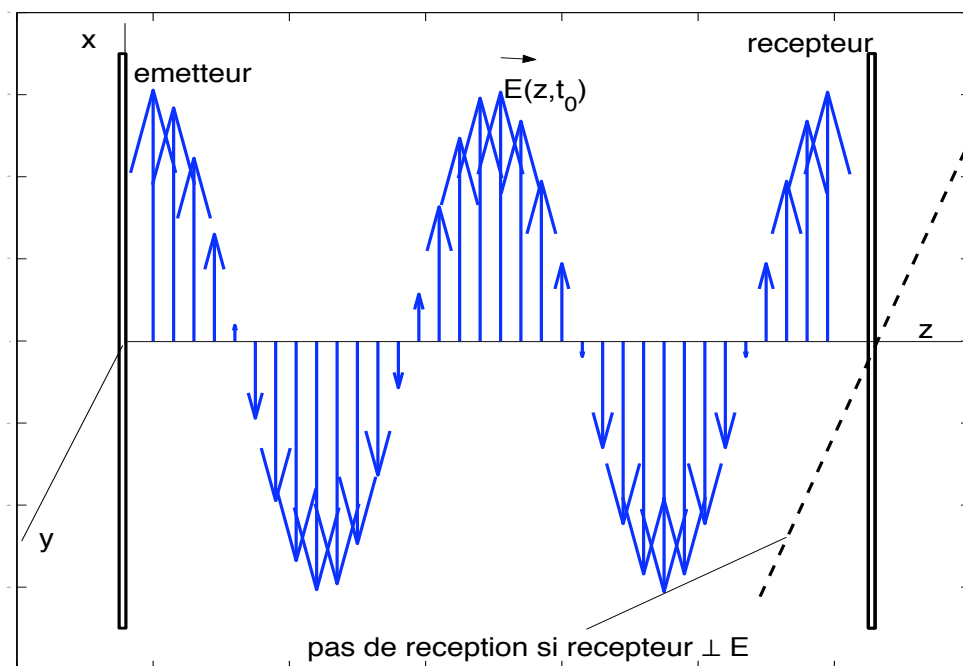


Figure 27: Mise en évidence expérimentale d'une onde EM polarisée plane.

Expérience : antennes dipolaires. L'antenne émettrice et l'antenne réceptrice sont des dipôles rectilignes. Si l'antenne réceptrice est placée parallèlement à l'antenne émettrice, elle reçoit un signal. Si on la fait tourner de $\pi/2$ par rapport à l'antenne émettrice, elle ne reçoit aucun signal. Voir Figure 27.

Def.: polarisation plane: lorsque la perturbation associée à l'onde est dans un plan donné. On dit aussi que l'onde est **polarisée linéairement**.

La lumière naturelle, bien que constituée d'ondes transverses, n'est habituellement pas polarisée: le plan d'oscillation du champ \vec{E} est aléatoire, car constitué d'un très grand nombre d'ondes individuelles dont l'orientation est aléatoire. On dit alors que l'onde (la lumière, dans ce cas) n'est **pas polarisée**.

Expérience: polarisation d'une onde radio. En plaçant une grille de tiges métalliques parallèles sur le chemin d'une onde radio, on filtre la composante parallèle au fil (le conducteur "écrante" le champ électrique). Reste donc, après le passage à travers la grille, une onde polarisée linéairement. On met en évidence cette polarisation avec une 2e grille de fils parallèles, que l'on oriente relativement à la première. Lorsque l'orientation relative entre les 2 grilles est de $\pi/2$, plus aucun signal ne passe.

Polarisations circulaire et elliptique. On superpose 2 ondes planes de même fréquence,

même longueur d'onde et même direction de propagation, mais **polarisées linéairement dans 2 directions perpendiculaires et déphasées de $\pi/2$** . Soit z la direction de propagation. Le champ électrique résultant est donc:

$$\begin{aligned}\vec{E}(\vec{x}, t) &= \mathcal{R}e \left(|\hat{E}_x| e^{i(kz - \omega t + \varphi)} \vec{e}_x + |\hat{E}_y| e^{i(kz - \omega t + \varphi + \pi/2)} \vec{e}_y \right) \\ &= \mathcal{R}e \left(\left(|\hat{E}_x| \vec{e}_x + i |\hat{E}_y| \vec{e}_y \right) e^{i(kz - \omega t + \varphi)} \right) \\ &= |\hat{E}_x| \cos(kz - \omega t + \varphi) \vec{e}_x - |\hat{E}_y| \sin(kz - \omega t + \varphi) \vec{e}_y .\end{aligned}\quad (91)$$

Si on considère le champ \vec{E} en fonction du temps à $\vec{x} = \vec{x}_0 = z_0 \vec{e}_z$ fixé, l'Eq.(92) est l'équation paramétrique d'une ellipse de demi-axes $|\hat{E}_x|$ et $|\hat{E}_y|$. Autrement dit, le vecteur champ électrique parcourt une ellipse dans le plan perpendiculaire à la direction de propagation de l'onde, avec un sens de parcours dans la direction positive. Voir Figure 28, droite. On dit que l'onde a une **polarisation elliptique droite**. Si les amplitudes $|\hat{E}_x|$ et $|\hat{E}_y|$ sont égales, alors on a une **polarisation circulaire droite**.

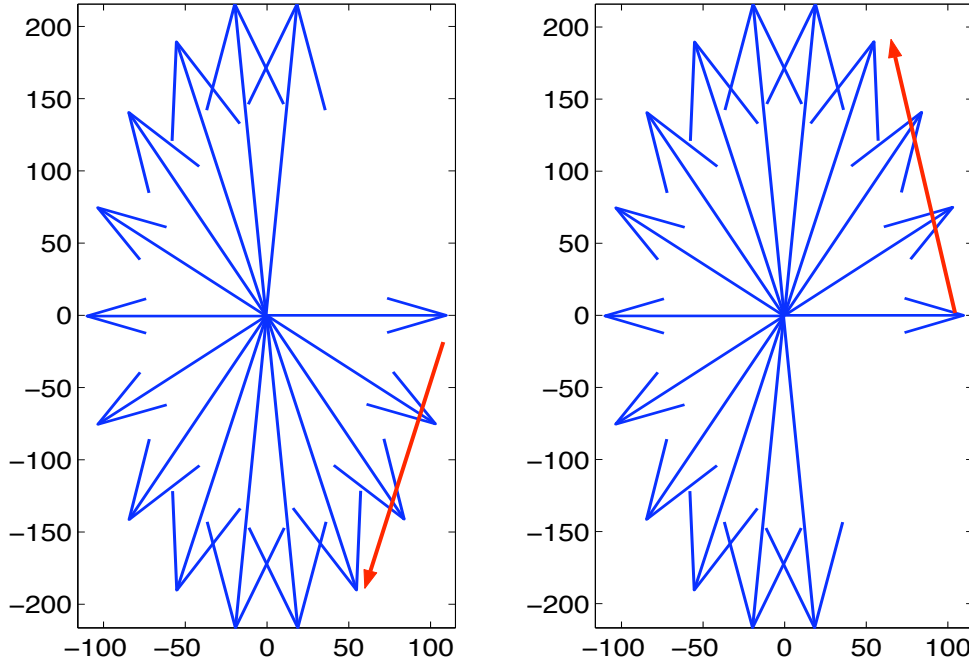


Figure 28: *Polarisations elliptiques gauche et droite: champ \vec{E} à un endroit donné, à des temps successifs, dans le plan (x, y) . La flèche indique le sens de déroulement du temps. La direction de propagation (z) est vers l'observateur.*

Si le déphasage entre les composantes en x et y est de $-\pi/2$ au lieu de $\pi/2$, on a

$$\begin{aligned}\vec{E}(\vec{x}, t) &= \mathcal{R}e \left(|\hat{E}_x| e^{i(kz - \omega t + \varphi)} \vec{e}_x + |\hat{E}_y| e^{i(kz - \omega t + \varphi - \pi/2)} \vec{e}_y \right) \\ &= \mathcal{R}e \left(\left(|\hat{E}_x| \vec{e}_x - i |\hat{E}_y| \vec{e}_y \right) e^{i(kz - \omega t + \varphi)} \right) \\ &= |\hat{E}_x| \cos(kz - \omega t + \varphi) \vec{e}_x + |\hat{E}_y| \sin(kz - \omega t + \varphi) \vec{e}_y .\end{aligned}\quad (92)$$

Cette fois, le vecteur champ électrique parcourt également une ellipse dans le plan perpendiculaire à la direction de propagation de l'onde, mais avec un sens de parcours dans la direction négative. Voir Figure 28, gauche. On dit que l'onde a une **polarisation elliptique gauche**. Si les amplitudes $|\hat{E}_x|$ et $|\hat{E}_y|$ sont égales, alors on a une **polarisation circulaire gauche**.

On peut décomposer toute superposition de 2 ondes polarisées linéairement, dans 2 directions perpendiculaires et déphasées d'une quantité arbitraire, en une superposition de 2 ondes polarisées circulairement:

$$\begin{aligned}\vec{E}(\vec{x}, t) &= \mathcal{R}e \left(\left(\hat{E}_x \vec{e}_x + \hat{E}_y \vec{e}_y \right) e^{i(kz - \omega t)} \right) \\ &= \mathcal{R}e \left(\left[\frac{1}{2} \left(\hat{E}_x - i\hat{E}_y \right) (\vec{e}_x + i\vec{e}_y) + \frac{1}{2} \left(\hat{E}_x + i\hat{E}_y \right) (\vec{e}_x - i\vec{e}_y) \right] e^{i(kz - \omega t)} \right) . \quad (93)\end{aligned}$$

Ainsi, $\hat{E}_x - i\hat{E}_y$ est l'amplitude complexe de la polarisation circulaire droite, et $\hat{E}_x + i\hat{E}_y$ est l'amplitude complexe de la polarisation circulaire gauche.

Expérience: biréfringence. Dans certains matériaux, la vitesse de propagation des ondes EM dépend de la direction de propagation des ondes, et aussi de la direction de la polarisation de l'onde. Ainsi, un faisceau de lumière non polarisée incidente sur ce type de matériau se sépare en deux faisceaux qui sont polarisés linéairement dans des directions perpendiculaires l'une par rapport à l'autre. L'une des polarisations est appelée "ordinaire" (O), car elle obéit aux lois habituelles de la réfraction (loi de Snell: $\sin i / \sin r = n$), avec un indice de réfraction qui ne dépend pas de la direction de propagation. L'autre est appelée "extraordinaire" (X), parce qu'elle a une vitesse de propagation qui dépend de la direction de propagation. Par exemple, pour le calcite, on a un indice de réfraction pour l'onde O de 1.658, et pour l'onde X qui varie entre 1.658 et 1.486 selon la direction. On met en évidence ce phénomène en observant la double image à travers un cristal de calcite. Chacune des images est polarisée linéairement.

11 Effet Doppler

Lorsque la source émettant l'onde est en mouvement par rapport au récepteur (ou: *observateur*), on observe un décalage en fréquence: c'est l'effet Doppler.

On distingue 2 cas pour le traitement de l'effet Doppler:

- A. Ondes se propageant sur un support matériel (par exemple ondes dans les fluides, cordes vibrantes, etc)
- B. Ondes électromagnétiques (EM). Il n'y a pas de support matériel. La vitesse de

propagation est $u = c$ quel que soit le référentiel d'inertie (principe d'équivalence dans la relativité d'Einstein).

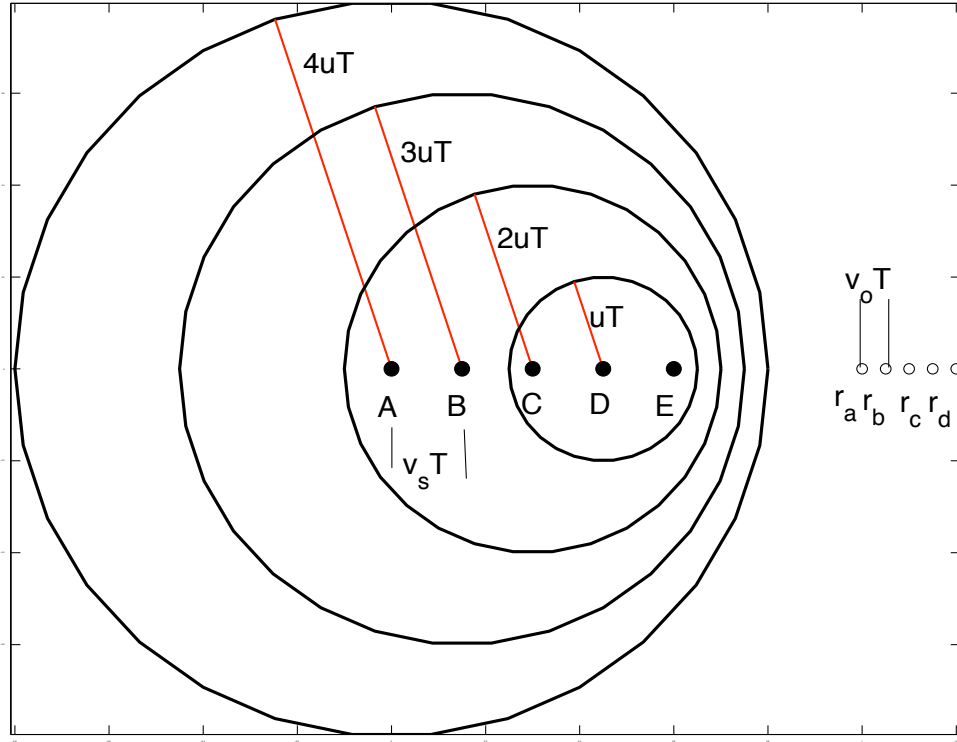


Figure 29: *Surfaces de phase émises par une source en mouvement (positions de la source lors des émissions: A, B, C, D, \dots ; positions de l'observateur en mouvement lors de ces émissions: $r_a, r_b, r_c, r_d, \dots$.*

Cas A. Ondes se propageant sur un support matériel

On va supposer que la source et le récepteur sont en mouvement uniforme par rapport au milieu dans lequel se propagent les ondes, de vitesses \vec{v}_s et \vec{v}_o , respectivement. Pour simplifier les calculs, on supposera que $\vec{v}_s // \vec{v}_o$. Voir Figure 29.

Soit \mathcal{R} le référentiel lié au milieu dans lequel se propage l'onde. Soit u la vitesse de propagation de l'onde. Soit un signal sinusoïdal de fréquence d'émission ν . Soit $T = 1/\nu$ la période de ce signal. Nous allons calculer la fréquence du signal reçu par l'observateur.

On a représenté graphiquement les surfaces de phase émises à des temps successifs $t = 0, T, 2T, 3T, 4T, \dots$, ainsi que les positions de la source et de l'observateur à ces temps successifs.

Calculons le temps T' entre 2 réceptions successives de surfaces de phase.

En $t = 0$, émission depuis $x = x_A$. L'observateur est en $x = r_a$. La surface de phase est

d'équation:

$$x_{front}(t) = x_A + ut$$

La position de l'observateur est d'équation:

$$x_{obs}(t) = r_a + v_o t$$

La réception de cette surface de phase est en $t = t_1$ telle que $x_{front}(t_1) = x_{obs}(t_1)$, donc

$$t_1 = \frac{r_a - x_A}{u - v_o} \quad (94)$$

En $t = T$, donc une période plus tard, il y a émission de la surface de phase suivante depuis $x_B = x_A + v_s T$. L'observateur est en $r_b = r_a + v_o T$.

$$x_{front,2}(t) = x_B + u(t - T) = x_A + (v_s - u)T + ut$$

$$x_{obs}(t) = r_a + v_o t$$

La réception de cette 2e surface de phase est en $t = t_2$ telle que $x_{front,2}(t_2) = x_{obs}(t_2)$, donc

$$t_2 = \frac{r_a - x_A + (u - v_s)T}{u - v_o} \quad (95)$$

La période T' entre deux réceptions successives est ainsi $T' = t_2 - t_1$

$$\boxed{T' = \frac{u - v_s}{u - v_o} T} \quad (96)$$

et donc la fréquence du signal reçu, $\nu' = 1/T'$, est

$$\boxed{\nu' = \frac{u - v_o}{u - v_s} \nu = \frac{1 - (v_o/u)}{1 - (v_s/u)} \nu} \quad (97)$$

Expérience: haut-parleur tournant. Cas $v_o = 0$.

- La source se rapproche: $v_s > 0$, donc $\nu' = \frac{u}{u - v_s} \nu > \nu$, le son reçu est plus aigu.
- La source s'éloigne: $v_s < 0$, donc $\nu' = \frac{u}{u - v_s} \nu < \nu$, le son reçu est plus grave.

En mesurant la différence entre ν et ν' , on peut ainsi mesurer la vitesse de la source. C'est le principe du radar à effet Doppler.

Dans le cas où $v_o, v_s \ll u$, on a

$$\boxed{\nu' \approx \left(1 - \frac{v_o - v_s}{u}\right) \nu} \quad (98)$$

Que se passe-t-il si $v_s > u$ (source supersonique). Les calculs ci-dessus indiqueraient un temps $T' < 0$. En fait, les fronts de phase successifs vont se croiser. Il y aura interférence

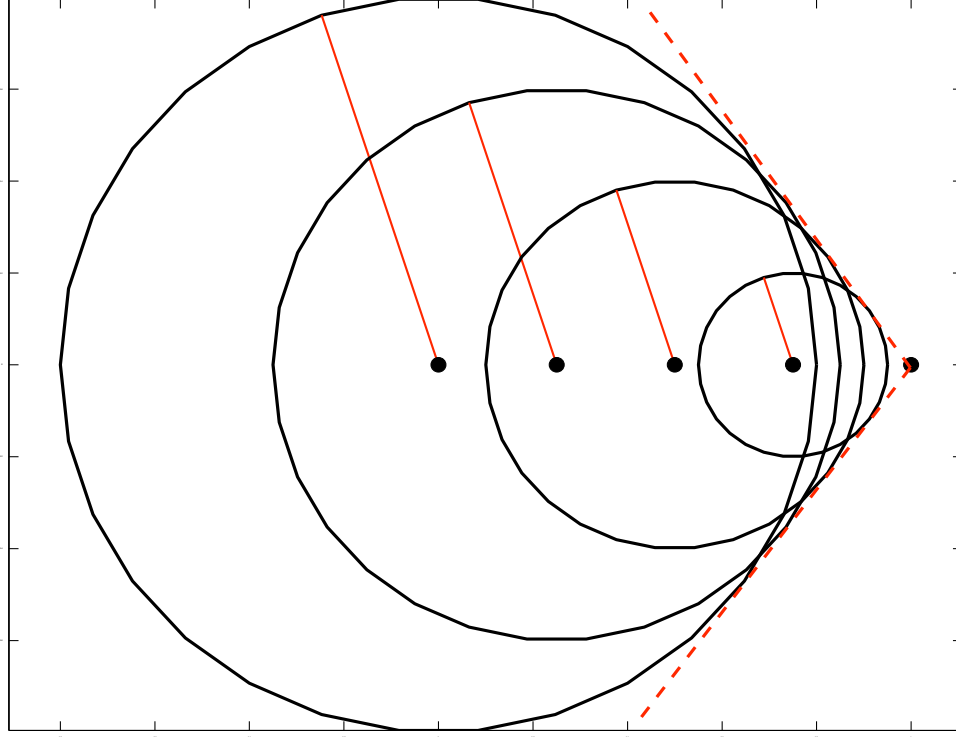


Figure 30: *Surfaces de phase émises par une source en mouvement supersonique ($v_s > u$).*

constructive entre ces fronts d'onde sur une ligne tangente aux surfaces de phase: cela forme une onde de choc. Lorsque v_s s'approche de u , les perturbations s'accumulent devant la source et deviennent de très grande amplitude: c'est le "mur du son", qui crée le "bang" supersonique. Voir Figure 30.

Cas B. Onde EM dans le vide.

Les ondes EM n'ont pas de support matériel (il n'y a pas d' "éther"), et c'est la relativité d'Einstein qui s'applique. La vitesse de propagation est $u = c$ pour tout référentiel d'inertie.

Soit \mathcal{R} le référentiel de la source.

Soit \mathcal{R}' le référentiel de l'observateur.

Soit $\vec{v} = v\vec{e}_x$ la vitesse de \mathcal{R}' par rapport à \mathcal{R} . Voir Figure 31.

On synchronise les horloges de \mathcal{R} et \mathcal{R}' : $t = t' = 0$ lorsque $O = O'$.

Soit l'événement A : émission d'une onde plane en O , en $t = 0$. Soit ω sa fréquence angulaire et $\vec{k} = k_x\vec{e}_x + k_y\vec{e}_y$ son vecteur d'onde, tous deux mesurés dans \mathcal{R} . Soit θ l'angle entre \vec{v} et \vec{k} .

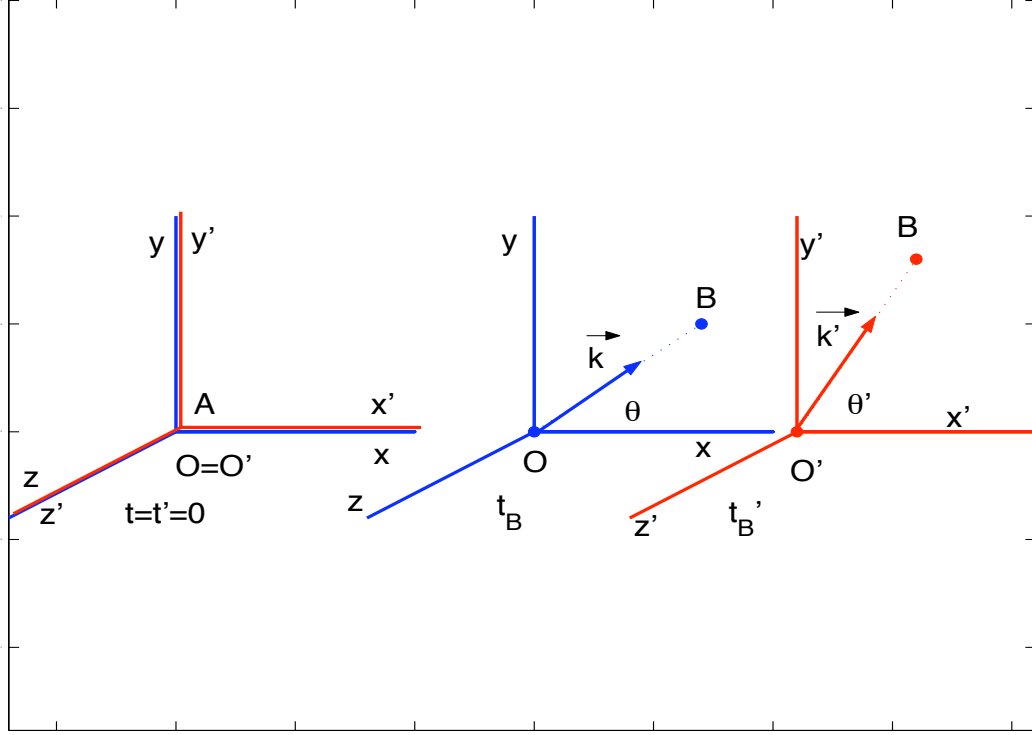


Figure 31: *A: émission du rayon lumineux en $O = O'$, $t = t' = 0$. B: réception de l'onde, vue de \mathcal{R} et vue de \mathcal{R}' .*

Soit l'événement B : le rayon est en $x = x_B, y = y_B, z = z_B, t = t_B$.

L'onde en B est

$$\psi_B = \psi(\vec{x}_B, t) = \hat{\psi} \cos(k_x x_B + k_y y_B - \omega t_B)$$

Avec $\vec{k} = k(\cos \theta \vec{e}_x + \sin \theta \vec{e}_y)$, on a

$$\psi_B = \hat{\psi} \cos(k \cos \theta x_B + k \sin \theta y_B - \omega t_B)$$

Pour obtenir la perturbation en B vue du référentiel de l'observateur \mathcal{R}' , il faut utiliser la transformation de Lorentz inverse:

$$x_B = \gamma(x'_B + vt'_B), \quad y_B = y'_B, \quad z_B = z'_B, \quad t_B = \gamma(t'_B + vx'_B/c^2), \quad (99)$$

avec

$$\boxed{\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}}. \quad (100)$$

On a donc, en substituant,

$$\begin{aligned} \psi_B &= \hat{\psi} \cos [k \cos \theta \gamma(x'_B + vt'_B) + k \sin \theta y'_B - \omega \gamma(t'_B + vx'_B/c^2)] \\ &= \hat{\psi} \cos [\gamma (k \cos \theta - \omega v/c^2) x'_B + k \sin \theta y'_B - \gamma (\omega - k \cos \theta v) t'_B] \end{aligned}$$

Or, l'onde EM doit satisfaire la relation de dispersion

$$\omega = ck$$

Substituant ω par ck dans le 1er terme et k par ω/c dans de 2e terme, on obtient

$$\psi_B = \hat{\psi} \cos \left[\gamma k \left(\cos \theta - \frac{v}{c} \right) x'_B + k \sin \theta y'_B - \gamma \omega \left(1 - \frac{v}{c} \cos \theta \right) t'_B \right]$$

On écrit ainsi:

$$\psi_B = \hat{\psi} \cos (k'_x x'_B + k'_y y'_B - \omega' t'_B)$$

ce qui montre que l'onde dans \mathcal{R}' est aussi une onde plane, mais de vecteur d'onde et fréquence angulaire différents de ceux dans \mathcal{R} , la relation étant donnée par:

$$\boxed{k'_x = \gamma k \left(\cos \theta - \frac{v}{c} \right)} \quad (101)$$

$$\boxed{k'_y = k \sin \theta} \quad (102)$$

$$\boxed{\omega' = \gamma \omega \left(1 - \frac{v}{c} \cos \theta \right)} \quad (103)$$

A partir de ces relations, on peut calculer la norme du vecteur d'onde dans \mathcal{R}' :

$$\boxed{k' = \gamma \left(1 - \frac{v}{c} \cos \theta \right) k} \quad (104)$$

On vérifie aussi que l'on a la relation de dispersion dans \mathcal{R}' :

$$\boxed{\frac{\omega'}{k'} = \frac{\omega}{k} = c}, \quad (105)$$

ce qui veut dire que la vitesse de propagation de l'onde EM dans le vide est c **dans tout référentiel d'inertie**. C'est d'ailleurs ce principe relativiste d'invariance de la vitesse de la lumière qui est à la base des transformations de Lorentz!

L'angle de propagation dans \mathcal{R}' est différent de celui dans \mathcal{R} :

$$\cos \theta' = \frac{k'_x}{k'} = \frac{\cos \theta - \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c} \cos \theta}$$

En résumé: dans \mathcal{R}' , on a aussi une onde plane, mais

$$k' \neq k \quad \lambda' \neq \lambda \quad \omega' \neq \omega \quad \nu' \neq \nu \quad \theta' \neq \theta$$

alors que

$$u = c = \lambda \nu = \lambda' \nu' = \frac{\omega}{k} = \frac{\omega'}{k'}$$

Remarque 1: dans le cas où la source et l'observateur s'éloignent, les relations (101-104), pour $v > 0, \theta = 0$, donnent

$$\omega' < \omega, \quad \lambda' > \lambda$$

Le fréquence reçue est inférieure à la fréquence émise et la longueur d'onde reçue est supérieure à la longueur d'onde émise: il y a, si on parle de domaines de la lumière visible, **décalage vers le rouge**.

Remarque 2: dans le cas où la source et l'observateur se rapprochent, les relations (101-104), pour $v < 0, \theta = 0$ (ou de façon équivalente pour $v > 0, \theta = \pi$), donnent

$$\omega' > \omega, \quad \lambda' < \lambda$$

Le fréquence reçue est supérieure à la fréquence émise et la longueur d'onde reçue est inférieure à la longueur d'onde émise: il y a, si on parle de domaines de la lumière visible, **décalage vers le violet**.

Ces phénomènes de décalage spectral sont observés notamment pour les objets célestes lointains (galaxies, quasars). Une mesure des longueurs d'onde reçues par rapport à celles (que l'on pense sont) émises nous donne une information sur la vitesse relative de ces sources de lumière par rapport à nous. On s'est aperçu que plus la source est éloignée dans l'univers, plus le décalage vers le rouge est important, et donc plus la vitesse relative d'éloignement est importante. Cet ensemble d'observations a été une des principales bases des théories de l'expansion de l'univers (p.ex. "big bang").

Remarque 3: dans le cas où l'onde se propage dans la direction perpendiculaire (dans le référentiel d'émission \mathcal{R}) au mouvement relatif des deux référentiels, $\vec{k} \perp \vec{v}$, $\theta = \pi/2$, et on a un décalage spectral

$$k' = \gamma k \Rightarrow \lambda' = \frac{1}{\gamma} \lambda = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \lambda$$

autrement dit $\lambda' < \lambda$, soit un décalage vers le violet. Alors que dans le cas où l'onde se propage dans la direction perpendiculaire (dans le référentiel de réception \mathcal{R}') au mouvement relatif des deux référentiels, $\vec{k}' \perp \vec{v}$, $\theta' = \pi/2$, donc $\cos \theta' = 0$ et $\cos \theta = v/c$, et on a un décalage spectral

$$k' = \gamma k \left(1 - \frac{v}{c} \cos \theta \right) = \frac{1 - \frac{v^2}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} k = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} k \Rightarrow \lambda' = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \lambda$$

autrement dit $\lambda' > \lambda$, soit un décalage vers le rouge. Ces deux effets (effet Doppler perpendiculaire) sont des effets purement relativistes, d'ordre v^2/c^2 .

Remarque. Peut-on mettre en évidence la **rotation** d'un référentiel avec des expériences basées sur la propagation de la lumière? La réponse est oui, c'est **l'effet Sagnac**. Il consiste à mesurer la différence de temps de propagation de signaux lumineux circulant dans un sens et dans l'autre entre un ensemble de miroirs. La différence de temps de propagation est mesurée par interférence des deux signaux. Ou, dans le cas du LASER, à mesurer une fréquence dédoubleée (2 fréquences séparées au lieu d'une). Avec cette

technique, dite du “**gyroscope LASER**” ou “**ring LASER**”, on peut actuellement mettre en évidence des vitesses de rotation par rapport au référentiel d’inertie de l’univers avec une précision de l’ordre de 10^{-6} fois la vitesse de rotation de la terre!

Pour en savoir plus sur l’effet Sagnac:

<http://www.mathpages.com/rr/s2-07/2-07.htm>

<http://www.wettzell.ifag.de/LKREISEL/CII/precise.htm>

http://edu.supereva.it/solciclos/ashby_d.pdf (GPS)

http://www.phys.canterbury.ac.nz/research/ring_laser/ring_laser.html

http://www.schott.com/magazine/english/info95/si095_04_laser.html