

Physique générale II  
Section de Mathématiques

---

Prof M. Q. Tran  
CRPP

Semestre de printemps 2016

Version 23.02.2016

Je remercie tous les étudiantes et étudiants qui m'ont mentionné les points peu clairs et qui ont détecté les nombreuses coquilles.



# Table des matières

<b>Notations du cours</b>	<b>3</b>
<b>1 Fluide au repos</b>	<b>7</b>
1.1 Introduction . . . . .	7
1.1.1 Densité d'un fluide . . . . .	7
1.2 Pression hydrostatique . . . . .	8
1.2.1 Pression dans un fluide . . . . .	8
1.2.2 Principe de Pascal . . . . .	12
1.2.3 Interface entre deux fluides immiscibles . . . . .	13
1.3 Tension superficielle . . . . .	15
1.3.1 Définition de la tension superficielle . . . . .	15
1.3.2 Equation de Laplace . . . . .	17
<b>2 Dynamique des fluides</b>	<b>19</b>
2.1 Introduction . . . . .	19
2.2 Les quantités fluides . . . . .	19
2.2.1 Description lagrangienne du fluide . . . . .	20
2.2.2 Description eulérienne . . . . .	21
2.3 Equations fluides . . . . .	22
2.3.1 Equation de continuité . . . . .	22
2.3.2 Equation de bilan pour la densité de quantité de mouvement . . . . .	26
2.3.3 Les 2 équations de continuité et d'Euler sont-elles suffisantes pour décrire le fluide ? . . . . .	30
2.3.4 Equation de bilan d'énergie cinétique . . . . .	31

2.3.5	Relation de Bernoulli . . . . .	34
2.3.6	Récapitulation . . . . .	37
2.4	Viscosité, écoulement d'un fluide visqueux . . . . .	37
2.4.1	Evidence de la viscosité . . . . .	37
2.4.2	Définition de la viscosité . . . . .	38
2.4.3	Ecoulement d'un fluide visqueux dans un tuyau (écoulement de Poiseuille) . . . . .	39
2.4.4	Tenseur de contrainte dans un fluide visqueux . . . . .	40
2.5	Appendice - Invariance galiléenne . . . . .	43
<b>3</b>	<b>Phénomènes ondulatoires</b>	<b>45</b>
3.1	Définition . . . . .	45
3.1.1	Onde longitudinale et onde transverse . . . . .	45
3.1.2	Onde propageante, onde stationnaire . . . . .	47
3.2	Ondes planes . . . . .	48
3.2.1	Définition . . . . .	48
3.2.2	Notation complexe . . . . .	49
3.2.3	Résumé . . . . .	52
3.3	Phénomène d'interférence . . . . .	54
3.4	Effet Doppler . . . . .	56
<b>4</b>	<b>Résolution des équations fluides : modes normaux</b>	<b>63</b>
4.1	Dérivation de la relation de dispersion . . . . .	63
4.1.1	Interprétation physique . . . . .	66
4.1.2	Que se passe-t-il si le fluide s'écoule ? . . . . .	67
4.1.3	Importance de l'équation d'état . . . . .	68
4.1.4	Effet Doppler pour les ondes acoustiques . . . . .	69
4.2	Onde dans un fluide de taille finie . . . . .	70
4.2.1	Relation de dispersion . . . . .	70
4.2.2	Discussion . . . . .	73

<b>5 Electrostatique</b>	<b>81</b>
5.1 Charges électriques . . . . .	81
5.1.1 Charge électrique . . . . .	81
5.1.2 Conducteur, isolant, semi-conducteur . . . . .	82
5.1.3 Quantification de la charge . . . . .	83
5.1.4 Densité de charge . . . . .	83
5.1.5 Conservation de la charge . . . . .	84
5.2 Loi de Coulomb . . . . .	84
5.2.1 Loi de Coulomb . . . . .	85
5.2.2 Additivité des forces de Coulomb . . . . .	86
5.3 Champ électrique . . . . .	86
5.3.1 Définition . . . . .	86
5.3.2 Champ électrique dû à une distribution de charge . . . . .	87
5.3.3 Lignes de champ . . . . .	88
5.4 Loi de Gauss, équation de Poisson . . . . .	89
5.4.1 Enoncé (sans démonstration) . . . . .	89
5.4.2 Applications de la loi de Gauss . . . . .	91
5.5 Potentiel électrique . . . . .	93
5.5.1 Définition du potentiel électrique . . . . .	93
5.5.2 Additivité du potentiel . . . . .	95
5.5.3 Exemple de calcul d'un potentiel . . . . .	95
5.5.4 Surface équipotentielle . . . . .	96
5.5.5 Travail et potentiel . . . . .	97
5.6 Quelques problèmes d'électrostatique . . . . .	99
5.6.1 Conducteur chargé . . . . .	99
5.6.2 Influence sur des conducteurs non chargés . . . . .	101
5.6.3 Discontinuité sur une surface . . . . .	102
5.6.4 Capacité et condensateur . . . . .	103
5.6.5 Capacité avec un diélectrique . . . . .	107
5.6.6 Equation de Laplace, équation de Poisson . . . . .	110
5.7 Résumé des notions importantes . . . . .	114

<b>6 Circuits électriques</b>	<b>117</b>
6.1 Introduction . . . . .	117
6.2 Définition de la fém . . . . .	118
6.3 Eléments de circuit : résistance et condensateur . . . . .	119
6.3.1 Résistance . . . . .	119
6.3.2 Appareil à fém idéal, appareil à fém réel . . . . .	120
6.3.3 Condensateur . . . . .	121
6.3.4 Circuit RC . . . . .	122
6.4 Lois de Kirchhoff . . . . .	124
6.4.1 Loi de Kirchhoff sur le courant . . . . .	124
6.4.2 Loi de Kirchhoff sur la tension . . . . .	125
6.4.3 Exemples . . . . .	127
6.5 Résumé . . . . .	129
6.6 Appendice - Voltmètre et ampèremètre . . . . .	130
<b>7 Magnétostatique</b>	<b>131</b>
7.1 Définition du champ magnétique <b>B</b> . . . . .	131
7.2 Couple agissant sur une boucle de courant . . . . .	133
7.3 Champ magnétique crée par un conducteur . . . . .	134
7.3.1 Loi de Biot et Savart . . . . .	135
7.3.2 Exemples . . . . .	136
7.4 Loi d'Ampère . . . . .	140
7.4.1 Forme intégrale . . . . .	140
7.4.2 Forme différentielle (ou locale) . . . . .	141
7.4.3 Exemples d'utilisation de la loi d'Ampère . . . . .	142
7.5 Valeur du flux $\int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$ sur une surface $S$ fermée . . . . .	146
7.6 Equation de continuité . . . . .	150
7.7 Relation à l'interface entre 2 milieux . . . . .	151

<b>8 Phénomènes d'induction magnétique</b>	<b>153</b>
8.1 Introduction . . . . .	153
8.2 Présentation de quelques phénomènes expérimentaux . . . . .	154
8.3 Loi de Lenz et loi de Faraday . . . . .	160
8.3.1 Loi de Lenz . . . . .	160
8.3.2 Loi de Faraday . . . . .	160
8.3.3 Exemples d'application de la loi de Faraday . . . . .	160
8.4 Champ électrique induit . . . . .	163
8.4.1 Loi de Faraday exprimée avec le champ électrique induit $\mathbf{E}$ . . . . .	165
8.4.2 Différence entre les champs électriques induit et électrostatique . . . . .	165
8.4.3 Forme locale de la loi de Faraday . . . . .	166
8.5 Circuit électrique en présence de phénomènes d'induction . . . . .	166
8.5.1 Self-induction . . . . .	167
8.5.2 Etude d'un circuit électrique avec une self . . . . .	169
8.5.3 Energie magnétique . . . . .	171
8.5.4 Décharge d'une self . . . . .	175
8.6 Circuit avec une fém $\varepsilon = V_o \cos \omega t$ . . . . .	176
8.6.1 Circuit avec $R$ . . . . .	176
8.6.2 Circuit avec $L$ et $R$ . . . . .	177
8.6.3 Circuit $R$ et $C$ . . . . .	178
8.6.4 Notion d'impédance . . . . .	179
<b>9 Equations de Maxwell</b>	<b>185</b>
9.1 Introduction . . . . .	185
9.2 Critique de l'équation $\nabla \wedge \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$ . . . . .	186
9.2.1 Rappel : Equation de continuité . . . . .	186
9.2.2 Intermède mathématique . . . . .	186
9.2.3 Critique de l'équation $\nabla \wedge \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$ . . . . .	187
9.3 La quatrième équation selon Maxwell . . . . .	187
9.4 Les équations de Maxwell . . . . .	188
9.4.1 Les quatre équations de Maxwell sont-elles indépendantes ? . . . . .	189

9.4.2	Les équations de Maxwell à l'état stationnaire . . . . .	190
9.5	Les équations de Maxwell et la lumière dans le vide . . . . .	191
9.5.1	Intermède mathématique : définition de $\nabla \wedge (\nabla \wedge \mathbf{A})$ . . . . .	191
9.5.2	Les équations de Maxwell dans le vide . . . . .	191
9.5.3	Ondes électromagnétiques et lumière . . . . .	194
9.5.4	Polarisation . . . . .	196
9.5.5	Vecteur de Poynting et transport d'énergie . . . . .	198
9.5.6	Vecteur de Poynting dans quelques cas particuliers . . . . .	200
9.5.7	Retour sur les phénomènes d'interférence . . . . .	201
9.6	Interprétation des différents termes dans les équations de Maxwell . . . . .	203
9.6.1	Introduction du problème . . . . .	203
9.6.2	Interprétation physique de $\rho_{ext}$ et $\mathbf{j}_{ext}$ . . . . .	204
9.6.3	Équations de Maxwell dans un milieu diélectrique . . . . .	205
9.7	Transformation des champs $\mathbf{E}$ et $\mathbf{B}$ . . . . .	207
9.7.1	Introduction . . . . .	207
9.7.2	Formules de transformation . . . . .	207
9.8	Loi de l'optique géométrique et équations de Maxwell . . . . .	209
9.9	Appendice - Potentiels . . . . .	212
9.9.1	Potentiels vecteur $A$ et scalaire $\Phi$ . . . . .	212
9.9.2	Jauge de Lorentz . . . . .	214
9.9.3	Jauge de Coulomb . . . . .	217
9.10	Appendice - Champ transverse et champ longitudinal . . . . .	222
<b>Annexe</b>		<b>223</b>



# Notations du cours

## Scalaire et vecteur

Dans le cours, nous distinguerons les quantités scalaires (p. ex. la masse, la charge électrique) et les quantités vectorielles (p. ex. la vitesse  $\mathbf{u}$ , les forces  $\mathbf{F}$ ). Les vecteurs sont notés par une lettre en gras, comme par exemple  $\mathbf{u}$ . Les quantités vectorielles sont définies par un vecteur qui possède une norme et une direction. Dans l'espace à trois dimensions, elles sont définies par leurs trois composantes. Par exemple, dans l'espace muni d'un repère cartésien  $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$  la vitesse  $\mathbf{u}$  est

$$\mathbf{u} = u_x \mathbf{e}_x + u_y \mathbf{e}_y + u_z \mathbf{e}_z$$

$$\mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z)$$

$$\|\mathbf{u}\| = u = \sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2}$$

Une quantité scalaire (p. ex. la masse  $m$ ) est définie par une seule quantité.

Les quantités scalaires et vectorielles peuvent être fonction de la position  $\mathbf{r}$  et du temps. On les appelle alors respectivement champs scalaires ou champs vectoriels.

## Opérateur $\nabla$ et définition du gradient, de la divergence et du rotationnel dans les coordonnées cartésiennes

L'opérateur différentiel vectoriel  $\nabla$  (appelé "nabla" ou "del") est un opérateur défini en coordonnées cartésiennes par

$$\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

$$\nabla = \mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z}$$

Le **gradient** d'une fonction scalaire  $f(\mathbf{r})$  est un vecteur.

$$\nabla f(\mathbf{r}) = \mathbf{e}_x \frac{\partial f}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial f}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial f}{\partial z}$$

La **divergence** d'un champ vectoriel  $\mathbf{u}(\mathbf{r})$  est un scalaire.

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

Symboliquement, c'est le produit scalaire de  $\nabla$  et  $\mathbf{u}$ .

Le **rotationnel** d'un champ vectoriel  $\mathbf{u}(\mathbf{r})$  est un champ vectoriel  $\mathbf{v}$  défini par le produit vectoriel :

$$\mathbf{v} = \nabla \wedge \mathbf{u} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u_x & u_y & u_z \end{vmatrix} = \mathbf{e}_x \left( \frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) + \mathbf{e}_y \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) + \mathbf{e}_z \left( \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right)$$

Nous considérons que  $\nabla$  est un vecteur et que nous pouvons "l'utiliser" comme tel. Il faut juste faire attention que les opérations ont un "ordre".

Notez que le gradient, la divergence et le rotationnel peuvent être définis pour d'autres systèmes de coordonnées que le système de coordonnées cartésiennes. Naturellement, on a par exemple

$$\nabla f)_{\text{cartésien}} = \nabla f)_{\text{coordonnées quelconques}}$$

Vous verrez ce genre d'égalité dans vos cours de mathématiques. D'une manière générale, si pour des raisons de simplicité nous définissons le gradient, la divergence et le rotationnel en coordonnées cartésiennes, ces quantités sont indépendantes du système de coordonnées utilisées pour les calculer.

## Calculs avec le gradient, la divergence et le rotationnel

Nous donnons ici sans démonstration quelques formules dont nous aurons besoin.

$$\nabla \cdot (f\mathbf{u}) = \mathbf{u} \cdot \nabla f + f \nabla \cdot \mathbf{u}$$

$$\nabla \cdot (f\mathbf{u}) = (\mathbf{u} \cdot \nabla) f + f \nabla \cdot \mathbf{u}$$

## Formules avec les intégrales

### Théorème de la divergence

Soit un volume  $V$  entouré par une surface  $S$ . Soit  $\mathbf{u}$  un champ vectoriel.

$$\int_S \mathbf{u} \cdot d\mathbf{S} = \int_V (\nabla \cdot \mathbf{u}) dV$$

Ce théorème est connu sous le nom de **théorème de la divergence**.

Si nous définissons

$$d\mathbf{S} = \mathbf{n} d^2 r$$

où  $\mathbf{n}$  est le vecteur unitaire normal à  $S$  et dirigé vers l'extérieur de la surface, le théorème de la divergence s'écrit

$$\int_S d^2 r (\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}) = \int_V dV \cdot \nabla \cdot \mathbf{u} = \int_V d^3 r \cdot \nabla \cdot \mathbf{u}$$

### Théorème du gradient

Soit  $f$  un champ scalaire.

Nous avons

$$\int_S f d\mathbf{S} = \int_V dV \cdot \nabla f$$

où  $V$  est le volume entouré par  $S$ .

### Loi de Stokes

Soit une surface  $S$  entourée par un contour fermé  $C$ . Soit un champ vectoriel  $\mathbf{B}$ . Nous avons

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \int_S (\nabla \wedge \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{S}$$

### Notation

Nous utilisons d'une manière indifférente les notations suivantes :

- Intégrale de surface  $\int dS f$  ou  $\int d^2 r f$
- Intégrale de volume  $\int dV f$  ou  $\int d^3 r f$



# Chapitre 1

## Fluide au repos

### 1.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous introduisons la notion de fluide et quelques propriétés des fluides au repos. Mais il est tout d'abord utile de préciser ce que l'on entend par *fluide*. Nous avons distingué les états de la matière suivants :

- l'état solide,
- l'état liquide,
- l'état gazeux.

L'état plasma, souvent cité comme quatrième état de la matière, est un gaz ionisé : les électrons, qui gravitent autour des noyaux chargés positivement, ne sont plus liés aux ions. Nous avons alors un gaz formé d'électrons et d'ions.

Le terme de fluide rassemble les liquides et les gaz. Un fluide peut couler. Il prend la forme du récipient dans lequel il est mis. Ce chapitre introduit des définitions relatives aux fluides : pression, densité, et pour les interfaces entre liquide et gaz, tension superficielle.

#### 1.1.1 Densité d'un fluide

Soit un élément de volume  $\Delta V$  d'un fluide. La masse de cet élément est  $\Delta m$ . La densité  $\rho$  du fluide est donc

$$\rho = \frac{\Delta m}{\Delta V} \quad (1.1)$$

L'unité de  $\rho$ , notée  $[\rho]$ , est une unité de masse par unité de volume :

$$[\rho] = \text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$$

La définition (1.1) de la densité nous donne une densité macroscopique. On définit la densité au point  $\mathbf{r}$  du fluide en faisant tendre le volume  $\Delta V$  pris autour de  $\mathbf{r}$  vers un "petit" volume  $dV$ .

$$\rho(\mathbf{r}) = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta V} \Big|_{\text{au point } \mathbf{r}} \quad (1.2)$$

Nous avons utilisé le terme "petit" volume  $dV$ . En pratique,  $dV$  est grand par rapport aux dimensions atomiques, mais reste petit par rapport aux échelles de variation de la densité dans le fluide.

D'une manière générale, la densité locale  $\rho(\mathbf{r})$  peut aussi dépendre du temps.

$$\rho = \rho(\mathbf{r}, t) \quad (1.3)$$

$\rho = \rho(\mathbf{r}, t)$  définit un champ scalaire. Un champ scalaire est une fonction qui décrit une propriété physique descriptible par un scalaire, et qui est une fonction de l'espace  $\mathbf{r}$  et du temps  $t$ .

Le tableau 1.1 donne l'ordre de grandeur de la densité de quelques corps.

Milieu	Densité [kg·m <sup>-3</sup> ]
Espace interstellaire	$10^{-20}$
Atmosphère terrestre à 20 °C et 1 atm	1.21
Coeur du soleil	$1.6 \cdot 10^5$
Densité moyenne du soleil	$1.4 \cdot 10^3$
Etoile à neutrons	$10^{18}$
Trou noir avec une masse d'un soleil	$10^{19}$
Fer	$7.9 \cdot 10^3$
Mercure	$13.6 \cdot 10^3$
Densité moyenne de la terre	$5.5 \cdot 10^3$

TABLE 1.1 – Quelques densités typiques

## 1.2 Pression hydrostatique

### 1.2.1 Pression dans un fluide

La pression sur une surface  $S$  exercée par une force  $F$  est  $p = F/S$ . L'unité de pression est le Pascal :  $[p] = \text{N} \cdot \text{m}^{-2} = \text{Pascal} \equiv \text{Pa}$ . La pression est un scalaire.

Nous considérons des fluides qui sont au repos, et nous cherchons une expression de la pression en fonction de la profondeur (figure 1.1).

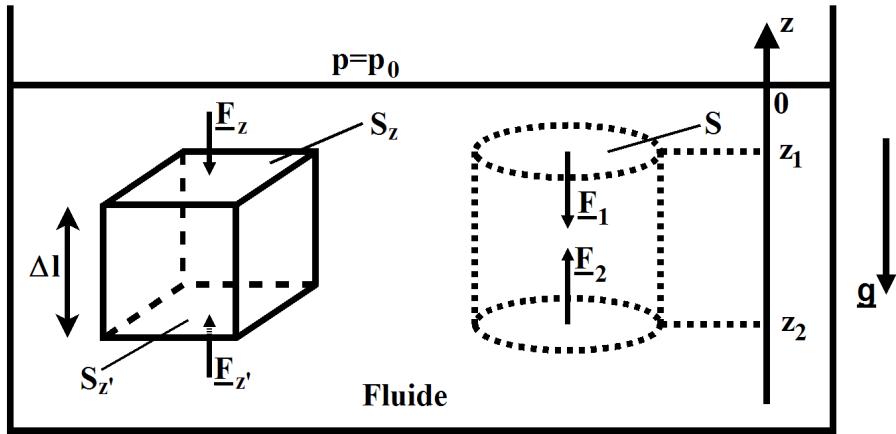


FIGURE 1.1 – Deux éléments dans un fluide : un cylindre et un cube.  $F_1$  est dirigée selon  $\mathbf{g}$  et  $F_2$  selon  $-\mathbf{g}$ .

Par convention,  $p_0$  désigne la pression atmosphérique. Nous considérons un cylindre dont les faces planes sont à des hauteurs  $z_1$  et  $z_2$ . Le fluide exerce sur la face plane en  $z_1$ , de surface  $S$ , une force  $F_1 = p_1 S$ . De même, nous avons une force  $F_2 = p_2 S$  qui s'exerce sur la surface plane en  $z_2$ . Notez que, par convention dans cette démonstration,  $F_1$ ,  $F_2$  et  $g$  sont des quantités arithmétiques. L'équilibre des forces donne

$$F_2 = F_1 + mg$$

où  $m$  est la masse du fluide dans le cylindre. Avec  $h$  la hauteur du cylindre, nous avons

$$p_2 S = p_1 S + \rho g(z_1 - z_2) S$$

$$p_2 = p_1 + \rho g h \quad (1.4)$$

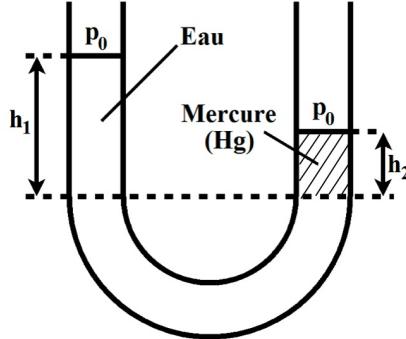
En prenant  $z_1 = 0$ ,  $p_1$  est la pression atmosphérique à la surface du fluide.

$$p(h) = p_0 + \rho g h \quad (1.5)$$

La pression à une profondeur  $h$  en-dessous de la surface du fluide est égale à la pression atmosphérique  $p_0$  additionnée à  $\rho g h$ . Elle ne dépend pas de la forme du récipient.

### Exemple

Soit un tube en U rempli de mercure et d'eau.



Nous avons  $p_0 + h_1 \rho_{eau} g = p_0 + h_2 \rho_{Hg} g$ . En posant  $h_1 - h_2 = d$ , calculons  $d$  :

$$\rho_{eau}(h_2 + d) = \rho_{Hg}h_2$$

$$d = \frac{(\rho_{Hg} - \rho_{eau})h_2}{\rho_{eau}}$$

### Forme différentielle de l'équation (1.4)

Considérons un petit volume cubique dans le fluide de la figure 1.1. Sur la face  $S_z$  s'exerce une force  $F_z$  :

$$F_z = p_z(\Delta S_z)$$

De même, une force  $F_{z'}$  s'exerce sur la face  $S_{z'}$  :

$$F_{z'} = p_{z'}(\Delta S_{z'})$$

L'équilibre des forces s'écrit :  $F_{z'} = F_z + \rho(\Delta S_z)g\Delta l$

avec  $\Delta l = z - z'$  Nous supposons  $(z - z')$  petit. A la limite,  $(z - z') = dz \rightarrow 0$ .

$$\frac{F_z - F_{z'}}{(z - z')} = \frac{dF}{dz} = -g\rho(\Delta S_z)$$

soit

$$\frac{d(F/\Delta S_z)}{dz} = -\rho g$$

Et donc

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g$$

Si  $dz > 0$  (voir figure),  $dp < 0$  ( $g > 0$ ).

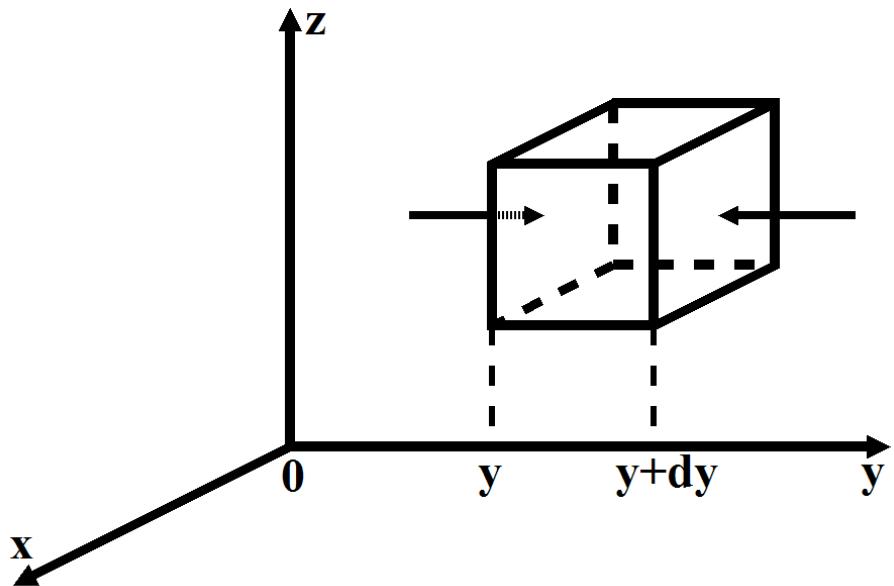
Plusieurs remarques doivent être faites ici :

- C'est le vecteur  $\mathbf{g}$  qui définit la direction de l'axe Oz. Pour des grandes surfaces (par exemple dans les océans), la direction de  $\mathbf{g}$  peut varier, donc celle de l'axe Oz également.
- La pression hydrostatique varie le long d'une ligne de champ de  $\mathbf{g}(\mathbf{r})$ . Rappelons qu'une ligne de champ d'un champ de vecteur  $\mathbf{g}$  est tangente en tout point au vecteur  $\mathbf{g}$ . La norme de  $\mathbf{g}$  (soit  $g$ ) change le long de la ligne de champ.

Nous venons de voir que la pression varie dans la direction parallèle à  $\mathbf{g}$ . Un raisonnement analogue nous montre que la pression reste constante dans une direction perpendiculaire à  $\mathbf{g}$ .

### Force associée à la pression

Considérons un petit élément de fluide.



La force  $f_y$  exercée sur la face  $\Delta S_y$  perpendiculaire à  $y$  est

$$\begin{aligned} F_y &= -(p(y + dy) - p(y))|_{x,z=cte} \Delta S_y \\ F_y &= -\frac{p(y + dy) - p(y)}{dy} \Big|_{x,z=cte} dy dx dz \\ F_y &= -\frac{\partial p}{\partial y} dy dx dz \\ F_y &= f_y dy dx dz \end{aligned}$$

$f_y = -\frac{\partial p}{\partial y}$  a la dimension d'une densité de force :  $[f_y] = \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \cdot \frac{1}{\text{m}} = \frac{\text{N}}{\text{m}^3}$

De même, nous avons

$$f_x = -\frac{\partial p}{\partial x} \text{ et } f_z = -\frac{\partial p}{\partial z}$$

La dimension de  $\nabla p$  est  $\frac{\text{N}}{\text{m}^3}$ . D'une manière générale, nous avons :

$$\mathbf{f} = -\nabla p$$

$\mathbf{f}$  est le gradient du champ scalaire de pression  $p$ .

**La densité de force  $\mathbf{f}$**  associée au champ scalaire de pression  $p(\mathbf{r})$  est

$$\mathbf{f}(\mathbf{r}, t) = -\nabla p(\mathbf{r}, t)$$

### 1.2.2 Principe de Pascal

Nous savons qu'un solide transmet les forces : si nous appuyons sur un bâton avec une force  $F$  à l'une des extrémités, une force est transmise à l'autre extrémité. Quelle est la propriété analogue pour les fluides ? Considérons l'arrangement expérimental de la figure 1.2.

Initialement, les deux pistons  $P_1$  et  $P_2$  sont à la pression atmosphérique. La hauteur de la colonne  $h$  est la même des deux côtés. Nous appliquons une force  $F_1$  sur le piston  $P_1$ . Pour pouvoir maintenir le piston  $P_2$  à la même hauteur  $h$ , il faut appliquer une force  $F_2$ , qui donne lieu à une pression  $p_2 = F_2/S_2$ . La hauteur  $h$  restant la même, l'application de l'équation (1.5) donne

$$\frac{F_1}{S_1} = p_1 = p_2 = \frac{F_2}{S_2}$$

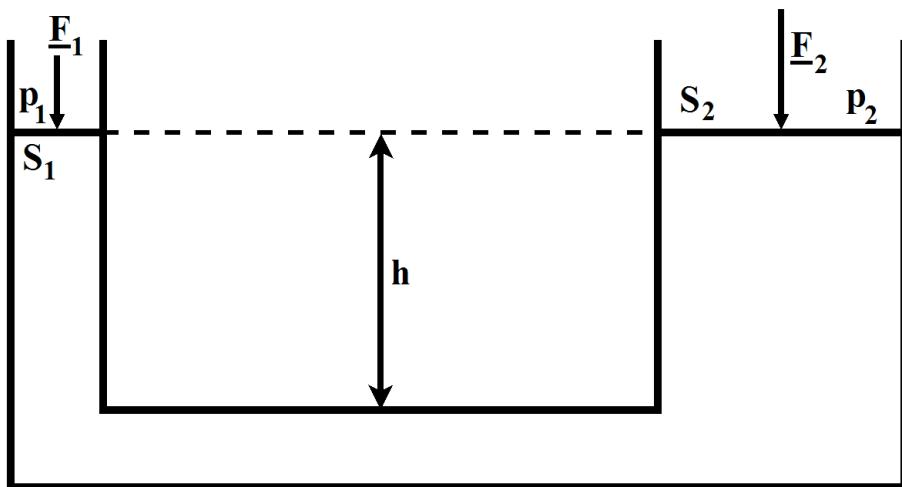


FIGURE 1.2 – Principe de Pascal

C'est l'expression mathématique du principe de Pascal. Dans un fluide incompressible, un changement de pression est transmis sans changement à chaque partie du fluide et à chaque portion des parois du récipient qui le contient.

### 1.2.3 Interface entre deux fluides immiscibles

Nous considérons deux fluides immiscibles (c.à.d. qui ne peuvent pas se mélanger), et nous allons nous intéresser à la forme de l'interface entre ces deux fluides. Supposons que l'interface soit celle de la figure 1.3.

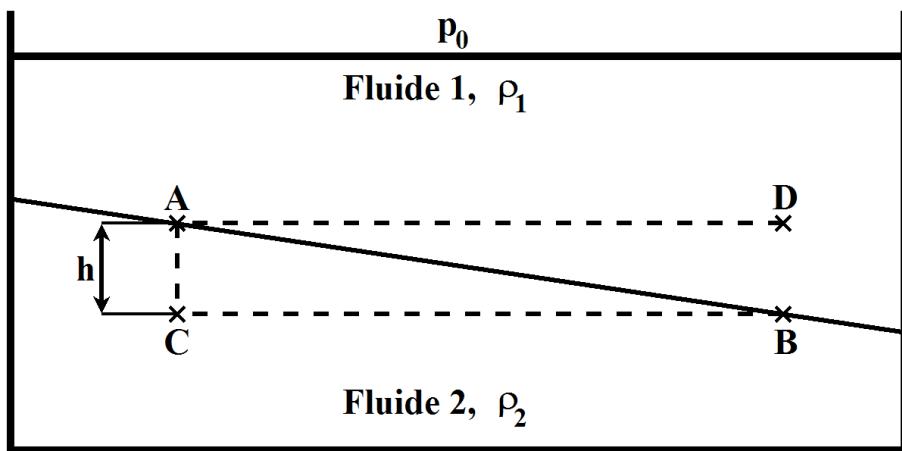


FIGURE 1.3 – Interface entre deux fluides immiscibles

Le point C est dans le fluide 2, à la même profondeur que le point B. Nous avons donc  $p_C = p_B$ . Or  $p_C = p_A + \rho_2 gh$ .

$$p_C = p_A + \rho_2 gh = p_A + \rho_1 gh$$

$$\rho_2 h = \rho_1 h$$

La seule solution pour  $\rho_1 \neq \rho_2$  est alors  $h = 0$ . L'interface entre deux fluides de densités différentes est un plan horizontal.

### Notions d'équilibre et de stabilité

Nous venons de définir la condition pour l'interface entre deux fluides immiscibles de densités différentes. Cette condition donne seulement la condition à l'équilibre. Elle ne nous permet pas de savoir si l'équilibre est stable ou instable. L'expérience de chaque jour nous permet de dire que de l'huile sur du vinaigre forme une situation stable. Par contre, mettre de l'eau sur de l'huile aboutit à une situation instable : après un certain temps, la situation se "renverse" et l'huile se met au-dessus de l'eau, malgré le fait que l'interface originale est bien un plan horizontal (ce qui satisfait la condition d'équilibre).

En effet, une fois l'équilibre établi (de l'eau sur de l'huile avec une interface plane), de petites perturbations de cet équilibre se feront spontanément. L'interface sera légèrement déformée (voir figure 1.4).

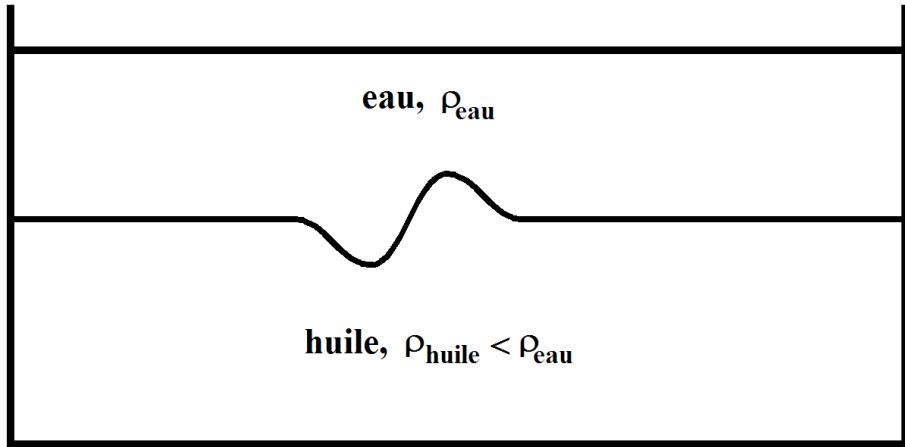


FIGURE 1.4 – Fluides immiscibles : perturbations de l'équilibre

Dans la configuration définie par la figure 1.4, la perturbation va croître : l'amplitude de la "bosse" d'eau dans l'huile va augmenter. C'est l'**instabilité de Rayleigh-Taylor** d'un fluide lourd sur un fluide léger.

L'expérience de l'huile sur l'eau ou de l'eau sur l'huile nous amène donc à distinguer deux problèmes :

- Le premier est de trouver les conditions que doit satisfaire un état d'équilibre.
- Le deuxième est de savoir si cet équilibre est stable (c'est-à-dire si les perturbations de cet équilibre vont diminuer) ou instable (si les perturbations vont croître et détruire l'équilibre initial).

## 1.3 Tension superficielle

Jusqu'à maintenant nous n'avons pas considéré les problèmes liés à une interface. Par exemple, une bulle de savon est un film de liquide avec deux interfaces air-film liquide, une à l'intérieur de la bulle, et l'autre à l'extérieur.

### 1.3.1 Définition de la tension superficielle

Soit un film de liquide tendu dans un cadre ABCD (figure 1.5).

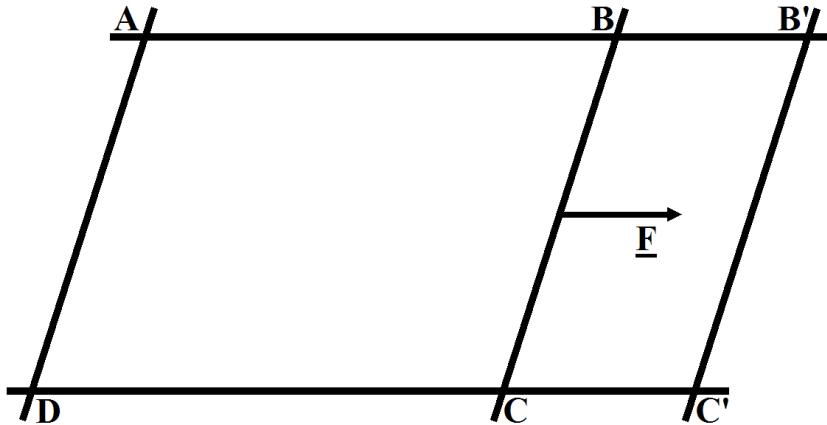


FIGURE 1.5 – Film de liquide dans un cadre

Si nous voulons déplacer BC en B'C', nous devons exercer une force  $F$ .

En posant  $BB' = CC' = dl$ , le travail de la force  $F$  est

$$\delta W = Fdl = 2\gamma BCdl = 2\gamma dS \quad (1.6)$$

où  $\gamma$  est appelé **tension superficielle**. Le facteur 2 a été introduit car, dans cette expérience, nous avons 2 interfaces liquide-air (une "au-dessus" et une "au-dessous" du film liquide). L'unité de  $\gamma$  est :  $[\gamma] = \text{N}\cdot\text{m}^{-1}$ .

On note que nous avons défini  $\gamma$  d'une manière phénoménologique - on dit que  $F$  est proportionnel à  $BC$ , le coefficient de proportionnalité étant  $\gamma$  s'il y a 1 interface liquide-air ou  $2\gamma$  s'il y a 2 interfaces. La définition 1.6 relie le travail  $\delta W$  à  $\gamma$ .

Le tableau 1.2 donne quelques valeurs de  $\gamma$ .

Liquide	$\gamma$ [N·m <sup>-1</sup> ]
Eau	$7 \cdot 10^{-2}$
Verre fondu	$10^{-1}$
Métaux liquides	$10^{-2} - 1.5$

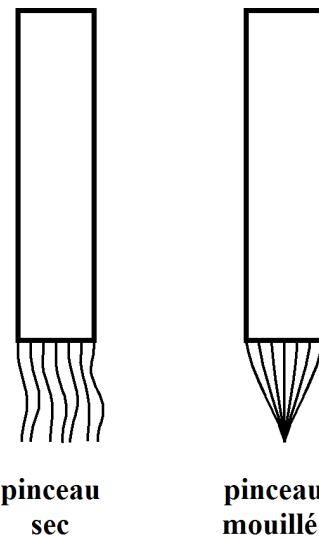
TABLE 1.2 – Quelques valeurs de tension superficielle

La tension superficielle est liée à l'interface. Dans un liquide, les forces exercées sur une molécule par les autres sont équilibrées. Par contre, la présence d'une interface ne permet plus l'équilibre de ces forces, d'où l'origine de la tension superficielle.

Revenons à l'équation (1.6). Elle montre qu'à cause de la tension superficielle, une augmentation de la surface ABCD nécessite un travail  $\delta W$ . Nous pouvons intuitivement en déduire que la forme, par exemple, des bulles de savon minimise l'énergie correspondant à la tension superficielle, en tenant compte des contraintes extérieures.

Une bulle d'eau savonneuse est sphérique, car la sphère a une surface minimale (minimisation du travail de la tension superficielle) pour un volume donné (contrainte).

Une autre expérience met en évidence la tension superficielle. Prenons un pinceau. Sec, les poils sont bien séparés. Mouillé, les poils sont rassemblés. Le film liquide entre les poils minimise sa surface et rassemble, par ce processus, les poils.



### 1.3.2 Equation de Laplace

Le but est de calculer la différence de pression entre l'intérieur et l'extérieur d'une sphère séparant un fluide 1 (p.ex. une bulle d'air) immergé dans un fluide 2 (p.ex. de l'eau) (figure 1.6). Soit  $R_0$  le rayon de la bulle,  $\Delta p = p_1 - p_2$ . Le but du calcul est de trouver une expression pour  $\Delta p$ .

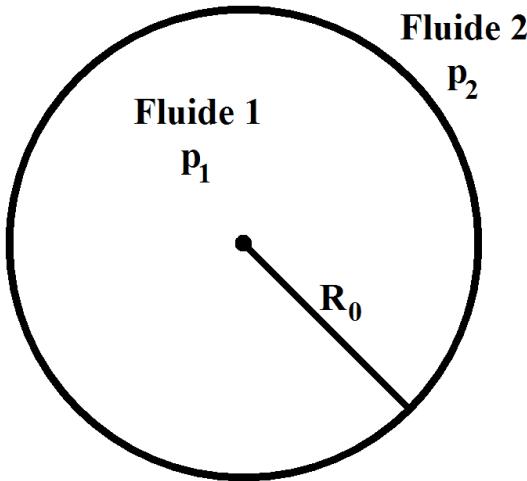


FIGURE 1.6 – Sphère séparant deux fluides

Notons que dans ce problème nous avons seulement une interface entre les fluides 1 et 2.

#### Raisonnement mathématique

Sous les conditions données (rayon  $R_0$  de la bulle et différence de pression  $\Delta p = p_1 - p_2$  données), la bulle est dans une situation d'équilibre. Du point de vue énergétique, la bulle est dans un état d'énergie minimale (cf Cours de mécanique). Mathématiquement, nous exprimons ceci en disant que la dérivée de l'énergie du système est nulle pour la valeur  $R_0$ , rayon de la bulle. Calculons d'abord  $dW$ , variation de l'énergie du système lorsque nous essayons de changer le rayon de la bulle de  $R_0$  à  $R_0 + dR$  :

$$dW = dW_S + dW_P$$

où

- $dW_S$  = variation du l'énergie due à la tension superficielle,
- $dW_P$  = variation de l'énergie due à la pression.

Nous avons donc

$$\left. \frac{dW}{dR} \right|_{R=R_0} = 0$$

Et donc

$$dW = 0 \text{ pour } R = R_0$$

$$dW_S = d[4\pi\gamma R^2]$$

(pas de facteur 2 car nous avons seulement 1 interface)

$$dW_S = 8\pi\gamma R dR$$

$$dW_P = -\Delta p dV = -(p_1 - p_2) d \left[ \frac{4}{3} \pi R^3 \right] = -(p_1 - p_2) 4\pi R^2 dR$$

Si le volume augmente ( $dR > 0$ ) la pression fait du travail, d'où le signe moins. Pour  $R = R_0$ , nous avons  $dW = 0$ .

$$8\pi\gamma R_0 = (p_1 - p_2) 4\pi R_0^2$$

$$\Delta p = p_1 - p_2 = \frac{2\gamma}{R_0} \quad (1.7)$$

La formule (1.7) est connue sous le nom de **loi de Laplace**.

Il existe dans le fluide 1 une surpression  $p_1$  :

$$p_1 = p_2 + \frac{2\gamma}{R}$$

Le terme  $2\gamma/R$  a bien la dimension d'une pression :  $\text{N}\cdot\text{m}^{-2}$ .

Pour 1 bulle de savon p. ex., il y a 2 interfaces  $p_1 = p_2 + \frac{4\gamma}{R}$ . Si la surface a 2 rayons de courbure  $R_1$  et  $R_2$ , la loi de Laplace est

$$\Delta p = \gamma \left[ \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right]$$

Ceci est montré lors d'une expérience du cours.

## Chapitre 2

# Dynamique des fluides

### 2.1 Introduction

Après avoir défini les quantités fluides, nous décrirons les équations qui régissent les fluides en mouvement ainsi que leurs propriétés physiques. Notre étude portera surtout sur des fluides non visqueux. Nous décrirons, comme conséquence des équations fluides, l'équation de Bernoulli, qui est valable pour un fluide parfait incompressible. Finalement, nous montrerons que les fluides réels sont des fluides visqueux.

### 2.2 Les quantités fluides

Considérons dans le fluide un élément infinitésimal  $dV$  repéré par le vecteur position  $\mathbf{r}$ . La densité du fluide dans  $dV$  est  $\rho(\mathbf{r})$ . Si le fluide est en mouvement, l'élément de fluide dans  $dV$  a une vitesse fluide  $\mathbf{u}$ .

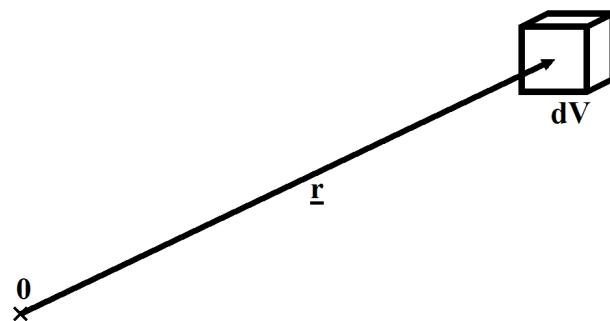


FIGURE 2.1 – Elément de fluide  $dV$  repéré par le vecteur  $\mathbf{r}$

Faisons immédiatement une remarque sur la vitesse fluide  $\mathbf{u}$  :  $\mathbf{u}$  est la vitesse de l'élément

de fluide  $dV$ . Nous savons d'autre part que le fluide est composé d'atomes ou de molécules qui sont agités de mouvements aléatoires (cf. Cours de Thermodynamique de Physique Générale II). La vitesse  $\mathbf{v}$  des atomes ou des molécules n'est pas la vitesse fluide  $\mathbf{u}$  ! Finalement, dans l'élément de fluide, il y a une pression  $p(\mathbf{r})$ .

### 2.2.1 Description lagrangienne du fluide

Dans cette description, nous suivons le mouvement de l'élément de fluide  $dV$ , décrit par son vecteur position  $\mathbf{r}_f(t)$ .

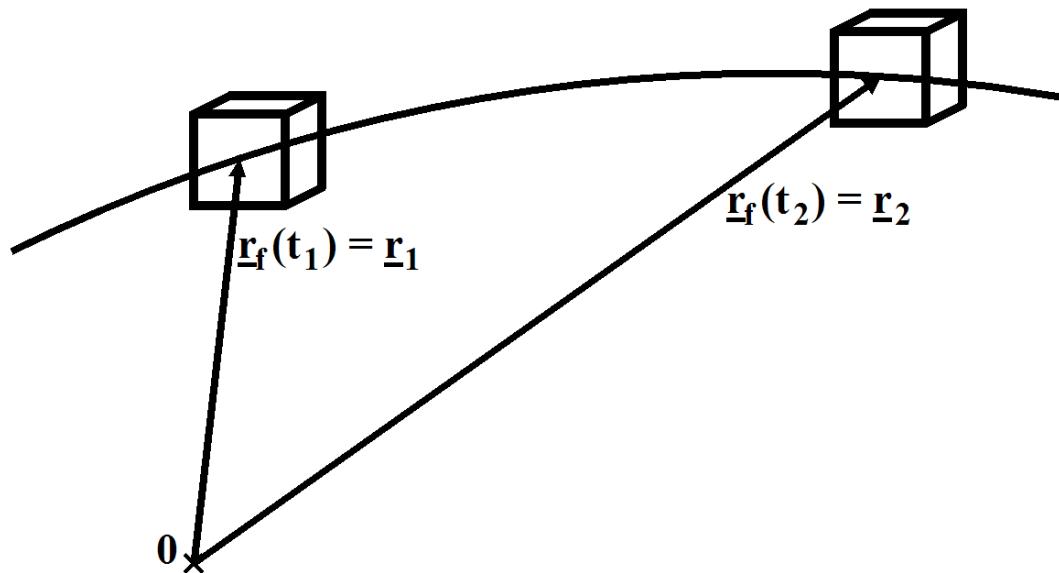


FIGURE 2.2 – Mouvement de l'élément de fluide  $dV$

Les notions de vitesse et d'accélération sont alors déduites d'une manière simple. Nous pouvons aussi utiliser la notion de trajectoire.

Nous pouvons représenter la description lagrangienne comme celle vue par un bouchon emporté par l'eau d'une rivière en mouvement : le bouchon "visualise" l'élément de fluide.

Calculons la variation d'une quantité, par exemple  $\rho$ , dans la description lagrangienne. Au temps  $t = t_1$ , l'élément fluide est en  $\mathbf{r}_1$  et  $\rho$  vaut  $\rho_1$ . En  $t = t_2$ ,  $\rho$  vaut  $\rho_2$  et doit être mesuré en  $\mathbf{r}_2$ .

$$\delta\rho = \rho_2 - \rho_1 = \frac{\partial\rho}{\partial t}\delta t + \frac{\partial\rho}{\partial x}\delta x + \frac{\partial\rho}{\partial y}\delta y + \frac{\partial\rho}{\partial z}\delta z$$

Le terme  $\frac{\partial\rho}{\partial t}\delta t$  décrit la variation de  $\rho$  due à sa dépendance explicite dans le temps.

Les termes  $\left(\frac{\partial \rho}{\partial x}\delta x + \frac{\partial \rho}{\partial y}\delta y + \frac{\partial \rho}{\partial z}\delta z\right)$  sont liés au fait que l'élément fluide a bougé de  $\mathbf{r}_1$  à  $\mathbf{r}_2$ .

Pour de petits  $\delta t$  et  $\delta \mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ , nous avons donc

$$\delta t = dt$$

$$\delta x = dx, \quad \delta y = dy, \quad \delta z = dz$$

et donc

$$d\rho = \frac{\partial \rho}{\partial t}dt + \frac{\partial \rho}{\partial x}dx + \frac{\partial \rho}{\partial y}dy + \frac{\partial \rho}{\partial z}dz$$

C'est la différentielle totale de  $\rho$  en  $t$ .

De plus

$$\frac{dx}{dt} = u_x, \quad \frac{dy}{dt} = u_y, \quad \frac{dz}{dt} = u_z$$

d'où

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{dt} &= \frac{\partial \rho}{\partial t} + u_x \frac{\partial \rho}{\partial x} + u_y \frac{\partial \rho}{\partial y} + u_z \frac{\partial \rho}{\partial z} \\ \frac{d\rho}{dt} &= \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\rho \end{aligned}$$

$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)$  est appelée **dérivée convective**. Elle nous permet de calculer la variation d'une quantité (par exemple  $\rho$ ) en suivant l'élément de fluide.

L'accélération  $\mathbf{a}$  d'un élément de fluide est alors

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}$$

### 2.2.2 Description eulérienne

Imaginons maintenant que, dans un fluide en mouvement, nous avons un réseau de sondes de mesure, comme des appareils de mesure de  $\rho$ , de vitesse fluide  $\mathbf{u}$ , avec une résolution temporelle  $t$ . Nous pouvons donc en principe avoir une mesure de  $\rho(\mathbf{r}, t)$  et  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  résolue dans l'espace  $\mathbf{r}$  et dans le temps  $t$ .

Contrairement à ce qui se passe dans la description lagrangienne, la densité  $\rho$ , la vitesse fluide  $\mathbf{u}$ , et les autres quantités physiques observées au même endroit  $\mathbf{r}$  mais à deux temps  $t$  différents correspondent à des éléments fluides différents.

## 2.3 Equations fluides

Nous nous proposons de trouver les équations qui gouvernent les quantités physiques qui décrivent un fluide en mouvement. Ces quantités sont, *a priori* :

- la densité  $\rho(\mathbf{r}, t)$
- la vitesse fluide  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$
- la pression fluide  $p(\mathbf{r}, t)$

Ce fluide peut être soumis à des forces extérieures  $\mathbf{F}(\mathbf{r}, t)$ . Il s'agit de trouver un système d'équations différentielles liant ces quantités.

### 2.3.1 Equation de continuité

Soit un volume  $V$  fixe dans le fluide, c'est donc une description eulérienne. Nous supposons qu'il n'y a pas de réaction nucléaire qui change la masse du fluide (cf. Dynamique relativiste, Cours Physique Générale II). La variation de la masse due à la variation de la densité est donc égale au flux de masse  $\rho\mathbf{u}$  à travers la surface  $S$  entourant le volume  $V$ .

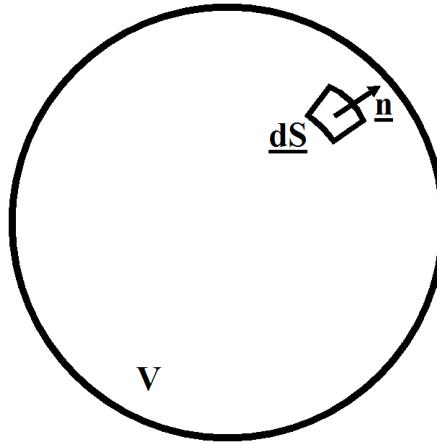


FIGURE 2.3 – Volume  $V$  fixe. Le vecteur unitaire  $\mathbf{n}$  est normal à la surface  $\mathbf{dS}$  et dirigé vers l'extérieur.

La variation de la masse  $M$  incluse dans  $V$  est

$$M(t) = \int_V d^3r \rho(\mathbf{r}, t)$$

$$\frac{dM}{dt} = \frac{d}{dt} \int_V d^3r \rho(\mathbf{r}, t) = \int_V d^3r \frac{\partial \rho(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \quad (2.1)$$

L'introduction de la dérivée  $\frac{d}{dt}$  dans l'intégrale est possible, car  $V$  est fixe.

Le changement de masse  $\frac{dM}{dt}$  est égal au flux de masse  $\rho\mathbf{u}$  à travers la surface :

$$\frac{dM}{dt} = - \int_S d^2r \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = - \int_S \mathbf{dS} \cdot (\rho \mathbf{u}) \quad (2.2)$$

La normale  $\mathbf{n}$  à la surface  $S$  est dirigée vers l'extérieur. Le signe moins se conçoit aisément : pour que  $dM/dt$  soit positif, il faut qu'il y ait un flux de masse qui rentre dans  $V$  : si  $\mathbf{n}$  est dirigé vers l'extérieur de  $V$ , le flux de masse  $\rho\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}$  est alors négatif, d'où le signe moins. Nous rappelons le théorème de la divergence :

$$\int_S \mathbf{dS} \cdot (\rho \mathbf{u}) = \int_V d^3r \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) \quad (2.3)$$

En combinant les équations (2.1) à (2.3), nous obtenons

$$\int_V d^3r \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) \right] = 0 \quad (2.4)$$

Cette équation est satisfaite quel que soit le volume  $V$  considéré. Il faut donc que l'intégrant soit nul :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \quad (2.5)$$

L'équation (2.5) est appelée **équation de continuité**. En coordonnées cartésiennes, elle s'écrit simplement

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}[\rho u_x] + \frac{\partial}{\partial y}[\rho u_y] + \frac{\partial}{\partial z}[\rho u_z] = 0$$

Si le problème est unidimensionnel (fluide uniforme dans les directions x et y, et vitesse fluide selon z), l'équation de continuité se simplifie :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}(\rho u_z) = 0$$

### Validité de l'équation de continuité

Nous sommes partis de la conservation de la masse totale dans le volume  $V$ . Cette hypothèse est valide s'il n'y a pas de réaction nucléaire qui annihile ou crée la masse. Par contre, si dans le volume  $V$  nous avons des réactions chimiques et que nous nous intéressons à une composante du milieu, la conservation de la masse d'une composante n'est pas vraie, et il faut considérer des termes de source.

### Non linéarité de l'équation de continuité

Reprendons l'équation de continuité

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0$$

Rappelons que les quantités  $\rho$  et  $\mathbf{u}$  sont les quantités physiques qui décrivent le fluide et que nous désirons calculer. Nous remarquons immédiatement qu'il y a un terme "produit de  $\rho$  par  $\mathbf{u}$ ". L'équation de continuité est donc non linéaire.

Nous cherchons tout d'abord à exprimer l'équation de continuité avec la dérivée convective, dont l'expression est

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)$$

L'opérateur  $(\mathbf{u} \cdot \nabla)$  en coordonnées cartésiennes est

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla) = \left( u_x \frac{\partial}{\partial x} + u_y \frac{\partial}{\partial y} + u_z \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

$(\mathbf{u} \cdot \nabla)$  agissant sur un champ scalaire  $\rho(\mathbf{r})$  donne

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla) \rho = u_x \frac{\partial \rho}{\partial x} + u_y \frac{\partial \rho}{\partial y} + u_z \frac{\partial \rho}{\partial z}$$

$(\mathbf{u} \cdot \nabla)$  agissant sur un champ vectoriel  $\mathbf{A}$  donne un autre champ vectoriel  $\mathbf{B}$  dont les composantes  $B_i$  sont données par

$$\mathbf{B} = (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{A}$$

$$B_i = (\mathbf{u} \cdot \nabla) A_i$$

$A_i$  étant les composantes de  $\mathbf{A}$ .

Nous avons vu l'expression de la dérivée convective de  $\rho$  lors de la description lagrangienne :

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \rho$$

Développons l'équation de continuité :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \rho + \rho (\nabla \cdot \mathbf{u})$$

D'où l'expression équivalente dans la description lagrangienne

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho (\nabla \cdot \mathbf{u}) = 0 \quad (2.6)$$

### Fluide incompressible

Considérons l'équation (2.6). Un fluide est incompressible si  $\rho$  ne change pas au cours du temps, plus précisément si la dérivée convective  $d\rho/dt$  est nulle.

$$\frac{d\rho}{dt} = 0$$

A partir de l'équation (2.6), nous déduisons immédiatement que l'équation pour un fluide incompressible est

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2.7)$$

L'équation (2.7) est connue sous le nom d'**équation d'état**<sup>1</sup> d'un fluide incompressible. Elle décrit en terme mathématique une propriété caractéristique de "l'état" du fluide (ici l'incompressibilité).

### Tube de courant et conservation du flux

Rappelons la définition d'une ligne de courant : c'est une ligne qui est tangente en tout point à la vitesse  $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ . Les lignes de courant ne se coupent pas (justifiez ce point vous-même). Un tube de courant est obtenu en prenant un faisceau de lignes de courant entouré par une ligne  $C$ . Plus loin dans le fluide, le tube de courant est défini par  $C'$  (voir figure 2.4).

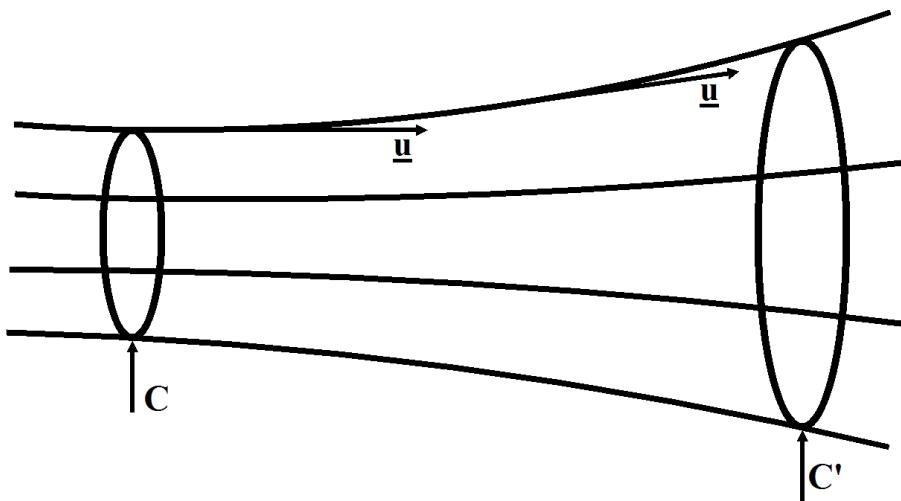


FIGURE 2.4 – Tube de courant

---

1. Nous introduirons plus tard la notion d'équation d'état d'une manière générale.

Considérons un écoulement stationnaire, c'est-à-dire qui ne dépend pas explicitement du temps ( $\partial/\partial t = 0$ ). Par l'équation de continuité, tout le flux qui entre à travers la surface  $S$  entourée par  $C$  doit sortir à travers la surface  $S'$  entourée par  $C'$  (essayez de démontrer ce point en utilisant le théorème de la divergence (2.3) sur le volume d'un tube de courant).

### 2.3.2 Equation de bilan pour la densité de quantité de mouvement

Nous définissons la densité de quantité de mouvement par  $\rho(\mathbf{r}, t)\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ , produit du champ scalaire de la densité  $\rho$  et du champ vectoriel de la vitesse fluide  $\mathbf{u}$ .  $\rho\mathbf{u}$  est un champ vectoriel décrivant la densité de quantité de mouvement. Pour simplifier les calculs, nous nous limiterons au cas d'une fluide parfait. Un fluide est dit **parfait** si les effets dus à la viscosité<sup>2</sup> sont négligeables.

Considérons un volume  $V$  qui suit le fluide (description lagrangienne). Attention : cette hypothèse est différente de celle faite pour la dérivation de l'équation de continuité où  $V$  est considéré comme fixe. La quantité de mouvement dans  $V$  est  $\mathbf{P}$  :

$$\mathbf{P} = \int_V d^3r \rho \mathbf{u}$$

L'application de l'équation de Newton donne

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \text{Forces sur le fluide enfermé dans le volume } V$$

Les forces qui s'exercent sur le fluide sont obtenues par intégration des densités de forces. Ce sont :

- la force de gravité (cas des fluides sur Terre)

$$\int_V d^3r \rho g$$

- d'autres forces extérieures  $\mathbf{F}_{ext}$ , avec une densité  $\mathbf{f}_{ext}$

$$\mathbf{F}_{ext} = \int_V d^3r \mathbf{f}_{ext}$$

- les forces de surface liée à la pression  $p$ , supposée isotrope

$$\mathbf{F}_{surface} = - \int_S d^2r \mathbf{n} p$$

où  $\mathbf{n}$  est le vecteur unitaire normal à la surface  $S$ , et dirigé vers l'extérieur.  $S$  est la surface entourant  $V$ .

---

2. La définition de la viscosité sera faite dans la section 2.4. Pour le moment, nous faisons appel à votre expérience quotidienne pour sa définition : le miel est plus visqueux que l'eau.

L'équation de Newton est alors :

$$\frac{d}{dt} \int_V d^3r \rho \mathbf{u} = \int_V d^3r \rho \mathbf{g} + \int_V d^3r \mathbf{f}_{ext} - \int_S d^2r \mathbf{n} \cdot \mathbf{p}$$

Calculons d'abord le membre de gauche. Pour simplifier les calculs, commençons par calculer la composante  $i$  de la quantité de mouvement

$$\frac{d}{dt} \int_V d^3r \rho u_i$$

La dérivée  $\frac{d}{dt}$  comprend deux termes :

- le premier dû à la variation temporelle de  $(\rho u_i)$ , soit

$$\int_V d^3r \frac{\partial}{\partial t} (\rho u_i) = \int_V d^3r \left( u_i \frac{\partial}{\partial t} \rho + \rho \frac{\partial}{\partial t} u_i \right)$$

- le second est lié au fait que  $V$  s'est déplacé entre  $t$  et  $t + dt$  et "englobe" des autres valeurs de  $\rho u_i$  (figure 2.5).

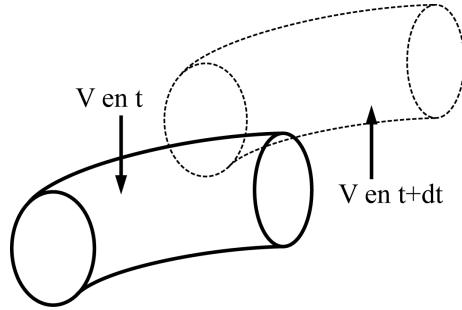


FIGURE 2.5 – Volume  $V$  en mouvement

La variation due au déplacement du volume  $V$  est donnée par

$$\int_S d^2r (\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}) \rho u_i$$

C'est en fait le flux de  $(\rho u_i)$  à travers  $S$ . Utilisons le théorème de la divergence (cf. Notations du cours) pour transformer l'intégrale de surface en intégrale de volume.

$$\int_S d^2r (\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}) \rho u_i = \int_V d^3r \nabla \cdot (\rho u_i \mathbf{u})$$

Développons la divergence :

$$\nabla \cdot (\rho u_i \mathbf{u}) = u_i \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) + \rho (\mathbf{u} \cdot \nabla) u_i$$

Récrivons maintenant

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \int_V d^3r \rho u_i &= \int_V d^3r u_i \frac{\partial}{\partial t} \rho + \rho \frac{\partial}{\partial t} u_i + u_i \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) + \rho (\mathbf{u} \cdot \nabla) u_i \\ &= \int_V d^3r \rho \left[ \frac{\partial}{\partial t} u_i + (\mathbf{u} \cdot \nabla) u_i \right] + \int_V d^3r u_i \left[ \frac{\partial}{\partial t} \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) \right]\end{aligned}$$

La deuxième intégrale est nulle, car l'intégrant n'est autre que l'équation de continuité multipliée par  $u_i$ .

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \Rightarrow u_i \left[ \frac{\partial}{\partial t} \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) \right] = 0$$

Donc

$$\frac{d}{dt} \int_V d^3r \rho u_i = \int_V d^3r \rho \left[ \frac{\partial}{\partial t} u_i + (\mathbf{u} \cdot \nabla) u_i \right]$$

valable pour chaque composante  $i$  de  $\mathbf{u}$ . On peut maintenant récrire cette égalité scalaire comme égalité vectorielle :

$$\frac{d}{dt} \int_V d^3r \rho \mathbf{u} = \int_V d^3r \rho \left[ \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right]$$

C'est le membre de gauche de l'équation de Newton.

Le membre de droite comprend trois sommes dont deux sont des intégrales de volume, et la troisième une intégrale de surface que nous transformons par le théorème du gradient (cf. Notations du cours) :

$$-\int_S d^2r p \mathbf{n} = -\int_S p \mathbf{dS} = -\int_V d^3r \nabla p$$

En combinant tous les résultats, nous obtenons

$$\int_V d^3r \left\{ \rho \left[ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right] \right\} = \int_V d^3r \mathbf{f}_{ext} - \int_V d^3r \nabla p$$

Notons que le terme  $\rho \mathbf{g}$  peut être compris dans  $\mathbf{f}_{ext}$ . Cette équation étant valable quel que soit  $V$ , nous avons donc

$$\rho \left[ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right] = \mathbf{f}_{ext} - \nabla p \quad (2.8)$$

L'équation (2.8) est appelée **équation d'Euler**. C'est une équation vectorielle. Elle correspond donc à 3 équations scalaires pour les 3 composantes. En utilisant les coordonnées cartésiennes, nous avons donc :

$$\rho \left[ \frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z} \right] = f_{ext,x} - \frac{\partial p}{\partial x}$$

$$\rho \left[ \frac{\partial u_y}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_y}{\partial z} \right] = f_{ext,y} - \frac{\partial p}{\partial y}$$

$$\rho \left[ \frac{\partial u_z}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_z}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_z}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} \right] = f_{ext,z} - \frac{\partial p}{\partial z}$$

### Quelques remarques sur l'équation d'Euler

#### Validité

Strictement parlant, l'équation d'Euler n'est valable que si la viscosité est nulle (cf. paragraphe 2.4 pour la définition de la viscosité). C'est le cas de deux liquides : l'hélium <sup>4</sup>He liquide à une température inférieure à 2.172 K, et l'hélium <sup>3</sup>He à une température inférieure à 10<sup>-3</sup> K. Un tel liquide peut couler à travers des pores sous une différence de pression nulle. On les appelle "superfluides".

En pratique, nous pouvons utiliser l'équation d'Euler lorsque les effets de viscosité sont négligeables. En fait, l'équation d'Euler est une forme particulière de l'équation de Navier-Stokes pour un fluide incompressible avec viscosité. Par rapport à l'équation d'Euler, le membre de droite de l'équation de Navier-Stokes comprend un terme supplémentaire qui tient compte de la viscosité. Sans démonstration, nous écrivons l'équation de Navier-Stokes :

$$\rho \left[ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right] = \mathbf{f}_{ext} - \nabla p + \eta \nabla^2 \mathbf{u} \quad (2.9)$$

où  $\eta$  est la viscosité dynamique et l'opérateur  $\nabla^2$  (appelé laplacien aussi noté  $\Delta$ ) est donné en coordonnées cartésiennes par

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Notons que l'équation de Navier-Stokes se ramène à l'équation d'Euler pour  $\eta = 0$ , c'est-à-dire pour un fluide non visqueux.

#### Non linéarité

Tout comme l'équation de continuité, l'équation d'Euler (ainsi que l'équation de Navier-Stokes) est non linéaire. Le membre de gauche fait intervenir les produits  $\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}$  et  $\rho (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}$ . C'est cette non linéarité qui rend extrêmement compliquée la résolution des équations décrivant le fluide.

C'est en fait la non linéarité des équations (2.5) et (2.8) (ou (2.9)) qui rend leur résolution difficile. Euler l'a déjà mentionné en écrivant : "S'il ne nous est pas permis de pénétrer à une connaissance complète sur le mouvement des fluides, ce n'est pas à la mécanique et à l'insuffisance des principes connus du mouvement qu'il faut attribuer la cause, mais à l'analyse même qui nous abandonne ici." (cité dans R. Dugas, *Histoire de la Mécanique*, éd. J. Gabay). Notez aussi que Euler a également dérivé l'équation de continuité !

### 2.3.3 Les 2 équations de continuité et d'Euler sont-elles suffisantes pour décrire le fluide ?

Nous voulons décrire un phénomène physique qui implique  $m$  quantités scalaires et  $n$  quantités vectorielles. Un modèle théorique doit alors dériver  $m$  équations scalaires et  $n$  équations vectorielles, soit au total  $(m+3n)$  équations. Appliquons cette règle au cas des équations fluides.

Rappelons tout d'abord quelles sont les quantités dont nous avons besoin pour décrire le fluide<sup>3</sup>. Ce sont le champ scalaire  $\rho(\mathbf{r}, t)$  et le champ vectoriel  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ . Nous avons dérivé deux équations :

- l'équation de continuité (2.5) qui est une équation scalaire

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0$$

- l'équation d'Euler (2.8) (dans son domaine de validité, sinon l'équation de Navier-Stokes si les effets de viscosité sont importants) qui est une équation vectorielle

$$\rho \left[ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right] = \mathbf{f}_{ext} - \nabla p$$

Notons d'abord que  $\mathbf{f}_{ext}$  est donnée. Par exemple dans un champ de gravité  $\mathbf{g}$ ,  $\mathbf{f}_{ext} = \rho \mathbf{g}$  et dépend explicitement de  $\rho$ .

Il reste la pression  $p$  qu'il nous faut exprimer : il nous manque une équation pour la décrire.

L'expression de la pression  $p$  en fonction des autres quantités du fluide fait appel à une autre physique que la physique des fluides. Par exemple, si nous considérons comme fluide un gaz parfait, l'équation d'état des gaz parfaits, avec  $k_B$  la constante de Boltzmann ( $k_B = 1.38 \cdot 10^{-23}$  J/K),

$$pV = Nk_B T$$

permet d'exprimer  $p$  en fonction de  $\rho$ . En effet,  $N$  désignant le nombre de molécules, et appelant  $m$  la masse d'une molécule, nous avons

$$pm = \frac{Nm}{V} k_B T = \rho k_B T$$

---

3. Nous considérons des fluides "simples" qui ne contiennent pas de charges électriques.

Cette équation d'état n'a pas été obtenue à partir de la physique des fluides, mais par la physique statistique des gaz parfaits (cf. Thermodynamique, Cours de Physique Générale II).

### 2.3.4 Equation de bilan d'énergie cinétique

Pour simplifier les calculs, nous ne considérerons que des fluides incompressibles et parfaits. Cette hypothèse nous permet d'utiliser la relation d'incompressibilité  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$  (équation 2.7), et de négliger toutes les forces de viscosité.

Considérons la densité d'énergie cinétique définie par

$$e_{cin} = \frac{\rho u^2}{2}$$

Nous considérons la description eulérienne et nous calculons  $\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\rho u^2}{2} \right)$  en utilisant :

- l'équation de continuité

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = \frac{\partial}{\partial t} \rho + u_j \frac{\partial \rho}{\partial x_j} + \rho \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0$$

- l'équation d'Euler

$$\rho \left[ \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right] = - \frac{\partial p}{\partial x_i} + f_i, \quad i = 1, 2, 3$$

Pour alléger la notation, nous substituons  $\mathbf{f}_{\text{ext}}$  par  $\mathbf{f}$ .

Dans l'expression des équations de continuité et d'Euler, nous avons utilisé la convention de la sommation sur les indices répétés. Ainsi :

$$u_j \frac{\partial \rho}{\partial x_j} = \sum_{j=1}^3 u_j \frac{\partial \rho}{\partial x_j}$$

Notons aussi que lorsque nous utilisons la convention sur les indices répétés, le nom de ces indices est sans importance :

$$u_j \frac{\partial \rho}{\partial x_j} = \sum_{j=1}^3 u_j \frac{\partial \rho}{\partial x_j} = \sum_{k=1}^3 u_k \frac{\partial \rho}{\partial x_k} = u_k \frac{\partial \rho}{\partial x_k}$$

Calculons

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\rho u^2}{2} \right) = \frac{u^2}{2} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho u_i \frac{\partial u_i}{\partial t}$$

Nous exprimons  $\frac{\partial \rho}{\partial t}$  par l'équation de continuité, et  $\rho \frac{\partial u_i}{\partial t}$  par l'équation d'Euler :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\rho u^2}{2} \right) = -\frac{u^2}{2} \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) - u_i \frac{\partial p}{\partial x_i} + f_i u_i - \rho u_i u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$$

Développons certains termes (cf. Notations du cours) :

$$\frac{u^2}{2} \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = \frac{u^2}{2} \left[ u_j \frac{\partial \rho}{\partial x_j} + \underbrace{\rho \nabla \cdot \mathbf{u}}_{=0} \right]$$

Le dernier terme est nul, car le fluide est incompressible ( $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ ).

$$\frac{u^2}{2} \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) + u_j \rho u_i \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^3 \frac{u_i^2}{2} u_j \frac{\partial \rho}{\partial x_j} + u_j \rho u_i \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = u_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\rho u^2}{2} \right)$$

Nous aboutissons donc à

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\rho u^2}{2} \right) = -u_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \frac{\rho u^2}{2} + p \right] + f_j u_j = -\mathbf{u} \cdot \nabla \left( \frac{\rho u^2}{2} + p \right) + \mathbf{u} \cdot \mathbf{f}$$

Rappelons la relation vectorielle (cf. Notations du cours)

$$\nabla \cdot (\mathbf{u}g) = g(\nabla \cdot \mathbf{u}) + \mathbf{u} \cdot (\nabla g)$$

où  $\mathbf{u}$  est un champ vectoriel et  $g$  un champ scalaire. Si  $\mathbf{u}$  est la vitesse fluide d'un fluide incompressible, alors  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$  et

$$\nabla \cdot (\mathbf{u}g) = \mathbf{u} \cdot (\nabla g)$$

Donc

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\rho u^2}{2} \right) = -\nabla \cdot \left[ \mathbf{u} \left( \frac{\rho u^2}{2} + p \right) \right] + \mathbf{u} \cdot \mathbf{f} \quad (2.10)$$

L'équation (2.10) donne le bilan de l'énergie cinétique pour un fluide parfait incompressible.

### Relation avec la mécanique

Nous avons dérivé l'équation (2.10) d'une manière mathématique. Pour avoir une interprétation physique, intégrons les deux membres par rapport à un volume  $V$  entouré par une surface  $S$ .  $V$  est fixe dans l'espace.

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V d^3r \frac{\rho u^2}{2} = - \int_V d^3r \nabla \cdot \left[ \mathbf{u} \left( \frac{\rho u^2}{2} \right) \right] - \int_V d^3r \nabla \cdot (\mathbf{u} p) + \int_V d^3r \mathbf{u} \cdot \mathbf{f}$$

Le membre de gauche donne la variation de l'énergie cinétique dans  $V$ . Les divers termes de droite expriment :

- 1<sup>er</sup> terme : en utilisant le théorème de la divergence :

$$- \int_V d^3r \nabla \cdot \left[ \mathbf{u} \left( \frac{\rho u^2}{2} \right) \right] = - \int_S d^2r (\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}) \frac{\rho u^2}{2}$$

C'est le flux d'énergie cinétique transportée à travers la surface  $S$ .

- 2<sup>e</sup> terme :

$$- \int_V d^3r \nabla \cdot (\mathbf{u} p) = - \int_S d^2r (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) p$$

C'est la puissance liée à la pression exercée sur la surface  $S$ . Cette pression est exercée normalement à la surface  $S$ .

- 3<sup>e</sup> terme : c'est la puissance des forces externes  $\mathbf{F}_{ext}$  dont la densité est  $\mathbf{f}$ .

Les 2<sup>e</sup> et 3<sup>e</sup> termes sont donc bien connus, grâce à la mécanique classique qui nous apprend que la variation temporelle de l'énergie cinétique est égale à la puissance créée (ou absorbée) par les forces. Le 1<sup>er</sup> terme tient compte simplement des flux convectifs de l'énergie cinétique en dehors du volume  $V$  à travers la surface  $S$ .

Nous pouvons aussi récrire l'équation (2.10). Développons :

$$\nabla \cdot \left( \mathbf{u} \frac{\rho u^2}{2} \right) = \frac{\rho u^2}{2} \nabla \cdot \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \left( \frac{\rho u^2}{2} \right)$$

Le premier terme du membre de droite est nul pour un fluide incompressible ( $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ ).

$$\nabla \cdot \left( \mathbf{u} \frac{\rho u^2}{2} \right) = (\mathbf{u} \cdot \nabla) \left( \frac{\rho u^2}{2} \right)$$

L'équation (2.10) devient alors

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\rho u^2}{2} \right) + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \left( \frac{\rho u^2}{2} \right) = - \nabla \cdot (\mathbf{u} p) + \mathbf{f} \cdot \mathbf{u}$$

Nous retrouvons dans le membre de gauche la dérivée convective de l'énergie cinétique.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\rho u^2}{2} \right) &= \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} - \nabla \cdot (\mathbf{u} p) = \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} - \mathbf{u} \cdot \nabla p - p \underbrace{\nabla \cdot \mathbf{u}}_{=0} \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\rho u^2}{2} \right) &= \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} - \mathbf{u} \cdot \nabla p = \mathbf{u} \cdot (\mathbf{f} - \nabla p) \end{aligned} \tag{2.11}$$

La dérivée convective de la densité d'énergie cinétique est égale à la densité du travail accompli par  $\mathbf{f}$  (terme  $\mathbf{f} \cdot \mathbf{u}$ ) et à celle du travail accompli par la densité de force  $-\nabla p$  liée à la pression .

Remarquons que pour obtenir l'équation de continuité, nous avons fait appel au principe de conservation de la masse, et pour l'équation d'Euler à celui de la variation de l'impulsion. Par contre, pour obtenir l'équation de bilan de l'énergie cinétique, nous n'avons dû faire appel à aucune loi de physique : la dérivation fut simplement un exercice de mathématiques ! En effet, le résultat (2.10) n'est rien de plus que la conservation de l'énergie mécanique, qui elle-même dérive de l'équation de Newton !

### 2.3.5 Relation de Bernoulli

La relation de Bernoulli est valable pour un fluide incompressible parfait en écoulement stationnaire. Cette dernière propriété signifie simplement que  $\frac{\partial}{\partial t}$  est nul.

Nous supposons de plus que la densité de force  $\mathbf{f}$  dérive d'une densité de potentiel  $\varphi$ .

$$\mathbf{f} = -\nabla\varphi$$

En mécanique, la force qui correspond à  $\mathbf{f}$  est dite conservative.

Reprendons l'équation (2.10). L'écoulement étant stationnaire, le membre de gauche ( $\frac{\partial}{\partial t} \frac{\rho u^2}{2}$ ) est nul :

$$\nabla \cdot \left[ \mathbf{u} \left( \frac{\rho u^2}{2} + p \right) \right] = -\mathbf{u} \cdot \nabla \varphi$$

Or, pour un fluide incompressible ( $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ ),

$$\nabla \cdot (\mathbf{u}\varphi) = \varphi(\nabla \cdot \mathbf{u}) + \mathbf{u} \cdot (\nabla\varphi) = \mathbf{u} \cdot \nabla\varphi$$

Donc

$$\nabla \cdot \left[ \mathbf{u} \left( \frac{\rho u^2}{2} + p + \varphi \right) \right] = 0$$

Nous pouvons récrire

$$\nabla \cdot \left[ \mathbf{u} \left( \frac{\rho u^2}{2} + p + \varphi \right) \right] = \mathbf{u} \cdot \nabla \left( \frac{\rho u^2}{2} + p + \varphi \right) = 0$$

car  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ .

Dans un écoulement stationnaire, cette expression est la dérivée convective de

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\rho u^2}{2} + p + \varphi \right] = \underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\rho u^2}{2} + p + \varphi \right]}_{=0 \text{ (écoulement stat.)}} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \left[ \frac{\rho u^2}{2} + p + \varphi \right] = 0$$

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\rho u^2}{2} + p + \varphi \right] = 0 \quad (2.12)$$

La dérivée convective est la dérivée lorsque l'on suit un petit élément de fluide qui bouge. C'est donc la dérivée le long d'une ligne de courant. L'équation (2.12) indique que la quantité  $\left[ \frac{\rho u^2}{2} + p + \varphi \right]$  est conservée le long d'une ligne qui suit un élément de fluide (ligne de courant). La conservation de

$$\frac{\rho u^2}{2} + p + \varphi = \text{cte le long d'une ligne de courant} \quad (2.13)$$

est connue sous le nom de **relation de Bernoulli** (Daniel Bernoulli).

Si la force  $\mathbf{f}$  est la force de gravitation, alors  $\varphi = \rho gy$  où  $y$  est la hauteur. La relation de Bernoulli devient

$$\frac{1}{2} \rho u^2 + p + \rho gy = \text{cte} \quad (2.14)$$

le long d'une ligne de courant.

### Exemples d'application

Soit la situation décrite par la figure 2.6 :

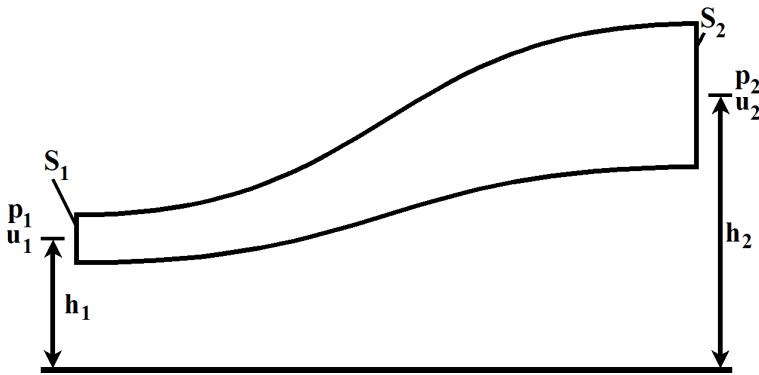


FIGURE 2.6 – Ecoulement d'un fluide

Calculons les quantités  $u_2$  et  $p_2$ . Les deux équations à utiliser sont

- la conservation du flux

$$S_1 u_1 = S_2 u_2 \Leftrightarrow u_2 = \frac{S_1}{S_2} u_1$$

- la relation de Bernoulli

$$p_1 + \frac{\rho u_1^2}{2} + \rho g h_1 = p_2 + \frac{\rho u_2^2}{2} + \rho g h_2$$

$$p_2 = p_1 + \frac{\rho}{2} [u_1^2 - u_2^2] + \rho g (h_1 - h_2) = p_1 + \frac{\rho u_1^2}{2} \left[ 1 - \frac{S_1^2}{S_2^2} \right] + \rho g (h_1 - h_2)$$

Soit un réservoir avec un trou  $S_2$  à une profondeur  $h$  par rapport à la surface libre (figure 2.7). Calculons la vitesse de sortie  $u_2$  de l'eau en  $S_2$ . Notons d'abord que la pression à la surface du réservoir est  $p_{atm}$ , de même que celle en  $S_2$ .

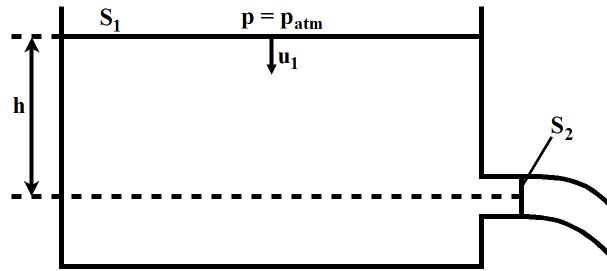


FIGURE 2.7 – Réservoir qui se vide

De nouveau, nous avons :

- la conservation du flux

$$S_1 u_1 = S_2 u_2 \Leftrightarrow u_1 = \frac{S_2}{S_1} u_2$$

- la relation de Bernoulli

$$p_{atm} + \frac{1}{2} \rho u_1^2 + \rho g h = p_{atm} + \frac{1}{2} \rho u_2^2$$

$$\frac{u_2^2}{2} \left[ 1 - \frac{S_2^2}{S_1^2} \right] = gh$$

$$u_2 = \sqrt{\frac{2gh}{1 - \frac{S_2^2}{S_1^2}}}$$

Nous voyons donc qu'une horloge à eau (mesure de la quantité d'eau recueillie en fonction du temps) n'est pas précise, car le niveau d'eau baisse, donc le débit  $u_2$  varie au fur et à mesure que le réservoir se vide.

### 2.3.6 Récapitulation

Nous avons dérivé

- l'équation de continuité qui exprime la conservation de la masse :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0$$

- l'équation d'Euler pour un fluide parfait :

$$\rho \left[ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right] = -\nabla p + \mathbf{f}$$

Un fluide est dit incompressible lorsque  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ .

Dans la réalité, nous avons souvent à traiter le cas d'écoulement d'un fluide dans des tuyaux solides. Il y a donc une interface liquide-solide. Quelle est la condition aux limites d'une telle interface ?

Nous supposerons que le liquide ne pénètre pas dans le solide. Soit  $\mathbf{n}$  le vecteur normal à l'interface liquide-solide. La condition de non-pénétration est alors :

$$\mathbf{u}_{\text{solide}} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{u}_{\text{liquide}} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ à l'interface}$$

ou en d'autres termes : la composante normale de  $\mathbf{u}_{\text{solide}}$  et la composante normale de  $\mathbf{u}_{\text{liquide}}$  sont nulles à l'interface.

Pour un fluide parfait (viscosité nulle), la composante parallèle à la surface peut être différente de 0. L'introduction de la viscosité change cette contrainte sur la composante parallèle.

## 2.4 Viscosité, écoulement d'un fluide visqueux

Jusqu'à maintenant, nous avons considéré des fluides parfaits. Dans la réalité, il existe des forces dues à la viscosité.

### 2.4.1 Evidence de la viscosité

L'expérience quotidienne nous montre plusieurs évidences de la viscosité :

- L'eau coule "plus facilement" que le miel.
- A l'entrée d'un long tuyau, il faut une certaine pression pour obtenir un débit. Si l'on mesure la pression à l'entrée et à la sortie du tuyau, on trouve un différence de pression appelée **perte de charge**.
- L'expérience de la figure 2.8 montre que la relation de Bernoulli n'est pas vérifiée.

Bien que le tuyau horizontal soit de section constante, les hauteurs de liquide dans les tubes 1, 2 et 3 (qui mesurent les pressions en ces endroits) sont différentes et vont en décroissant ; la pression chute.

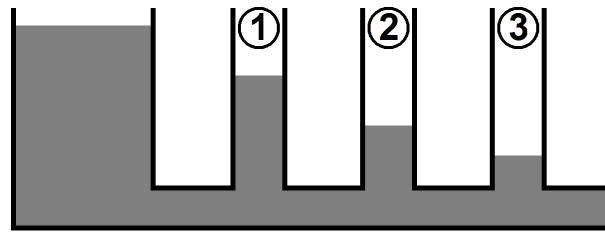


FIGURE 2.8 – Relation de Bernoulli non vérifiée

### 2.4.2 Définition de la viscosité

Nous considérons l'expérience suivante (appelée “écoulement de Couette”) :

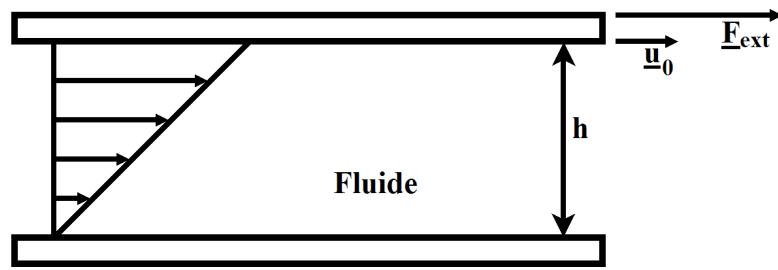


FIGURE 2.9 – Fluide entre deux plaques

Nous tirons la plaque supérieure avec une force  $\mathbf{F}_{ext}$ . Cette plaque, qui bouge avec une vitesse  $\mathbf{u}_s$  impose une vitesse  $\mathbf{u}_0$  à la couche de fluide qui touche la plaque. Expérimentalement, le fluide a alors un écoulement stationnaire caractérisé par un gradient de vitesse.

$$\frac{\Delta u}{\Delta z} = \frac{u_0}{h}$$

La vitesse fluide vaut  $u_0$  à  $z = h$  et 0 à  $z = 0$  (plaque inférieure).

Ce gradient de vitesse est lié à la force  $F_{ext}$  par

$$\frac{\Delta u}{\Delta z} = \frac{1}{\eta} \frac{F_{ext}}{S}$$

$F_{ext}/S$  est la force tangentielle par unité de surface.  $\eta$  est le **coefficent de viscosité**

**dynamique** (ou simplement viscosité)<sup>4</sup>.

$$[\eta] = \frac{[F_{ext}]}{[S]} \frac{[h]}{[u_0]} = \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \frac{\text{m} \cdot \text{s}}{\text{m}} = \frac{\text{N} \cdot \text{s}}{\text{m}^2} = \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \cdot \text{s}$$

Dans le système SI, l'unité de  $\eta$  est  $\text{Pa} \cdot \text{s}$  (Pascal · s) ou anciennement Poiseuille.

Pour un liquide,  $\eta$  est de l'ordre de  $10^{-3} \text{ Nsm}^{-2}$  à  $10^{-2} \text{ Nsm}^{-2}$ , alors que pour un gaz, il vaut  $10^{-5} \text{ Nsm}^{-2}$ . Pour un glacier,  $\eta$  atteint  $10^{13} \text{ Nsm}^{-2}$ .

Nous supposons que le coefficient de viscosité  $\eta$  est indépendant de la vitesse  $\mathbf{u}$ . Les fluides pour lesquels cette propriété est valable sont appelés **fluides newtoniens**.

### 2.4.3 Ecoulement d'un fluide visqueux dans un tuyau (écoulement de Poiseuille)

Considérons un tuyau cylindrique de rayon  $R$ , s'écoulant dans la direction  $z > 0$  :

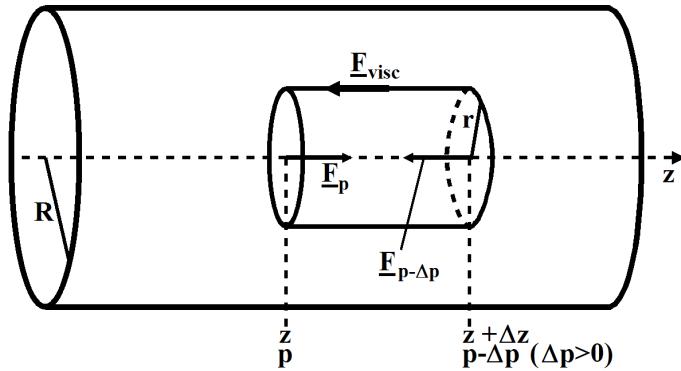


FIGURE 2.10 – Tuyau

Considérons un cylindre de fluide de rayon  $r$  entre  $z$  et  $z + \Delta z$ . Sur ce cylindre s'exercent les forces

- $[p - (p - \Delta p)]\pi r^2 = \Delta p \pi r^2$
- $F_{visc} = -2\pi r \Delta z \eta \frac{du}{dr}$

L'écoulement étant stationnaire, ces deux forces s'équilibrivent.

$$\Delta p \pi r^2 = -2\pi r \Delta z \eta \frac{du}{dr}$$

$$\frac{du}{dr} = -\frac{1}{2} \frac{\Delta p}{\Delta z} \frac{1}{\eta} r$$

4. La quantité  $\eta/\rho$  est appelée viscosité cinématique.

En intégrant avec la condition  $u(R) = 0$ , nous trouvons le profil parabolique des vitesses :

$$u(r) = \frac{1}{4\eta} \frac{\Delta p}{\Delta z} (R^2 - r^2)$$

Le débit volumétrique  $D$  du tuyau est alors

$$\begin{aligned} D &= \int_0^R u(r) 2\pi r dr = \frac{2\pi}{4\eta} \frac{\Delta p}{\Delta z} \int_0^R r(R^2 - r^2) dr \\ &= \frac{\pi}{2\eta} \frac{\Delta p}{\Delta z} \left[ \frac{r^2 R^2}{2} - \frac{1}{4} r^4 \right]_0^R \\ D &= \frac{\pi}{8\eta} \frac{\Delta p}{\Delta z} R^4 \quad ([D] = m^3/s) \end{aligned}$$

Cette formule est appelée **loi de Poiseuille**. La "perte de charge"  $\Delta p$  par unité de longueur  $\Delta z$  est alors

$$\frac{\Delta p}{\Delta z} = \frac{8\eta}{\pi} \frac{1}{R^4} D$$

### Remarque

Nous notons que, dans le cas des deux écoulements de Couette et de Poiseuille, la vitesse fluide pour l'élément de fluide qui est en contact avec la paroi a la même vitesse que la paroi. Dans l'écoulement de Couette, le fluide en contact avec la surface supérieure a la vitesse  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0$  = vitesse de la plaque. La vitesse fluide est nulle à  $r = R$ , paroi du tuyau.

#### 2.4.4 Tenseur de contrainte dans un fluide visqueux

Considérons un élément de surface  $d\mathbf{S}$  dans un fluide. La contrainte est la force par unité de surface causée par la fraction de fluide d'un côté de la surface sur celle de l'autre côté. A l'équilibre, la contrainte est due à la pression et est perpendiculaire à  $d\mathbf{S}$ .

Lorsque le fluide est visqueux et en mouvement, il existe des contraintes tangentielles à  $d\mathbf{S}$ .

Prenons par exemple  $d\mathbf{S}$  normal à  $\mathbf{n} // \text{Oy}$ . La contrainte  $\sigma_{yy}$  est la contrainte appliquée parallèlement à  $\text{Oy}$  sur la surface  $d\mathbf{S}$  normale à  $\text{Oy}$ .

La contrainte  $\sigma_{xy}$  ( $\sigma_{zy}$ ) est la contrainte appliquée parallèlement à  $\text{Ox}$  ( $\text{Oz}$ ) sur la surface  $d\mathbf{S}$  normale à  $\text{Oy}$ .

Plus généralement,  $\sigma_{ij}$  est la contrainte appliquée parallèlement à l'axe  $\text{O}i$  sur la surface  $d\mathbf{S}$  normale à  $\text{O}j$ .

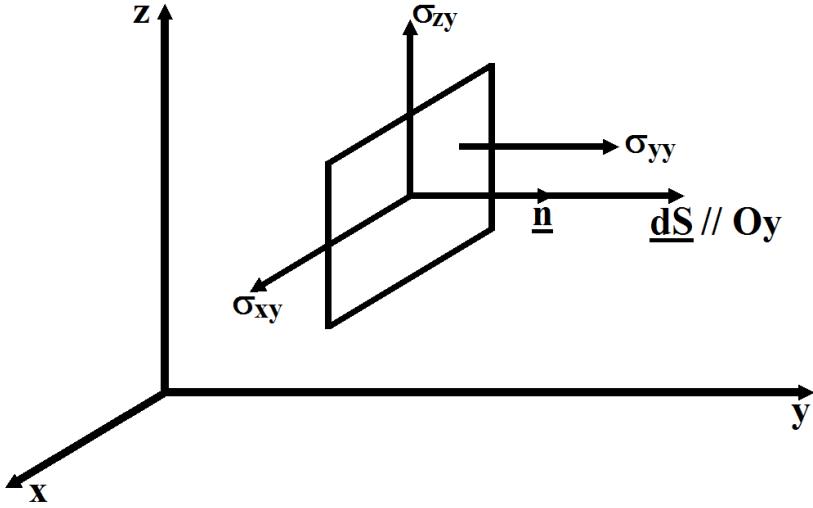


FIGURE 2.11 – Contraintes sur une surface

Les  $\sigma_{ij}$  forment donc un tableau 3x3 appelé **tenseur<sup>5</sup> des contraintes** du fluide considéré.

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}$$

Les termes  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$  et  $\sigma_{zz}$  représentent le terme de pression. Pour un fluide isotrope, ils valent  $-p$ . De plus, on peut montrer<sup>6</sup> que le tenseur  $\sigma_{ij}$  est symétrique.

$$\sigma_{ij} = \sigma'_{ij} - p\delta_{ij}$$

où  $\delta_{ij}$  est le symbole de Kronecker et  $\sigma'_{ij} = \sigma'_{ji}$ .

Pour un fluide visqueux incompressible, nous avons

$$\sigma'_{ij} = \eta \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \sigma'_{ji}$$

C'est la relation entre la contrainte  $\sigma'_{ij}$  et la déformation  $\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$  induite dans le fluide.

5. Pour une introduction aux tenseurs, voir L. Brillouin “Les tenseurs en mécanique et en élasticité”

6. Le couple exercé par  $\sigma'_{ij}$  et  $\sigma'_{ji}$  doit être nul pour éviter une accélération angulaire infinie sur un élément infinitésimal de fluide.

Nous terminons par la donnée sans démonstration de l'équation de Navier-Stokes pour un fluide visqueux incompressible :

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = \mathbf{f} - \nabla p + \eta \Delta \mathbf{u}$$

où le Laplacien  $\Delta$  a comme expression en coordonnées cartésiennes

$$\nabla^2 = \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Nous remarquons que si  $\eta = 0$  (pas de viscosité), nous retrouvons l'équation d'Euler.

## 2.5 Appendice - Invariance galiléenne

L'équation d'Euler s'écrit

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p$$

Que se passe-t-il lors d'une transformation galiléenne ?

$$\begin{aligned} t' &= t \\ \mathbf{r}' &= \mathbf{r} + \mathbf{v}t \end{aligned}$$

Prenons pour simplifier  $\mathbf{v} = (v, 0, 0)$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x'} &= \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial x'} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial x'} \\ \frac{\partial}{\partial x'} &= \frac{\partial}{\partial x} \end{aligned}$$

d'où

$$\nabla' = \nabla$$

D'autre part

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t'} &= \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial t'} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t'} \cdot \nabla \\ &= \frac{\partial}{\partial t} (-\mathbf{v} \cdot \nabla) \end{aligned}$$

car  $\mathbf{r} = \mathbf{r}' - \mathbf{v}t$  et  $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t'}$  est pris à  $\mathbf{r}'$  fixe.

Donc

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial r'} &= \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{v} + \mathbf{u}) - (\mathbf{v} \cdot \nabla) (\mathbf{u} + \mathbf{v}) \\ \frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t'} &= \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{u} - (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{u} \end{aligned}$$

De plus

$$\begin{aligned} (\mathbf{u}' \cdot \nabla) \mathbf{u}' &= ((\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot \nabla)(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \\ &= (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{u} \end{aligned}$$

Donc

$$\frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t'} + (\mathbf{u} \cdot \nabla') \mathbf{u}' = \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}$$

et

$$\frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t} + (\mathbf{u}' \cdot \nabla') \mathbf{u}' = -\nabla' p$$

L'opérateur différentiel

$$\frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)$$

est invariant sous une transformation de Galilée.

# Chapitre 3

## Phénomènes ondulatoires

### Introduction

Ce chapitre est consacré aux ondes. Nous commençons par définir les ondes en général (3.1), les ondes planes (3.2) puis enfin les phénomènes d'interférences (3.3).

### 3.1 Définition

Nous rencontrons la notion de phénomène ondulatoire ou d'onde dans notre expérience de chaque jour. Citons par exemple :

- onde à la surface d'un lac : ce sont par exemple les vagues, le sillage derrière un navire ;
- onde sonore : ce sont les sons de notre voix, des instruments de musique ;
- ondes électromagnétiques : elles feront l'objet d'un chapitre ultérieur de ce cours.

Comment pouvons-nous caractériser ces ondes ? Elles correspondent toutes à la **perturbation** d'un certain nombre de quantités physiques, et cette perturbation **varie et se propage<sup>1</sup>** dans l'espace et dans le temps.

Pour décrire un phénomène ondulatoire, nous devons donc définir les quantités qui sont perturbées et trouver la description mathématique de leur variation spatio-temporelle. Pour cette dernière partie, nous verrons quelles sont les méthodes mathématiques qui existent.

#### 3.1.1 Onde longitudinale et onde transverse

Expérimentalement, nous constatons que l'onde a une "direction" de propagation. Par exemple, si nous avons une corde tendue et que nous la secouons, la perturbation se propage depuis l'endroit où nous la secouons vers l'autre extrémité (figure 3.1).

---

1. Les ondes dites stationnaires sont la superposition d'ondes propageantes.

Dans cet exemple, la perturbation de la corde est perpendiculaire à la direction de propagation : nous avons donc ici ce qu'on appelle une **onde transverse**.

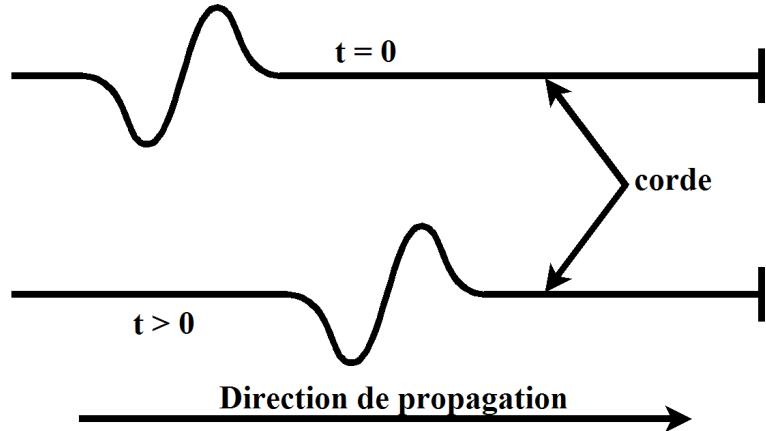


FIGURE 3.1 – Perturbation d'une corde

Prenons un autre exemple, celui d'un long ressort. Nous le comprimons sur une certaine longueur (figure 3.2).

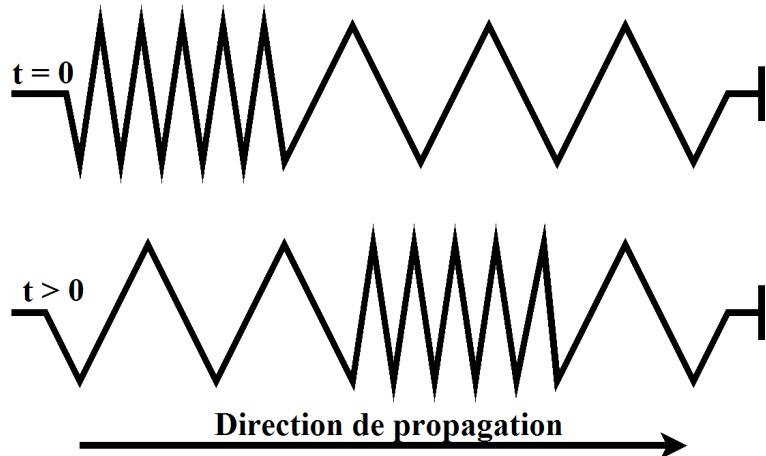


FIGURE 3.2 – Compression d'un ressort

Dans ce cas, la compression du ressort (qui est la perturbation) est parallèle à la direction de propagation. C'est ce qu'on appelle une **onde longitudinale**.

### 3.1.2 Onde propageante, onde stationnaire

Dans les deux cas précédents, la perturbation se propage spatialement au fur et à mesure que le temps s'écoule. Ce sont des **ondes propageantes** (figure 3.3).

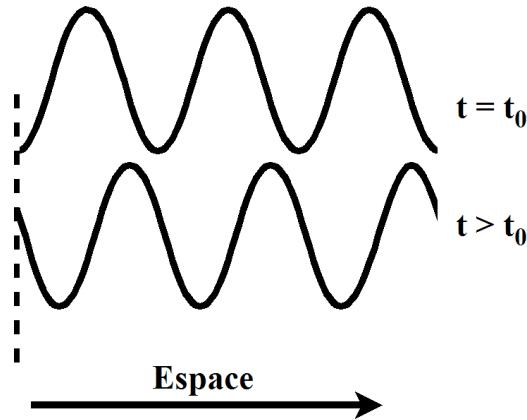


FIGURE 3.3 – Ondes propageantes

**Remarque :** Notez qu'un maximum au temps  $t = t_0$  se trouvant à la position  $x = x_0$  dans l'espace se retrouve à un instant  $t = t_0 + \Delta t$  à la position  $x_0 + \Delta x$ . Il en est de même pour tout autre point de l'onde. La courbe au temps  $t > t_0$  peut être déduite de celle en  $t = t_0$  par une translation  $\Delta x = \Delta t \cdot u$  où  $u$  a la dimension d'une vitesse. On voit que l'amplitude de l'onde est alors une fonction  $f(x - ut)$ .

Considérons maintenant une corde fixe à ses deux extrémités. Nous pouvons créer une perturbation du type dessiné sur la figure 3.4, avec des nœuds et des ventres. Ce sont des **ondes stationnaires**.

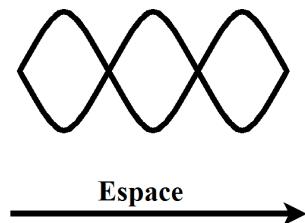


FIGURE 3.4 – Onde stationnaire (photographie à un instant donné). Les noeuds et les ventres ne changent pas de position au cours du temps.

## 3.2 Ondes planes

### 3.2.1 Définition

Du point de vue mathématique, pour décrire la variation spatio-temporelle liée à une onde, il nous faut utiliser une fonction  $f(\mathbf{r}, t)$ . Toutes les quantités physiques liées à l'onde peuvent donc être mises sous la forme

$$Af(\mathbf{r}, t)$$

où  $A$  est l'amplitude correspondant à la quantité physique considérée.  $A$  peut être un scalaire où un vecteur, selon la quantité physique que nous considérons.

Une fonction  $f(\mathbf{r}, t)$  souvent utilisée est

$$f(\mathbf{r}, t) = \cos(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \quad (3.1)$$

$\omega$  est la pulsation, ou fréquence. L'importance de ce genre de fonctions est liée à la notion de la décomposition en série de Fourier (cf. votre cours de Mathématiques). L'unité de  $\omega$  est [rad·s<sup>-1</sup>]. Nous utilisons souvent  $\nu = \frac{\omega}{2\pi}$  avec  $[\nu] = \text{Hertz} \equiv \text{Hz} \equiv 1/s$ .  $\mathbf{k}$  est le vecteur d'onde. Il est dirigé selon la direction de propagation de l'onde. La période  $T$  vaut  $\frac{2\pi}{\omega}$  et la longueur d'onde  $\lambda$  est égale à  $\frac{2\pi}{k}$ . Une quantité physique associée à l'onde est donc

$$A(\mathbf{r}, t) = \tilde{A} \cos(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \varphi) \quad (3.2)$$

où  $\tilde{A}$  est l'amplitude et  $\varphi$  un déphasage.

Une onde stationnaire peut être considérée comme la superposition de deux ondes propageantes sinusoïdales. En effet, considérons deux ondes se propageant selon  $z$ , mais dans deux directions opposées.

$$A_1 = \tilde{A} \cos(\omega t - kz)$$

$$A_2 = \tilde{A} \cos(\omega t + kz)$$

La superposition de ces deux ondes a la forme

$$A = A_1 + A_2 = \tilde{A} [\cos(\omega t - kz) + \cos(\omega t + kz)]$$

$$A(z, t) = 2\tilde{A} \cos kz \cos \omega t$$

Pour tout temps  $t$ ,  $kz = n\pi$  ( $n = 0$  ou un entier positif ou négatif) est un maximum de  $|A|$  (ou ventre) et  $kz = (n + \frac{1}{2})\pi$  est un nœud car  $A = 0$ .  $kz = n\pi$ ;  $kz = (n + 1/2)\pi$

### 3.2.2 Notation complexe

Au lieu d'utiliser les fonctions sinus ou cosinus, il est avantageux d'utiliser les fonctions complexes :

$$f(\mathbf{r}, t) = \exp\{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})\}$$

L'expression (3.2) pour  $A(\mathbf{r}, t)$  devient

$$A(\mathbf{r}, t) = \tilde{A} \exp\{i\varphi\} \exp\{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})\} \quad (3.3)$$

En utilisant la convention que nous prenons la partie réelle de la fonction complexe pour décrire la quantité physique :

$$A(\mathbf{r}, t) \Big|_{physique} = \operatorname{Re} \left[ \tilde{A} \exp\{i\varphi\} \exp\{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})\} \right]$$

Selon la remarque faite sous 3.1.2, la fonction  $f(t, \mathbf{r})$  se réduit donc à une fonction du type  $f(\mathbf{u}t \pm \mathbf{r})$ .

Pour simplifier la notation, au lieu de prendre un nombre réel pour  $\tilde{A}$ , nous utiliserons le nombre complexe  $\tilde{A} \exp\{i\varphi\}$ .

$$A(\mathbf{r}, t) = \operatorname{Re} \left[ \tilde{A} \exp\{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})\} \right]$$

Pourquoi est-il important de considérer le déphasage  $\varphi$  (ou d'une manière équivalente une amplitude  $\tilde{A}$  complexe) ? Nous avons mentionné que, dans une onde, plusieurs quantités physiques peuvent être concernées. Entre ces diverses quantités, il peut exister un déphasage. Par exemple, entre la vitesse et l'accélération, il y a un déphasage de  $\frac{\pi}{2}$ .

### Surface équiphase

A un temps  $t = t_0$  donné, la surface équiphase d'une onde définie par  $\exp\{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})\}$  correspond à

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = \omega t_0$$

est un plan. Pour le voir, choisissons un système de coordonnées où  $\mathbf{k}$  est parallèle à  $\mathbf{e}_z$ . L'équation de la surface équiphase est

$$kz = \omega t_0$$

C'est donc un plan. Pour cette raison, une onde dont la dépendance spatio-temporelle est  $\exp\{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})\}$  est appelée **onde plane**.

### Relation de dispersion

La question qui se pose est la suivante : dans un milieu donné, pour une onde donnée (c'est-à-dire correspondant à un phénomène physique donné), à une fréquence  $\omega$  donnée, toutes les valeurs de  $\mathbf{k}$  sont-elles permises ? Ou bien, existe-t-il une relation entre  $\omega$  et  $\mathbf{k}$  ?

Lorsque nous étudierons spécifiquement la physique des ondes, nous montrerons que l'existence d'une onde donnée (correspondant à un phénomène physique donné) nécessite une relation entre  $\omega$  et  $\mathbf{k}$  :

$$\omega = \omega(\mathbf{k}) \quad (3.4)$$

Une telle relation (3.4) est appelée **relation de dispersion**. Pour un vecteur d'onde  $\mathbf{k}$  donné, il correspond une fréquence donnée lorsque nous considérons un phénomène physique donné.

### Exemple

Vous avez vu (et nous le reverrons) que pour les ondes électromagnétiques qui se propagent dans le vide,

$$\omega = kc \quad (3.5)$$

où  $c$  est la vitesse de la lumière dans le vide. Vous exprimez souvent cette relation sous la forme

$$\lambda\nu = c$$

où  $\lambda = \frac{2\pi}{k}$  est la longueur d'onde et  $\nu = \frac{\omega}{2\pi}$  la fréquence.

### Vitesse de phase

Revenons à la définition d'un plan équiphase ( $\mathbf{k}$  est orienté selon  $\mathbf{e}_z$ ).

$$\omega t - kz = \text{cte}$$

$$\omega(\mathbf{k})t - kz = \text{cte}$$

Un tel plan équiphase se déplace à une vitesse

$$v_\varphi = \frac{\omega(k)}{k}$$

$v_\varphi$  est appelée **vitesse de phase**.

La vitesse de phase est la vitesse de propagation des surfaces équiphases. C'est une quantité purement mathématique. Elle peut être plus grande que la vitesse de la lumière sans que cela ne viole un des principes de la relativité, celui qui dit que la vitesse d'aucun phénomène ne dépasse la vitesse de la lumière.

### Vitesse de groupe

Une onde plane dont la dépendance spatio-temporelle est  $\cos(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$  existe depuis  $t \rightarrow -\infty$  et remplit tout l'espace infini. En fait, elle n'apporte aucune "information" supplémentaire. Il suffit de substituer l'espace "vide" par un espace dans lequel cette onde existe. Vous pouvez vous en convaincre en imaginant que vous vivez dans un monde où il y a toujours eu une vibration sonore de même amplitude et de même fréquence : au lieu d'être habitués au silence, vous seriez habitués à avoir ce son comme bruit de fond, et si ceci provoque une gêne, l'évolution se chargera de favoriser ceux qui sont ne sont pas gênés soit développent une ouïe qui filtre ce bruit. Et ce bruit de fond (cette onde) ne vous apporterait aucune information.

Pour que le son vous apporte une information, il faut qu'il soit modulé. Pour cela, considérons la superposition de deux ondes planes de fréquences  $\omega_1$  et  $\omega_2$ .

$$\omega_1 = \omega + \Delta\omega$$

$$\omega_2 = \omega - \Delta\omega$$

Nous supposons aussi que la relation de dispersion<sup>2</sup>  $k = k(\omega)$  est connue. A  $\omega_1$  et  $\omega_2$  correspondent donc  $k_1 = k(\omega_1)$  et  $k_2 = k(\omega_2)$ .

$$k_1 = k(\omega + \Delta\omega) = k(\omega) + \Delta k$$

$$k_2 = k(\omega - \Delta\omega) = k(\omega) - \Delta k$$

La superposition<sup>3</sup> des deux ondes donne :

$$S = \cos(\omega_1 t - k_1 z) + \cos(\omega_2 t - k_2 z)$$

$$S = 2 \cos(\omega t - kz) \cos(\Delta\omega t - \Delta kz)$$

$S$  est donc une onde **porteuse** à la fréquence  $\omega$  modulée par la fréquence  $\Delta\omega$ . L'amplitude de  $S$  est modulée par  $\cos(\Delta\omega t - \Delta kz)$  et donne lieu à des paquets d'onde (ou groupe<sup>4</sup> d'onde). La vitesse du paquet d'onde est la vitesse de groupe  $v_g$ .

$$v_g = \frac{\Delta\omega}{\Delta k}$$

---

2. Nous supposons que nous pouvons tirer  $k = k(\omega)$  à partir de la relation de dispersion  $\omega = \omega(k)$ .

3. Nous avons supposé que les amplitudes des deux ondes étaient égales à 1 et que l'amplitude de l'onde résultante est la somme algébrique des deux ondes (superposition linéaire).

4. On n'emploie pas le terme de groupe d'onde. Mais la vitesse des paquets est appelée vitesse de groupe.

Pour des petites fréquences de modulation  $\Delta\omega \rightarrow d\omega$ , la vitesse de groupe  $v_g$  est

$$v_g = \frac{d\omega}{dk}$$

c'est-à-dire la dérivée de  $\omega = \omega(k)$  par rapport à  $k$ . A trois dimensions  $\mathbf{v}_g = \frac{d\omega}{d\mathbf{k}}$ .

### 3.2.3 Résumé

Une onde est une perturbation de quantités physiques qui varient et se propagent dans le temps et dans l'espace. Pour la définir :

- nous devons définir les quantités physiques qui varient dans l'onde,
- nous devons, si nous considérons que la variation spatio-temporelle de l'onde est du type  $\cos(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$ , avec  $\omega$  la pulsation (ou fréquence) et  $\mathbf{k}$  le vecteur d'onde, obtenir la relation de dispersion  $\omega = \omega(\mathbf{k})$ .

Une onde dont la dépendance spatio-temporelle est  $\cos(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$  est appelée onde plane. Les surfaces équiphases sont des plans.

La vitesse de phase est définie par

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k}$$

La vitesse de phase est la vitesse de propagation des plans équiphases. C'est une quantité mathématique, dont la valeur peut être supérieure à la vitesse de la lumière.

La vitesse de groupe est la vitesse de propagation des paquets d'onde.

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} \text{ ou } \mathbf{v}_g = \frac{d\omega}{d\mathbf{k}}$$

La vitesse de groupe est inférieure ou égale à  $c$ .

Des définitions de  $v_\varphi$  et  $v_g$ , nous notons qu'elles sont égales si la relation de dispersion est linéaire :

$$\omega = kv$$

Par contre, si la relation de dispersion n'est pas linéaire, la vitesse de phase est différente de la vitesse de groupe. Un milieu pour lequel la relation de dispersion n'est pas linéaire est dit **dispersif**, car des ondes à différentes fréquences ont des propagations différentes.

### Exemple : onde transverse d'une corde tendue

Considérons une corde tendue, et imposons-lui une perturbation.

Soit  $\mu$  la masse par unité de longueur de la corde, et  $T$  la tension de la corde.

$$[\mu] = \text{kg} \cdot \text{m}^{-1}$$

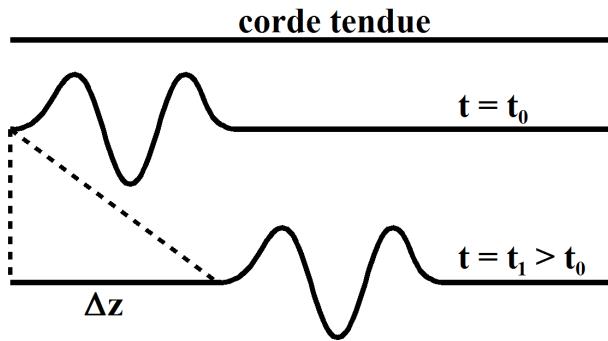


FIGURE 3.5 – Perturbation sur une corde tendue

$$[T] = \text{N} = \text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$$

Nous observons expérimentalement que, pour  $\Delta t = (t_1 - t_0)$ , la perturbation s'est déplacée de  $\Delta z$  (figure 3.5). En toute rigueur, la vitesse  $\frac{\Delta z}{\Delta t}$  est la vitesse de groupe, car c'est la vitesse d'une perturbation formée d'un paquet d'onde.

$$v_g = \frac{\Delta z}{\Delta t}$$

Avec une analyse dimensionnelle, nous pouvons "construire" une vitesse à partir de  $\mu$  et  $T$  :

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

car

$$[v] = \sqrt{\frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}^2} \cdot \frac{\text{m}}{\text{kg}}} = \sqrt{\frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}} = \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Expérimentalement, il peut être vérifié que

$$v_g = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

Nous déduisons que la relation de dispersion est

$$\omega = k \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

Si nous excitons la corde avec une onde sinusoïdale, l'amplitude de la perturbation est donnée par

$$y = y_m \sin(\omega t - kz)$$

avec  $y_m$  l'amplitude maximale.

Calculons l'énergie cinétique associée à la perturbation. Chaque élément de corde de masse  $dm$  à la position  $z$  a une vitesse  $v = \frac{dy}{dt} = y_m\omega \cos(\omega t - kz)$  et son énergie cinétique est

$$dE_{cin} = y_m^2 \omega^2 \cos^2(\omega t - kz) dm/2$$

$$dE_{cin} = \mu y_m^2 \omega^2 \cos^2(\omega t - kz) dz/2$$

en utilisant  $dm = \mu dz$ .

En prenant la variation  $\frac{dE_{cin}}{dt}$ , nous obtenons :

$$\frac{dE_{cin}}{dt} = \frac{dz}{dt} \mu y_m^2 \omega^2 \cos^2(\omega t - kz) \times \frac{1}{2}$$

$$\frac{dE_{cin}}{dt} = v_g \mu y_m^2 \omega^2 \cos^2(\omega t - kz) \times \frac{1}{2}$$

La variation de l'énergie cinétique est transportée à la vitesse  $v_g$ .

### 3.3 Phénomène d'interférence

Les phénomènes d'interférence entre deux ondes progressives ont une grande importance dans la physique. Soit le dispositif expérimental suivant (figure 3.6) : on considère deux sources  $S_1$  et  $S_2$  générant chacune une onde plane à la fréquence  $\omega$  et avec un vecteur d'onde  $\mathbf{k}$ . Les deux sources sont séparées par une distance  $d$ . L'écran est à l'infini.

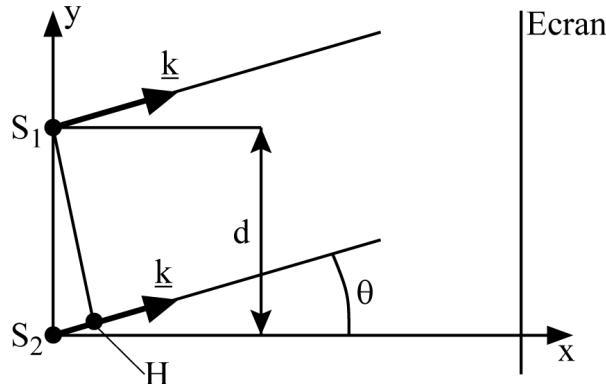


FIGURE 3.6 – Dispositif expérimental

Soit  $\theta$  l'angle entre le vecteur d'onde  $\mathbf{k}$  et l'axe Ox. Nous appelons  $A_1$  et  $A_2$  les ondes émises par  $S_1$  et  $S_2$ .

$$A_1 = \tilde{A} \cos(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_1)$$

$$A_2 = \tilde{A} \cos(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_2)$$

En un point  $P(\mathbf{r})$  donné dans la direction de  $\mathbf{k}$ , nous supposerons que l'amplitude de l'onde résultante est la superposition des ondes  $A_1$  et  $A_2$ . Notez que ceci n'est valable que si le phénomène est linéaire. L'amplitude de  $A$  est donc :

$$A = A_1 + A_2 = \tilde{A} [\cos(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_1) + \cos(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_2)]$$

En nous référant à la figure 3.6, nous constatons que le trajet venant de  $S_2$  présente un parcours supplémentaire  $S_2H$ .

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_2 = \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_1 + kS_2H$$

Or  $S_2H = S_1S_2 \sin \theta = d \sin \theta$ .

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_2 = \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_1 + kd \sin \theta$$

Donc

$$\begin{aligned} A &= \tilde{A} [\cos(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_1) + \cos(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_1 - kd \sin \theta)] \\ &= 2\tilde{A} \cos\left(\frac{1}{2}kd \sin \theta\right) \cos\left(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_1 - \frac{1}{2}kd \sin \theta\right) \end{aligned} \quad (3.6)$$

Le terme  $\cos(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_1 - \frac{1}{2}kd \sin \theta)$  décrit une onde. L'amplitude de cette onde est

$$2\tilde{A} \cos\left(\frac{1}{2}kd \sin \theta\right) = 2\tilde{A} \cos\left[\frac{\pi d}{\lambda} \sin \theta\right]$$

$\lambda$  est la longueur d'onde ( $k = 2\pi/\lambda$ ). Pour une valeur donnée de  $d/\lambda$ , la fonction  $\cos(\frac{\pi d \sin \theta}{\lambda})$  présente des maxima (cosinus =  $\pm 1$ ) et des minima (cosinus = 0) en fonction de  $\sin \theta$ .

- Maxima

$$\frac{\pi d}{\lambda} \sin \theta = n\pi$$

- Minima

$$\frac{\pi d}{\lambda} \sin \theta = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi$$

Naturellement, nous devons limiter la valeur de  $n$  telle que  $|\sin \theta| \leq 1$ .

Lorsque l'on se déplace sur l'écran selon la direction  $y$ , la direction de  $\mathbf{k}$  varie, c'est-à-dire que l'angle  $\theta$  change. On passe successivement par un maximum, puis un minimum, et ainsi de suite. Si on réalise cette expérience avec de la lumière, on obtient un succession de raies brillantes et de raies sombres. C'est ce qu'on appelle des figures d'interférence.

### Remarque

Pour obtenir des figures d'interférence, les ingrédients nécessaires sont :

- deux sources émettant un phénomène ondulatoire à la même fréquence  $\omega$ ,
- la phase entre les deux ondes émises est constante dans le temps. Ceci veut dire qu'on peut avoir

$$A_1 = \tilde{A} \cos(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_1)$$

$$A_2 = \tilde{A} \cos(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_2 + \varphi)$$

avec  $\varphi = \text{constante}$

- un milieu qui permet aux deux ondes de se propager linéairement : en tout point, l'onde résultante est l'addition des deux ondes émises par les deux sources.

Nous reprendrons cette discussion au chapitre 9.5.7.

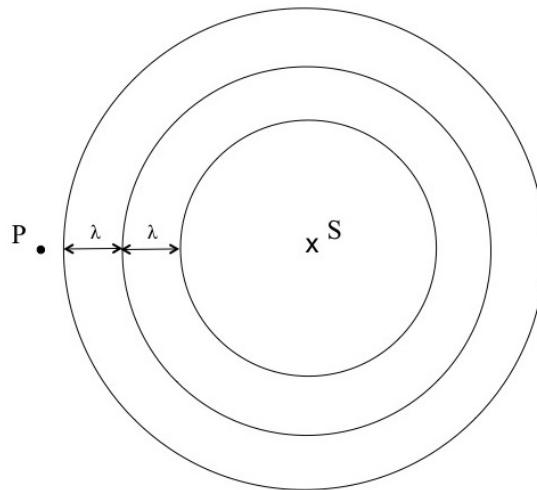
### 3.4 Effet Doppler

Considérons une onde sonore (voir chapitre 4) dont la relation de dispersion est  $\frac{\omega}{k} = c_S$ .

En employant la fréquence  $f$  (Hz) et la longueur d'onde  $\lambda$  (m), cette relation est

$$f\lambda = c_S$$

Essayons de décrire le phénomène en considérant la source de l'onde (soit S) et un observateur P. En prenant une source ponctuelle, les fronts d'onde (p.ex. les surfaces d'amplitude maximale à un moment donné) sont des cercles dans le cas bi-dimensionnel.



L'observateur P voit p.ex. les maxima défiler à la vitesse  $c_S$ . La fréquence correspondante est

$$f = \frac{c_S}{\lambda}$$

Supposons que l'observateur P se déplace vers S avec une vitesse  $u_P$ . Il voit alors les maxima des fronts d'onde défiler vers lui à la vitesse  $v' = c_S + u_P$ . La fréquence qu'il observe est

$$f' = \frac{v'}{\lambda} = \frac{c_S + u_P}{\lambda} = \frac{c_S}{\lambda} + \frac{u_P}{\lambda} = f + \frac{u_P}{\lambda}$$

Lorsque l'observateur P s'approche de la source S avec une vitesse  $u_P (u_P > 0)$ , il observe une fréquence  $f' > f$

$$\begin{aligned} f' &= \frac{c_S + u_P}{\lambda} = \left( \frac{c_S + u_P}{c_S} \right) \cdot \left( \frac{c_S}{\lambda} \right) \\ f' &= \frac{c_S + u_P}{c_S} f \end{aligned} \quad (3.7)$$

avec  $u_P > 0$  lorsque P s'approche de S

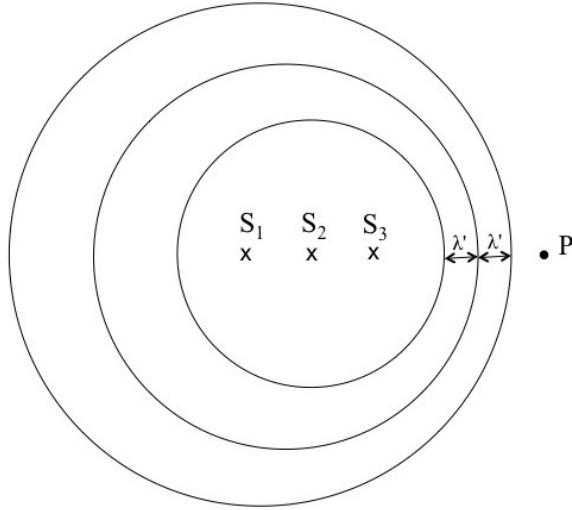
Pour un observateur P qui s'éloigne de S avec une vitesse  $|u_P|$ , par un raisonnement analogue on obtient

$$f' = \frac{c_S - |u_P|}{c_S} f \quad (3.8)$$

On peut écrire 3.7 et 3.8 sous la forme

$$\left\{ \begin{array}{l} f' = \frac{c_S + u_P}{c_S} f \\ \text{avec } u_P > 0 \text{ si l'observateur s'approche de } S \\ \text{avec } u_P < 0 \text{ si l'observateur s'éloigne de } S \end{array} \right. \quad (3.9)$$

Que se passe-t-il si on a le cas de la source S qui s'approche ou s'éloigne de P immobile ? Traitons d'abord le cas de S qui s'approche de P avec une vitesse  $u_S (u_S > 0)$ .



La source est en  $S_1$  au temps  $t_1$ . Une période  $T$  de l'onde après ( $t_2 = t_1 + T$ ), la source est en  $S_2$ . De même pour  $t_3 = t_2 + T$ , la source est en  $S_3$ . Les fronts d'onde successifs émis par  $S$  en  $t_1, t_2, t_3$  sont séparés par  $\lambda'$  le long de l'axe  $S_1S_2S_3$ .

$$\lambda' = \lambda - u_S T = \lambda - \frac{u_S}{f} \quad \text{car } T = 1/f$$

L'observateur P mesure p.ex. des maxima qui arrivent vers lui à la vitesse  $c_S$  mais ces maxima sont séparés de  $\lambda'$ . La fréquence  $f'$  qu'il mesure est alors

$$\begin{aligned} f' &= \frac{c_S}{\lambda'} = \frac{c_S}{\lambda - u_S/f} \\ f' &= \frac{c_S}{c_S - u_S} f \end{aligned} \quad (3.10)$$

avec  $u_S > 0$

$f'$  est donc supérieur à  $f$ .

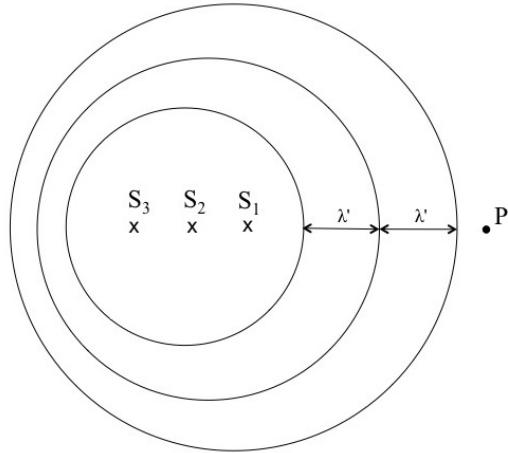
Le cas où la source S s'éloigne de P est indiqué sur la figure suivante.

On voit que

$$\lambda' = \lambda + u_S/f \quad \text{avec } u_S > 0$$

et (3.10) devient

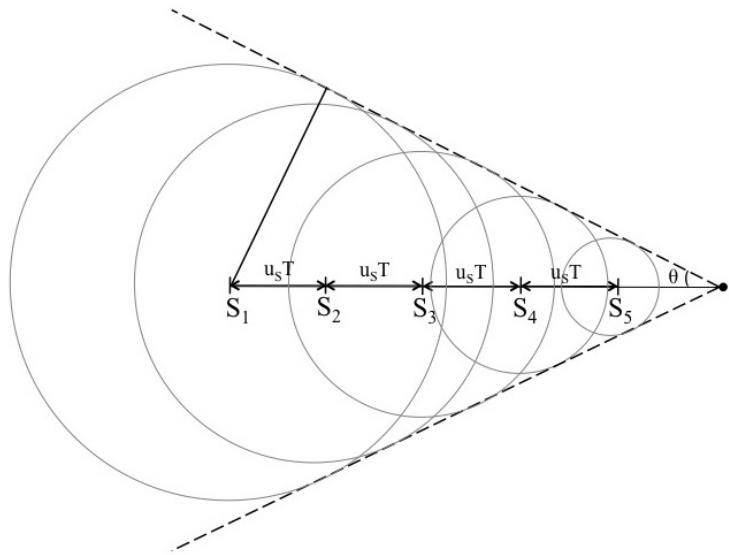
$$\begin{aligned} f' &= \frac{c_S}{c_S + u_S} f \\ \text{avec } u_S &> 0 \end{aligned} \quad (3.11)$$



Les deux relations (3.10) et (3.11) peuvent être écrites comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} f' = \frac{c_S}{c_S - u_S} f \\ \text{avec } u_S > 0 \text{ lorsque la source } S \text{ s'approche de l'observateur } P \\ \text{avec } u_S < 0 \text{ lorsque la source } S \text{ s'éloigne de l'observateur } P \end{array} \right. \quad (3.12)$$

Que se passe-t-il lorsque  $u_S$  dépasse  $c_S$ ? Clairement,  $f'$  ne peut devenir négatif. Refaisons le dessin des fronts d'onde émis par  $S$  en divers temps  $t_1, t_1 + T, t_1 + 2T, t_1 + 3T, t_1 + 4T$ .



Tous les cercles admettent une tangente commune qui forme un angle  $\theta$  avec l'axe  $S_1S_n$ .

L'angle  $\theta$  est appelé angle de Mach et vaut

$$\sin \theta = \frac{c_S}{u_S} \quad (3.13)$$

Le rapport  $u_S/c_S$  est le nombre de Mach. A trois dimensions, lorsque  $u_S > c_S$ , les fronts d'onde forment un cône de demi-angle  $\theta$ , qu'on appelle onde de choc produit par une source se propageant à un nombre de Mach  $M > 1$ . C'est le fameux boum sonore des avions supersoniques.



FIGURE 3.7 – L'onde de choc derrière un FA18 Hornet supersonique. (Source : <http://wallpapers.windowsace.com/pics/-/1/-18-hornet-jet-planes-sonic-boom-supersonic-desktop-2100x1500-wallpaper-d-a-ibackgroundz.co>)

Finalement, lorsque et la source S et l'observateur P sont en mouvement, la combinaison de (3.9) et (3.12) donne

$$f' = \frac{c_S + u_P}{c_S - u_S} f \quad (3.14)$$

avec la convention de signe pour  $u_P$  et  $u_S$

- positif si la source ou l'observateur se meut vers l'autre
- négatif si la source ou l'observateur s'éloigne de l'autre

La formule (3.14) donne le déplacement Doppler de la fréquence dû au mouvement de la source et de l'observateur.

Nous avons démontré la formule (3.14) en prenant l'exemple des ondes sonores. Mais le raisonnement que nous avons fait ne fait pas intervenir la physique de l'onde sonore, mais seulement la notion générale de front d'onde. Nous en concluons que les formules (3.9), (3.12) et (3.14) sont générales pour toutes les ondes.

En particulier, la lumière est une onde (cf. chapitre 9). Si on observe la lumière émise des galaxies lointaines, il y a ce que l'on appelle le décalage vers le rouge des spectres, c'est à dire une fréquence  $f'$  observée sur la terre plus faible. Selon l'équation (3.12),  $u_S < 0$  et donc les galaxies s'éloignent de nous.

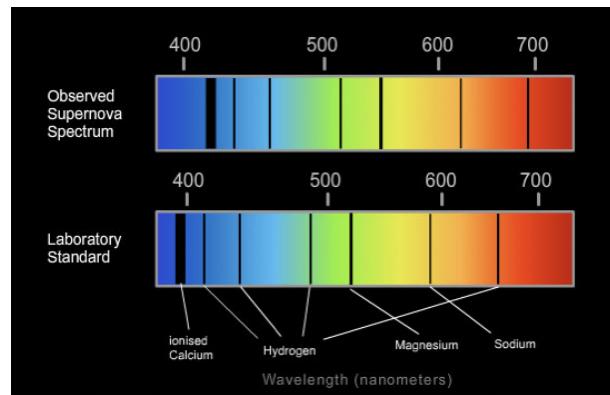


FIGURE 3.8 – Décalage vers le rouge du spectre d'une supernova. (Source : <http://www.passmyexams.co.uk/GCSE/physics/the-expanding-universe-red-shift.html>)



## Chapitre 4

# Résolution des équations fluides : modes normaux

### Introduction

Dans le chapitre 3, nous avons développé les notions de base sur les ondes. Le chapitre 4 est consacré à l'étude des ondes dans des milieux spécifiques, les milieux fluides, dont nous avons développé les équations dans le chapitre 2. A cause de la complexité des équations fluides, leur résolution dans un cadre général est impossible à notre niveau. Nous commencerons par étudier les ondes planes dans un milieu fluide infini, puis nous développerons la théorie des ondes dans un milieu de taille finie.

### 4.1 Dérivation de la relation de dispersion

Rappelons les équations de base d'un fluide parfait infini :

- Equation de continuité

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0$$

- Equation d'Euler

$$\rho \left[ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right] = -\nabla p + \mathbf{f}$$

Supposons que  $\mathbf{f} = 0$ . A ce système d'équations nous devons rajouter une équation d'état que nous spécifierons plus tard. Cette équation donne une autre équation reliant  $p$ ,  $\mathbf{u}$  et  $\rho$ .

Les quantités physiques que nous devons déterminer sont  $\rho$ ,  $\mathbf{u}$  et  $p$ . Nous avons remarqué que les équations fluides sont non linéaires, ce qui rend leur résolution difficile.

## 64 CHAPITRE 4. RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS FLUIDES : MODES NORMAUX

Une méthode utile pour obtenir des résultats physiques est la linéarisation. Nous supposons tout d'abord que nous partons d'un état d'équilibre avec  $\rho_0$ ,  $\mathbf{u}_0$  et  $p_0$ . Cet équilibre peut être uniforme ( $\rho_0$ ,  $\mathbf{u}_0$  et  $p_0$  sont constants sur tout l'espace) ou non uniforme ( $\rho_0 = \rho_0(\mathbf{r})$ ,  $\mathbf{u}_0 = \mathbf{u}_0(\mathbf{r})$ ,  $p_0 = p_0(\mathbf{r})$ ). L'équilibre ne dépend pas du temps.

Nous perturbons alors l'équilibre :

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \rho_0 + \rho_1$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_1$$

$$p(\mathbf{r}, t) = p_0 + p_1$$

en supposant que  $\rho_1 \ll \rho_0$ ,  $\mathbf{u}_1 \ll \mathbf{u}_0$  et  $p_1 \ll p_0$ . Cette hypothèse nous permet de négliger les termes du type  $\rho_1 \mathbf{u}_1$ ,  $\mathbf{u}_1 \mathbf{u}_1$ ,  $p_1 \rho_1$ , car ils sont du deuxième ordre.

Développons le calcul pour le cas simple : un fluide uniforme au repos à l'équilibre.

- Fluide uniforme :

$$\rho_0 = \text{constant sur tout l'espace}$$

$$\mathbf{u}_0 = \text{constant sur tout l'espace}$$

$$p_0 = \text{constant sur tout l'espace}$$

- Fluide au repos à l'équilibre :  $\mathbf{u}_0 = 0$ .

A l'équilibre, les équations fluides sont automatiquement satisfaites. Pour les quantités perturbées (nous ne gardons que les termes du premier ordre), nous avons donc :

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \rho_0(\nabla \cdot \mathbf{u}_1) = 0$$

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial t} = -\nabla p_1$$

Nous constatons deux faits :

- nous avons linéarisé les équations fluides ;
- il nous manque une équation pour exprimer la pression. Cette équation ne provient pas de la théorie des fluides mais fait appel à d'autres phénomènes de physique. Prenons l'équation des gaz parfaits

$$p_0 m = \rho_0 k_B T \text{ et } p_1 m = \rho_1 k_B T$$

Nous nous retrouvons avec un système d'équations aux dérivées partielles pour  $\rho_1$ ,  $\mathbf{u}_1$  et  $p_1$ .

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \rho_0(\nabla \cdot \mathbf{u}_1) = 0 \\ \rho_0 \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial t} = -\nabla p_1 \\ p_1 = \frac{k_B T}{m} \rho_1 \end{cases}$$

Pour résoudre ce système, nous faisons une décomposition en onde plane. Nous prenons des ondes planes  $\exp\{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})\}$  car nous savons qu'une perturbation quelconque peut être décomposée en série de Fourier.

$$\rho_1(\mathbf{r}, t) = \tilde{\rho}_1 \exp\{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})\}$$

$$\mathbf{u}_1(\mathbf{r}, t) = \tilde{\mathbf{u}}_1 \exp\{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})\}$$

$$p_1(\mathbf{r}, t) = \tilde{p}_1 \exp\{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})\}$$

où  $\omega$  est la pulsation et  $\mathbf{k}$  le vecteur d'onde. Notons que les amplitudes  $\tilde{\rho}_1$ ,  $\tilde{\mathbf{u}}_1$  et  $\tilde{p}_1$  peuvent être complexes dans la notation utilisée.

L'insertion de cet *ansatz* donne immédiatement

$$\begin{cases} i\omega \tilde{\rho}_1 - i\mathbf{k} \cdot \tilde{\mathbf{u}}_1 \rho_0 = 0 \\ i\omega \rho_0 \tilde{\mathbf{u}}_1 = i\mathbf{k} \tilde{p}_1 \\ \tilde{p}_1 = \frac{k_B T}{m} \tilde{\rho}_1 \end{cases}$$

Prenons le cas simple unidimensionnel avec  $\tilde{\mathbf{u}}_1 \parallel \mathbf{k}$  (ondes longitudinales) et la direction de  $\mathbf{k}$  selon  $\mathbf{e}_z$ .

$$\begin{cases} i\omega \tilde{\rho}_1 - i\rho_0 k \tilde{u}_1 &= 0 \\ i\omega \rho_0 \tilde{u}_1 - ik \tilde{p}_1 &= 0 \\ \frac{k_B T}{m} \tilde{\rho}_1 - \tilde{p}_1 &= 0 \end{cases} \quad (4.1)$$

C'est un système de trois équations à trois inconnues  $(\tilde{\rho}_1, \tilde{u}_1, \tilde{p}_1)$  homogène sans second membre. Pour éviter la solution triviale  $\tilde{\rho}_1 = \tilde{u}_1 = \tilde{p}_1 = 0$ , le déterminant des coefficients doit être nul.

$$\begin{vmatrix}
 i\omega & -ik\rho_0 & 0 \\
 0 & i\omega\rho_0 & -ik \\
 \frac{k_B T}{m} & 0 & -1
 \end{vmatrix} = 0$$

$$-i^2\omega^2\rho_0 + i^2k^2\rho_0 \frac{k_B T}{m} = 0$$

$$\begin{aligned}
 \omega^2 &= k^2 \frac{k_B T}{m} \\
 \omega &= k \sqrt{\frac{k_B T}{m}} = k c_s \\
 c_s &= \sqrt{\frac{k_B T}{m}}
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

La relation (4.2) est appelée **relation de dispersion des ondes acoustiques dans le fluide**.  $c_s$  est la vitesse du son dans le fluide.

#### 4.1.1 Interprétation physique

Récapitulons notre démarche.

- 1) Point de départ : nous avons considéré les équations fluides ainsi qu'une équation d'état.
- 2) Linéarisation : nous avons constaté que les équations fluides sont non linéaires, c'est-à-dire qu'il existe des termes du type  $\rho\mathbf{u}$  ou  $(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}$  qui rendent la résolution des équations très difficile.  
Nous avons donc linéarisé les équations en supposant tout d'abord qu'il y a un équilibre (quantités notées avec l'indice 0), et qu'ensuite les perturbations de cet équilibre (quantités notées avec l'indice 1) sont faibles. Les produits des quantités perturbées sont négligeables (nous gardons seulement les termes du premier ordre).
- 3) Nous considérons des perturbations dont la dépendance spatio-temporelle est

$$\exp\{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})\}$$

- 4) Cet *ansatz* nous permet de trouver une relation entre la pulsation  $\omega$  et le vecteur d'onde  $\mathbf{k}$ .

Dans ce cas, nous pouvons exprimer les quantités perturbées en fonction de l'une d'entre elles. Par exemple, dans le cas de l'onde sonore, nous pouvons exprimer la pression  $\tilde{p}_1$  et la vitesse fluide  $\tilde{u}_1$  en fonction de la densité  $\tilde{\rho}_1$  :

$$\frac{\tilde{p}_1}{p_0} = \frac{\tilde{\rho}_1}{\rho_0}$$

$$\tilde{u}_1 = \frac{\omega}{k} \left( \frac{\tilde{\rho}_1}{\rho_0} \right)$$

Notons que  $\tilde{u}_1$  est proportionnel à  $(\tilde{\rho}_1/\rho_0)$  tout comme  $(\tilde{p}_1/p_0)$ . Vous vous êtes posés la question : comme  $\mathbf{u}_0 = 0$  comment juger de la petitesse de  $\tilde{u}_1$ ? La formule qui donne  $\tilde{u}_1$  vous montre que  $\tilde{u}_1$  a le même facteur de petitesse  $\left(\frac{\tilde{\rho}_1}{\rho_0}\right)$  que la fluctuation de densité. Donc  $\tilde{u}_1 \ll \frac{\omega}{k} = c_s$ .

Nous notons que les facteurs qui apparaissent dans les expressions de  $\tilde{p}_1$  et  $\tilde{u}_1$  sont des nombres réels. Il n'y a donc pas de déphasage entre les perturbations de densité, de vitesse fluide et de pression.

Du point de vue physique, l'onde sonore est une perturbation de densité et de pression qui se propage à la vitesse du son. C'était notre hypothèse  $\mathbf{k} \parallel \mathbf{u}_1$  : l'onde sonore est une onde longitudinale.

#### 4.1.2 Que se passe-t-il si le fluide s'écoule ?

Supposons maintenant qu'à l'équilibre  $\mathbf{u}_0$  ne soit pas nul, mais constant :

$$\mathbf{u}_0 = u_0 \mathbf{e}_z$$

De nouveau, il est simple de vérifier que  $\rho_0 = \text{cte}$ ,  $p_0 = \text{cte}$  et  $\mathbf{u}_0 = \text{cte}$  satisfont les équations de continuité et d'Euler.

La linéarisation des équations fluides donne :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \rho_0 (\nabla \cdot \mathbf{u}_1) + (\mathbf{u}_0 \cdot \nabla) \rho_1 &= 0 \\ \rho_0 \left[ \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial t} + (\mathbf{u}_0 \cdot \nabla) \mathbf{u}_1 \right] &= -\nabla p_1 \\ p_1 &= \frac{k_B T}{m} \rho_1 \end{aligned}$$

En utilisant la même technique que précédemment, nous trouvons

$$\begin{aligned} i\omega \tilde{\rho}_1 - iku_0 \tilde{\rho}_1 - ik\rho_0 \tilde{u}_1 &= 0 \\ i\omega \rho_0 \tilde{u}_1 - iku_0 \rho_0 \tilde{u}_1 &= ik\tilde{p}_1 \\ \tilde{p}_1 &= \frac{k_B T}{m} \tilde{\rho}_1 \end{aligned}$$

et donc

$$\left\{ \begin{array}{lll} i(\omega - ku_0)\tilde{\rho}_1 & -ik\rho_0\tilde{u}_1 & = 0 \\ i\rho_0(\omega - ku_0)\tilde{u}_1 & -ik\tilde{p}_1 & = 0 \\ \frac{k_B T}{m}\tilde{\rho}_1 & -\tilde{p}_1 & = 0 \end{array} \right. \quad (4.3)$$

Le système d'équations (4.3) est de nouveau un système d'équations linéaires homogènes sans second membre. Pour éviter la solution triviale  $\tilde{\rho}_1 = \tilde{u}_1 = \tilde{p}_1 = 0$ , il faut que le déterminant des coefficients soit nul.

$$\begin{vmatrix} (\omega - ku_0) & -k\rho_0 & 0 \\ 0 & \rho_0(\omega - ku_0) & -k \\ \frac{k_B T}{m} & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$(\omega - ku_0)^2 = k^2 \frac{k_B T}{m}$$

$$\omega = \pm k \sqrt{\frac{k_B T}{m} + ku_0}$$

Le terme supplémentaire  $ku_0$  est le terme Doppler.

#### 4.1.3 Importance de l'équation d'état

Dans l'exemple précédent, nous avons choisi comme équation d'état

$$p_1 m = \rho_1 k_B T$$

Que se passe-t-il si nous choisissons l'équation d'état des fluides incompressibles  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$  ?

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \nabla \cdot \mathbf{u}_1 = 0$$

Mathématiquement

$$\nabla \cdot \mathbf{u}_1 = 0 \Leftrightarrow k\tilde{u}_1 = 0$$

soit

$$\tilde{u}_1 = 0$$

Nous avons donc

$$\tilde{\rho}_1 = \frac{k}{\omega} \tilde{u}_1 \rho_0 = 0$$

$$\tilde{p}_1 = \frac{k_B T}{m} \tilde{\rho}_1 = 0$$

Toutes les quantités physiques perturbées sont nulles. Il n'y a pas d'onde acoustique dans un fluide incompressible !

Ce résultat peut vous laisser perplexe. En effet, vous savez que l'eau est une fluide incompressible et que les vagues sur le lac existent. Il n'y a cependant pas de contradiction car les ondes acoustiques sont des ondes longitudinales et les vagues sont des ondes transverses (Voir 3.1.1). Vous cherchez alors sur le web et vous voyez qu'il existe des ondes sonores dans l'eau et vous vous dites que quelque chose ne tourne pas rond ! En fait on suppose une certaine compressibilité de l'eau.

#### 4.1.4 Effet Doppler pour les ondes acoustiques

Selon la relation de dispersion (4.2) les ondes acoustiques ont une vitesse de phase et de groupe

$$\frac{\omega}{k} = \frac{d\omega}{dk} = \sqrt{\frac{k_B T}{m}}$$

Considérons maintenant la situation expérimentale suivante. Considérons une voiture de pompier avec une sirène. Vous êtes un observateur immobile au bord de la route. La sirène de la voiture a une fréquence  $f = \omega/2\pi$ . Nous constatons que la fréquence du son perçu par l'observateur est différente lorsque la voiture de pompier s'approche de vous : la fréquence perçue est supérieure à  $f$ . Par contre, lorsque la voiture s'éloigne de l'observateur, la fréquence  $f''$  perçue est inférieure à  $f$ . C'est l'effet Doppler.

Dans le raisonnement que nous avons fait, la physique liée à l'onde n'entre pas en jeu. Nous verrons que la lumière est une onde. Donc l'effet Doppler doit aussi se passer lorsque la source s'éloigne de l'observateur. Plus précisément, si la source lumineuse s'éloigne de nous, la lumière qu'elle émet est décalée vers les basses fréquences. Du point de vue spectrale, les basses fréquences par rapport au spectre visible sont vers le rouge. Les spectres émis par la source qui s'éloigne de nous sont décalés par le rouge.

## 4.2 Onde dans un fluide de taille finie

### 4.2.1 Relation de dispersion

Jusqu'à maintenant, nous avons vu des ondes longitudinales ( $\mathbf{u} \parallel \mathbf{k}$ ) dans un fluide. Les vagues que nous voyons sur l'eau sont des ondes transverses. Nous allons dériver une relation de dispersion pour ces ondes dans une situation simplifiée.

Le modèle est :

- Fluide incompressible :  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$
- Densité  $\rho = \text{constante}$
- Faible perturbation de vitesse  $\mathbf{u}_1$ , ce qui permet de négliger le terme  $\rho(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}$  dans l'équation d'Euler.

Cette dernière devient simplement

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\nabla p - \rho \mathbf{g}$$

La géométrie est donnée sur la figure 4.1 :

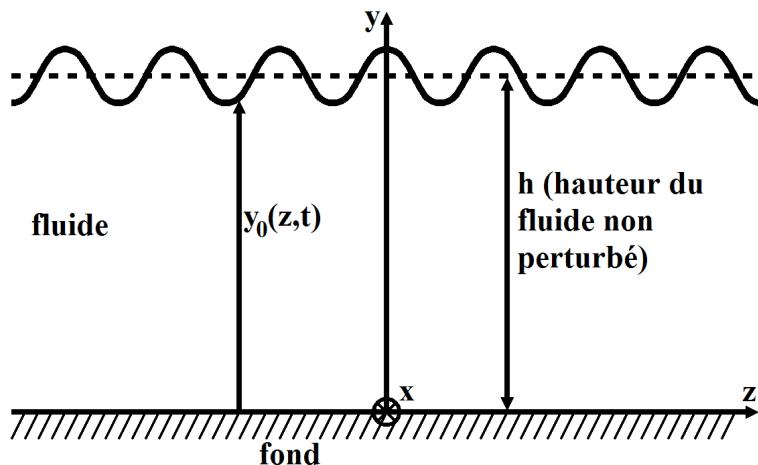


FIGURE 4.1 – Onde transverse dans un fluide

Pour simplifier la notation, nous omettons l'indice 1 pour les quantités perturbées. Nous supposons qu'il n'y a aucune dépendance selon  $x$  pour toutes les quantités.

La dépendance en  $z$  et en  $t$  est de la forme  $\exp\{i(\omega t - kz)\}$  et celle en  $y$  est à déterminer. Le but de l'exercice est de trouver la dépendance selon  $y$  et la relation de dispersion. Nous allons séparer le calcul en plusieurs étapes.

Des équations fluides, seules l'équation d'Euler et la condition d'incompressibilité sont nécessaires, car nous avons supposé  $\rho = \text{cte}$ . De plus, nous avons deux conditions aux limites : une à l'interface entre le fluide et l'atmosphère, et l'autre au fond de l'eau.

### A) Utilisation de l'équation d'Euler

Nous supposerons que  $\mathbf{u}$  peut s'écrire sous la forme

$$\mathbf{u} = \nabla \Phi$$

C'est une classe spéciale d'écoulement appelée **écoulement potentiel**. Le problème est de trouver  $\Phi = \Phi(y, z, t)$  en se souvenant que la dépendance temporelle et selon  $z$  est  $\exp\{i(\omega t - kz)\}$ .

L'équation d'Euler se ramène à, avec  $\rho = \text{cte}$  :

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} &= -\nabla p - \rho \mathbf{g} \\ \rho \frac{\partial}{\partial t} \nabla \Phi &= \nabla \left( \frac{\partial \Phi}{\partial t} \rho \right) = -\nabla p - \nabla(\rho gy) \\ \nabla \left[ \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{p}{\rho} + gy \right] &= 0 \end{aligned}$$

Donc

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{p}{\rho} + gy = \text{constante}$$

C'est une équation pour la variation temporelle de  $\Phi$ .

### B) Définition des conditions aux limites

Nous supposerons que les longueurs d'onde sont grandes, pour ne pas avoir à considérer la formule de Laplace due à la capillarité pour calculer la pression à la surface  $y_0(z, t)$ .

$$p = p_0 \text{ en } y = y_0(z, t)$$

La vitesse  $u_y(y = 0, t) = 0$  car la vitesse fluide à la surface ne peut pas avoir de composante selon  $y$ .

$$u_y = \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0 \text{ en } y = 0$$

En  $y = y_0$ ,  $u_y$  est égale à la vitesse de la surface  $y_0$  :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} \Big|_{y=y_0} = \frac{\partial y_0}{\partial t}$$

Reprendons donc l'équation d'Euler. Nous la dérivons par rapport au temps, et l'évaluons en  $y_0$ .

$$0 = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial y}{\partial t} \Big|_{y=y_0} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \Phi}{\partial y} \Big|_{y=y_0}$$

car en  $y = y_0$

$$\frac{\partial y}{\partial t} \Big|_{y=y_0} = u_y|_{y=y_0} = \frac{\partial \Phi}{\partial y} \Big|_{y=y_0}$$

Nous avons donc

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \Phi}{\partial y} \Big|_{y=y_0} = 0 \quad (4.4)$$

### C) Equation différentielle pour la variation spatiale de $\mathbf{u}$

La seule équation qu'il nous reste est l'équation d'état décrivant l'incompressibilité.

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \Leftrightarrow \nabla \cdot (\nabla \Phi) = 0$$

Comme  $\nabla \Phi = \left(0, \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)$ ,

$$\nabla \cdot (\nabla \Phi) = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0$$

C'est une équation de Laplace.

Nous résolvons cette équation par séparation des variables avec l'*ansatz* :

$$\Phi(y, z, t) = f(y) \exp\{i(\omega t - kz)\}$$

Avec cet *ansatz*, l'équation de Laplace devient

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - fk^2 = 0$$

soit  $f = A \cosh(ky) + B \sinh(ky)$ .

En utilisant la condition à la limite  $y = 0$  pour  $u_y, u_y(y = 0) = 0$ , nous obtenons

$$f = A \cosh(ky)$$

$$\Phi(y, z, t) = A \cosh(ky) \exp\{i(\omega t - kz)\}$$

### D) Obtention de la relation de dispersion

Nous utilisons l'équation (4.4).

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \Phi}{\partial y} \Big|_{y=y_0} = 0$$

Soit

$$A [-\omega^2 \cosh(ky_0) \exp\{i(\omega t - kz)\} + gk \sinh(ky_0) \exp\{i(\omega t - kz)\}] = 0$$

$$\omega^2 = gk \tanh(ky_0)$$

Si nous supposons que l'amplitude de la vague est faible devant la profondeur  $h$ , nous pouvons prendre  $ky_0 \approx h$ .

$$\omega^2 = gk \tanh(kh) \quad (4.5)$$

L'équation (4.5) est la relation de dispersion d'une onde transverse dans une couche de fluide d'épaisseur  $h$ .

### 4.2.2 Discussion

#### A) Domaine de validité

Il faut distinguer deux domaines de validité :

- celui lié à l'amplitude des ondes,
- celui lié à la longueur d'onde.

##### a) Amplitude des ondes

De nouveau, nous avons supposé que l'amplitude des ondes est faible pour pouvoir négliger le terme  $(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}$  dans l'équation d'Euler.

##### b) Longueur d'onde

La relation (4.5) a été dérivée en supposant qu'à l'interface  $y = y_0$ , la pression est égale à la pression atmosphérique.

Nous savons que l'interface air-liquide a un rayon de courbure  $R$  proportionnel à  $\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)^{-1}$ .<sup>1</sup>  
La loi de Laplace<sup>2</sup> donne alors

$$p = p_{atm} + \frac{\gamma}{R}$$

$\gamma$  est la tension superficielle. L'effet de la tension de surface devient important lorsque la longueur d'onde devient comparable à la longueur capillaire  $l_c = \sqrt{\gamma/\rho g}$  du fluide. La relation de dispersion devient alors

$$\omega^2 = \left(gk + \frac{\gamma k^3}{\rho}\right) \tanh(kh) \quad (4.6)$$

1. La dérivée seconde d'une fonction donne l'inverse de rayon de courbure.

2. C'est la généralisation de la loi de Laplace avec une surface à deux rayons de courbure  $R_1$  et  $R_2$  avec  $R_2 = \infty$

## B) Discussion sur la relation de dispersion (4.6)

### a) Eau profonde

Si  $kh \gg 1$ ,  $\tanh(kh) \approx 1$

$$kh \gg 1 \Leftrightarrow \text{Longueur d'onde} \ll \text{Profondeur } h$$

Récrivons alors la relation de dispersion (4.6) :

$$\omega^2 = kg \left( 1 + \frac{\gamma k^2}{\rho g} \right) = kg [1 + k^2 l_c^2] \quad (4.7)$$

Nous distinguons deux cas :

- $k^2 l_c^2 \ll 1 \Leftrightarrow k \ll l_c \Leftrightarrow \lambda \gg l_c$

Pour des longueurs d'onde beaucoup plus grandes que  $l_c$ , la relation de dispersion (4.7) des ondes en eau profonde est

$$\omega^2 = kg$$

La vitesse de phase  $\omega/k$  vaut  $\sqrt{g/k}$  et la vitesse de groupe  $v_g = \frac{d\omega}{dk} = 1/2\sqrt{g/k}$ . Sur la mer, c'est la relation de dispersion de la houle<sup>3</sup>.

- Dans l'autre limite ( $\lambda \ll l_c$ ,  $l_c \sim 3$  mm pour l'eau), la relation de dispersion (4.7) des ondes capillaires en eau profonde est

$$\omega^2 = k^3 g l_c^2 \Leftrightarrow \omega = k^{3/2} l_c \sqrt{g}$$

La vitesse de phase vaut  $\omega/k = l_c \sqrt{gk} = \sqrt{k\gamma/\rho}$ . La vitesse de groupe est  $v_g = \frac{d\omega}{dk} = 3/2\sqrt{k\gamma/\rho}$ .

### b) Eau peu profonde

Si  $kh \ll 1$ , c'est-à-dire si la profondeur  $h$  est beaucoup plus petite que la longueur d'onde et si  $kl_c \ll 1$ , la relation de dispersion (4.6) devient

$$\omega^2 = kg \cdot kh = k^2 gh \Rightarrow \omega = k \sqrt{gh}$$

La vitesse de phase  $\omega/k$  est égale à  $\sqrt{gh}$ . C'est la profondeur  $h$  de l'eau qui gouverne la vitesse de phase.

C'est ce phénomène qui explique le déferlement<sup>4</sup> des vagues. En effet, pour la crête de la vague d'amplitude  $A$ , la profondeur vaut  $h + A$  et la vitesse de phase correspondante est

3. Houle (définition du Larousse) : mouvement ondulatoire qui agite la mer sans faire déferler les vagues.

4. Déferler (définition du Larousse) : se dit des vagues qui se brisent en écume en roulant sur elles-mêmes.

$\sqrt{g(h + A)}$ . Pour le creux, la profondeur est  $h - A$  et la vitesse de phase est  $\sqrt{g(h - A)}$ . La crête se déplace plus vite que le creux, ce qui explique le déferlement.

Si nous développons  $\tanh(kh)$  à l'ordre suivant tout en considérant que  $kl_c \ll 1$ , nous obtenons

$$\omega = k\sqrt{gh} \left( 1 - \frac{k^2 h^2}{6} \right) \quad (4.8)$$

La vitesse de phase diminue lorsque  $k$  augmente.

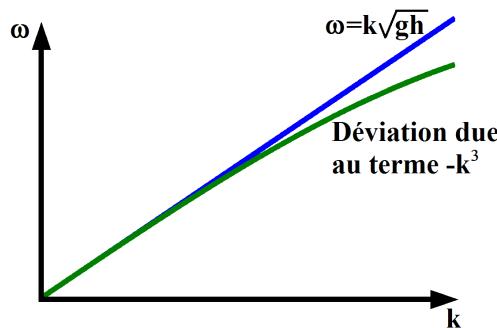


FIGURE 4.2 – Relation de dispersion  $\omega = k\sqrt{gh} \left( 1 - \frac{k^2 h^2}{6} \right)$

### c) Variation de la relation de dispersion

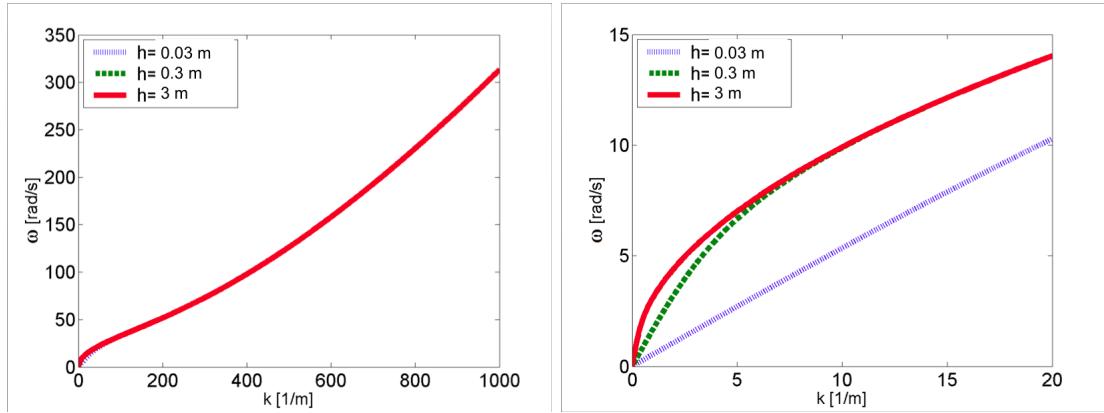
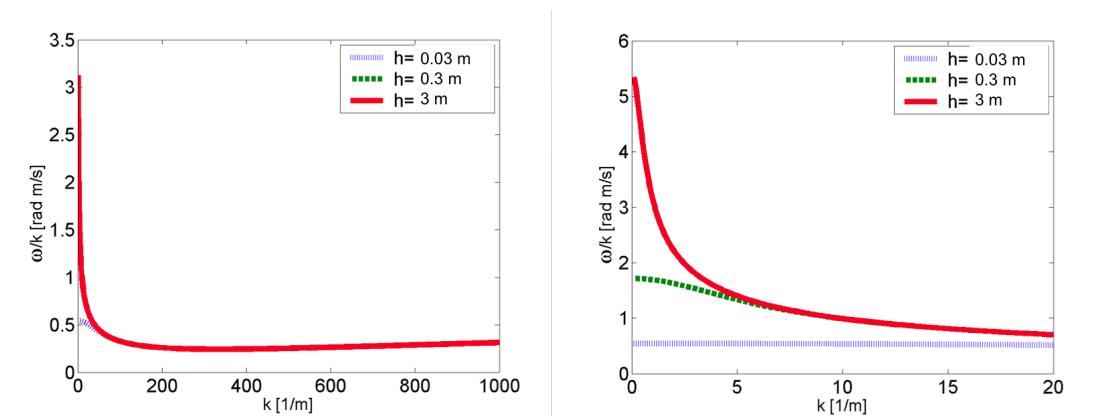
La relation de dispersion est donnée par

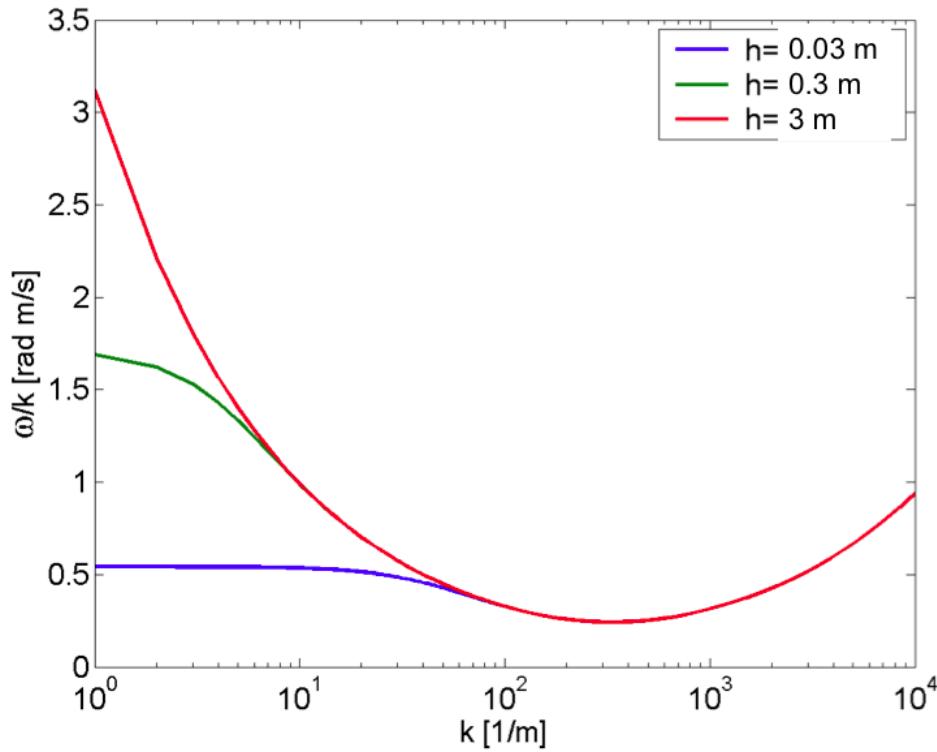
$$\omega^2 = \left[ gk + \frac{\gamma k^3}{\rho} \right] \tanh(kh)$$

$$\omega^2 = kg [1 + k^2 l_c^2] \tanh(kh)$$

$$\omega = \sqrt{kg [1 + k^2 l_c^2] \tanh(kh)}$$

Sur les graphiques suivants, nous avons calculé  $\omega$  en fonction de  $k$  pour des profondeurs  $h = 0.03$  m,  $h = 0.3$  m et  $h = 3$  m, avec  $g = 9.81$  m·s<sup>-2</sup> et  $l_c = 0.003$  m. La figure 4.3 représente les relations de dispersion, et les figures 4.4 et 4.5 les vitesses de phase  $\omega/k$ .


 FIGURE 4.3 – Relations de dispersion pour  $h = 0.03$  m,  $h = 0.3$  m et  $h = 3$  m

 FIGURE 4.4 – Vitesses de phases pour  $h = 0.03$  m,  $h = 0.3$  m et  $h = 3$  m

FIGURE 4.5 – Vitesses de phases pour  $h = 0.03$  m,  $h = 0.3$  m et  $h = 3$  m

#### d) Ondes non linéaires : solitons, équation de Korteweg-de Vries

En eau peu profonde, la relation de dispersion est

$$\omega = k\sqrt{gh} \left( 1 - \frac{k^2 h^2}{6} \right) \quad (4.9)$$

Pour de faibles valeurs de  $k$ , la relation de dispersion est linéaire. Pour de plus grandes valeurs de  $k$ , elle dévie de la droite  $\omega = k\sqrt{gh}$  selon  $-k^3$ .

Notons que d'autres phénomènes ont également une relation de dispersion du type  $\omega = kc_s(1 - k^2 a^2)$ . Par exemple dans un plasma non magnétisé, une onde appelée onde acoustique ionique possède une relation de dispersion de ce type.

Que se passe-t-il lorsque l'amplitude de l'onde est suffisamment grande pour que les effets non linéaires ne puissent pas être négligés ? Un tel phénomène est décrit par Scott Russell, et nous reproduisons ici sa description.

*I believe I shall best introduce this phenomenon by describing the circumstances of my own first acquaintance with it. I was observing the motion of a boat which was rapidly drawn along a narrow channel by a pair of horses, when the boat suddenly stopped - not so the mass of water in the channel which it had put in motion ; it accumulated round the prow of the vessel in a state of violent agitation, then suddenly leaving it behind, rolled forward with great velocity, assuming the form of a large solitary elevation, a rounded, smooth and well-defined heap of water, which continued its course along the channel apparently without change of form or diminution of speed. I followed it on horseback, and overtook it still rolling on at a rate of some eight or nine miles an hour, preserving its original figure some thirty feet long and a foot to a foot and a half in height. Its height gradually diminished, and after a chase of one or two miles I lost it in the windings of the channel. Such, in the month of August 1834, was my first chance interview with that singular and beautiful phenomenon which I have called the Wave of Translation, a name which it now very generally bears ; which I have since found to be an important element in almost every case of fluid resistance, and ascertained to be the type of that great moving elevation of the sea, which, with the regularity of a planet, ascends our rivers and rolls along our shores.<sup>5</sup>*

Sans rentrer dans le détail des calculs, notons que :

- l'effet de la non linéarité est de générer des harmoniques. En effet, lorsque nous multiplions par exemple deux termes du type  $\cos(\omega t - kz)$ , nous générerons un terme de fréquence  $2\omega$  et de vecteur d'onde  $2k$ . Tant que la relation de dispersion est linéaire, le mode caractérisé par  $(2\omega, 2k)$  peut être excité : c'est encore un mode normal du milieu.
- la dispersion (c'est-à-dire le fait que la relation de dispersion ne soit plus linéaire) fait que les harmoniques supérieures  $(n\omega, nk)$ , avec  $n$  entier, ne se trouvent plus sur la relation de dispersion, et ne peuvent plus être excités.

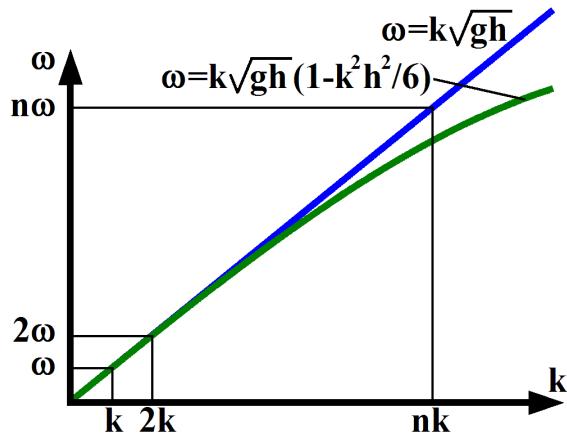


FIGURE 4.6 – Relation de dispersion  $\omega = k\sqrt{gh} \left(1 - \frac{k^2 h^2}{6}\right)$

5. J. Scott Russell, *Report on Waves*, 1842.

L'effet de la non linéarité est de raidir le front de la dispersion en générant des grandes longueurs d'onde. Cependant, ce raidissement est arrêté pour les effets de dispersion. On peut montrer qu'une perturbation non linéaire dans un tel milieu est décrit par une équation non linéaire appelée **équation de Korteweg-de Vries** :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - 6 \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0$$

Cette équation admet comme solution des perturbations appelées solitons :

$$u(x, t) = -\frac{1}{2}a^2 \operatorname{sech}^2 \left( \frac{1}{2}a(x - x_0 - a^2 t) \right)$$

où  $\operatorname{sech}(x) = \frac{1}{\cosh(x)}$  est la sécante hyperbolique.

Dans le cas des solitons observés par Scott Russell, leur vitesse de propagation  $v$  (mesurée par Scott Russell) est supérieure à la vitesse de phase  $\omega/k$ .

$$v = \sqrt{g(h + A)} > \sqrt{gh} = \frac{\omega}{k}$$

où  $A$  est l'amplitude de la perturbation.

Un propriété extrêmement intéressante et surprenante des solitons est leur conservation après une collision, comme le montre les résultats expérimentaux de la figure suivante, obtenus avec des solitons dans un plasma :

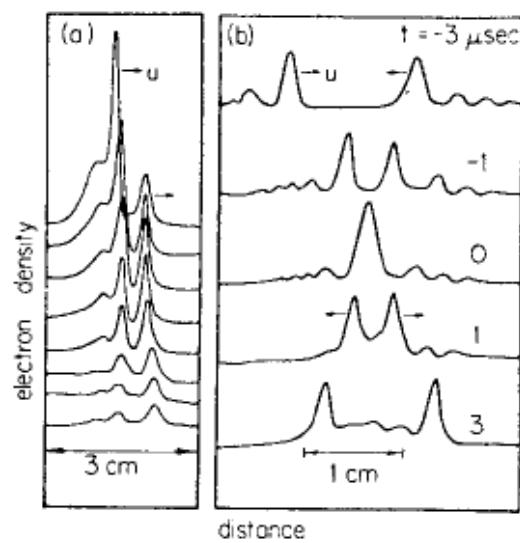


FIGURE 4.7 – Solitons dans un plasma (Réf : Solitons in Action, Ed. K. Lonngren and A. Scott, Academic Press, 1978, p. 162)

# Chapitre 5

## Electrostatique

### Introduction

Nous allons entreprendre l'étude du grand chapitre de l'électromagnétisme. Les thèmes seront :

- l'électrostatique : étude des phénomènes électriques stationnaires,
- le magnétisme statique : étude des champs magnétiques créés par un courant,
- l'électromagnétisme : étude des phénomènes avec des champs électriques et magnétiques variables dans le temps et dans l'espace. Nous y développerons la théorie des équations de Maxwell.

Ce chapitre introduit des notions fondamentales de l'électrostatique. Nous commencerons par la définition de la charge électrique (5.1). La loi de Coulomb (5.2) donne l'expression de la force entre deux charges électriques. Les charges électriques créent en tout point de l'espace un champ électrique (5.3). Le reste du chapitre est consacré à des techniques de calcul du champ électrique (5.4), du potentiel électrique (5.5) et de solutions de quelques problèmes d'électrostatique (5.6).

### 5.1 Charges électriques

#### 5.1.1 Charge électrique

De nombreuses expériences montrent l'existence des charges électriques positives et négatives. Les expériences les plus classiques consistent à frotter des corps avec un autre corps. L'exemple le plus classique est de frotter avec une fourrure (p.ex. une peau de lapin) une tige (p.ex. une tige de verre). La tige de verre devient chargée. Par convention on dit que ce sont des charges négatives. Il en est de même si on frotte de l'ambre avec la fourrure

de lapin.<sup>1</sup> Par contre, si l'on frotte la tige de verre avec une peau de chat, la tige de verre devient chargée avec des charges positives<sup>2</sup>.

Les objets dans la vie courante sont souvent neutres, car les charges électriques positives et négatives s'annulent. Ce n'est que dans certains cas qu'il y a un excès de charge d'une des espèces. Le corps contenant cet excès de charge est dit chargé. Cette différence de charge est toutefois très faible devant les charges existant dans le corps.

L'unité de charge électrique  $q$  est le coulomb :

$$[q] = \text{Coulomb} \equiv \text{C}$$

Notons que dans le système SI, le coulomb dérive de l'ampère A. Un ampère est défini de la manière suivante :

- Deux conducteurs rectilignes, parallèles, infinis, de section négligeable, séparés de 1 m et portant un courant de 1 A subissent une force de  $2 \cdot 10^{-7} \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$  par mètre de conducteur. (Voir le chapitre sur la magnétostatique.)
- 1 coulomb est la quantité de charge transportée par un courant de 1 A pendant 1 seconde.

$$1\text{C} = 1\text{A} \times 1\text{s}$$

Dans le système SI, toutes les unités électriques et magnétiques dérivent de l'ampère A.

Comme pour la masse, nous pouvons définir la densité de charge de la manière suivante. Soit un petit volume  $\Delta V$  qui contient une charge  $\Delta q$ . On définit la densité de charge comme

$$\rho_{el}(\mathbf{r}) = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta V}$$

où  $\mathbf{r}$  est l'endroit où se trouve  $\Delta V$ . Là où il n'y a pas risque de confusion entre la densité de masse et la densité de charge, nous noterons la densité de charge  $\rho$  (sans l'indice el).

On définit de même une densité de charge de surface  $\sigma$  par

$$\sigma_{el}(\mathbf{r}) = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta S}$$

où  $\Delta q$  = charge sur la surface  $\Delta S$  et  $\mathbf{r}$  = lieu où se trouve  $\Delta S$ .

### 5.1.2 Conducteur, isolant, semi-conducteur

Les charges électriques peuvent bouger librement dans certains corps appelés **conducteurs**. Les conducteurs sont par exemple les métaux, le corps humain, l'eau du robinet.

1. Note historique : le terme grec "elektron" qui a donné électron, électricité..., signifie ambre. Les propriétés électroniques de l'ambre étaient connues au temps de Platon.

2. Le type de charge dépend donc des matériaux utilisés lors de l'expérience !

Corps	Nature	$\rho$ [ $\Omega \cdot \text{m}$ ]
Cuivre	Conducteur	$1.7 \cdot 10^{-8}$
Mercure	Conducteur	$96 \cdot 10^{-8}$
Germanium	Semi-conducteur	0.6
Silicium	Semi-conducteur	$2.3 \cdot 10^3$
Verre	Isolant	$10^{11} - 10^{14}$
Mica	Isolant	$14^{13} - 10^{17}$
Supraconducteur		0

TABLE 5.1 – Quelques résistivités  $\rho$  typiques. Ne pas confondre la résistivité électrique dans ce tableau avec la densité de charge définie sous 5.1.1.

D'autres corps ne peuvent pas transporter l'électricité. Ils sont appelés **isolants**. Finalement, il existe des corps dont la propriété de conduction électrique est intermédiaire entre les conducteurs et les isolants : ce sont les semi-conducteurs.

La propriété de conduire l'électricité est mesurée par la résistivité électrique  $\rho$ . L'unité<sup>3</sup> de  $\rho$  est  $\Omega \cdot \text{m}$ . Le tableau 5.1 donne l'ordre de grandeur de la résistivité de quelques corps.

Dans ce chapitre on admettra que :

- un isolant ne conduit pas du tout l'électricité (c'est-à-dire  $\rho \rightarrow \infty$ )
- un conducteur a une résistivité  $\rho = 0 \Omega \cdot \text{m}$  : c'est l'hypothèse du "conducteur parfait"

### 5.1.3 Quantification de la charge

La célèbre expérience de Millikan a montré qu'il existe une charge élémentaire dont la valeur est  $1.602176565 \cdot 10^{-19}$  C (avec une précision de  $2.2 \cdot 10^{-8}$ )<sup>4</sup>. C'est la valeur de la charge de l'électron. Le coulomb est donc une très grande unité comparée à la charge de l'électron ! Il faut environ  $10^{19}$  électrons pour faire 1 C ! L'électron a donc une charge égale à  $-1.602176462 \cdot 10^{-19}$  C. Le proton a une charge positive égale à  $1.602176565 \cdot 10^{-19}$  C, soit une charge égale et opposée à celle de l'électron.

### 5.1.4 Densité de charge

Bien qu'en principe les charges soient quantifiées, nous serons amenés à définir une densité de charge  $\rho_{el}$  comme la quantité de charge par unité de volume.

$$\rho_{el} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\rho}{V}$$

$$[\rho_{el}] = \text{C} \cdot \text{m}^{-3}$$

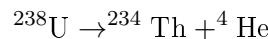
3.  $\Omega = \text{Ohm} = \text{l'unité de résistance}$ .  $\Omega \cdot \text{m} = \text{Ohm} \cdot \text{mètre}$

4. Référence : physics.nist.gov

Nous notons  $\rho_{el}$  pour éviter la confusion avec la densité de masse  $\rho$ . Lorsqu'il n'y a aucune confusion possible, nous écrivons aussi  $\rho$  pour  $\rho_{el}$ .

### 5.1.5 Conservation de la charge

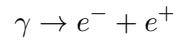
Dans toutes les expériences, la quantité de charge totale est conservée. Par exemple, dans une réaction de désintégration de type  $\alpha$  (dans le jargon, le terme  $\alpha$  est utilisé pour désigner le noyau d' $\text{He}$ ), l' $^{238}\text{U}$  se désintègre en  $^{234}\text{Th}$  :



En ce qui concerne la charge électrique, le noyau d' $\text{U}$  possède 92 protons, sa charge est donc de  $92 \times 1.6 \cdot 10^{-19}$  C. Celui de Th en possède 90 et sa charge vaut  $90 \times 1.6 \cdot 10^{-19}$  C, et celui d' $\text{He}$  en possède 2 et sa charge est donc  $2 \times 1.6 \cdot 10^{-19}$  C. Il y a donc égalité des charges avant et après la désintégration<sup>5</sup>.

La masse du noyau d' $\text{U}$  vaut 238 et la somme de celles des produits fils, le Th et l' $\text{He}$ , vaut aussi 238.

La même règle de conservation s'applique lors de la création de particules. Considérons la création de paires d'électron et de positon par un photon  $\gamma$  :



Le photon  $\gamma$  n'a pas de charge. Le membre de droite a aussi une charge nulle, car la charge du positon  $e^+$  est égale et opposée à celle de l'électron.

**La conservation de la charge est une des lois fondamentales de la physique.**

## 5.2 Loi de Coulomb

Faisons l'expérience suivante. Frottons une tige de verre avec une peau de lapin et une autre tige de verre avec une peau de chat. En rapprochant les deux tiges de verre on constate qu'elles s'attirent. Comme nous savons que les tiges de verre sont chargées respectivement positivement et négativement, cette expérience montre que les charges positives et négatives s'attirent. Par contre, deux tiges de verre frottées avec une peau de lapin se repoussent. Les charges négatives se repoussent. De même, deux tiges de verre frottées avec une peau de chat se repoussent. les charges positives se repoussent. Notre expérience montre que :

- des charges de même signe se repoussent,
- des charges de signes opposés s'attirent.

---

5. Je suppose que vous connaissez la structure d'un atome.

### 5.2.1 Loi de Coulomb

Soit deux charges  $q_1$  et  $q_2$ . La force de Coulomb  $F$  entre ces deux charges vaut

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2}$$

où  $r$  est la distance entre  $q_1$  et  $q_2$  et  $\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$  la **permittivité du vide**<sup>6</sup>. F est le farad, du nom du physicien Faraday. Dans le système SI, le farad a la dimension

$$\text{Farad} = F = [F] = \frac{\text{A}^2 \cdot \text{s}^4}{\text{kg} \cdot \text{m}^2}$$

La direction et le sens de  $\mathbf{F}$  sont donnés par :

- $\mathbf{F}$  est dirigée selon la ligne qui relie  $q_1$  et  $q_2$ .
  - $\mathbf{F}$  est attractive si  $q_1$  et  $q_2$  sont de signes opposés ( $q_1 q_2 < 0$ ) et répulsive si  $q_1 q_2 > 0$ .
- Si on dénote par  $\mathbf{r}$  le vecteur partant de  $q_1$  et allant vers  $q_2$ , la force de Coulomb  $\mathbf{F}_{12}$  exercée par  $q_2$  sur  $q_1$  est

$$\mathbf{F}_{12} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^3} \mathbf{r}$$

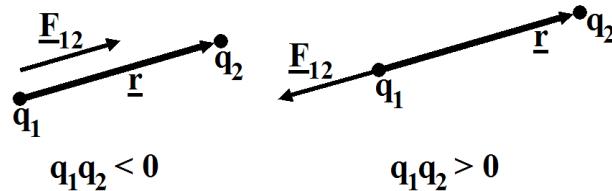


FIGURE 5.1 – Force de Coulomb

Nous pouvons mettre  $\mathbf{F}_{12}$  sous une forme plus générale. Soit  $\mathbf{r}_1$  la position de  $q_1$  et  $\mathbf{r}_2$  celle de  $q_2$  (voir figure 5.2)

Nous avons  $\mathbf{r} = (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)$  et

$$\mathbf{F}_{12} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^3} \mathbf{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{\|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1\|^3} (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$$

Notez la similitude entre la force de Coulomb et la force de la gravitation universelle de Newton. Les deux lois ont une dépendance en  $\frac{1}{r^2}$ . La seule différence est que la force de la gravitation universelle est toujours attractive, alors que la force de Coulomb peut être attractive ou répulsive selon le signe de  $q_1 q_2$ .

La force  $\mathbf{F}_1$  exercée par la charge 2 sur la charge 1 est égale à l'opposé de la force  $\mathbf{F}_2$  exercée par la charge 1 sur la charge 2 : c'est la loi de l'action et de la réaction.

6. Nous pouvons voir directement que l'unité de  $\epsilon_0$  est :  $\frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}^2} = \frac{\text{A}^2 \cdot \text{s}^2}{\text{m}^2 \cdot [\epsilon_0]}$  et donc  $[\epsilon_0] = \frac{\text{A}^2 \cdot \text{s}^4}{\text{kg} \cdot \text{m}^3}$ .

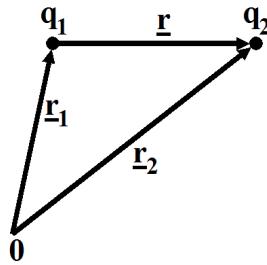
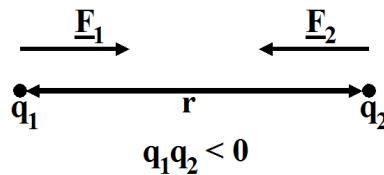


FIGURE 5.2 – Force de Coulomb, forme générale

FIGURE 5.3 –  $\mathbf{F}_1$  égale à l'opposé de  $\mathbf{F}_2$ 

### 5.2.2 Additivité des forces de Coulomb

Soit une charge  $q$  entourée de  $n$  charges  $q_i$ . Avec  $\mathbf{r}_i$  le vecteur partant de  $q$  et allant vers  $q_i$ , la force de Coulomb  $\mathbf{F}_1$  exercée par les  $n$  charges  $q_i$  sur la charge  $q$  est

$$\mathbf{F}_1 = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_{1i} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_i}{\|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_i\|^3} (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_i)$$

## 5.3 Champ électrique

### 5.3.1 Définition

Soit une charge positive  $q_0$  située en  $P$ . Si nous plaçons cette charge  $q_0$  dans une région de l'espace et que nous mesurons une force  $\mathbf{F}$  qui s'exerce sur cette charge, nous disons qu'il existe un champ électrique  $\mathbf{E}$  donné par

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{q_0}, \quad q_0 > 0$$

L'unité de champ  $\mathbf{E}$  est

$$[\mathbf{E}] = \frac{\text{N}}{\text{C}} = \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}^2 \cdot \text{C}} = \frac{\text{kgm}}{\text{s}^2} \cdot \frac{1}{\text{As}} = \frac{\text{Volt}}{\text{m}} \equiv \frac{\text{V}}{\text{m}}$$

Le volt  $V$  est donc

$$V = \frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{s}^2 \cdot \text{C}} = \frac{\text{kgm}^2}{\text{s}^2} \cdot \frac{1}{\text{As}}$$

Grâce à nos connaissances sur la force de Coulomb, nous pouvons immédiatement définir le champ électrique d'une charge  $q$  placée en  $O$  :

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|q|}{r^2}$$

où  $r$  est la distance entre la charge  $q$  et le point où le champ est mesuré.  $\mathbf{E}$  pointe vers  $q$  si  $q$  est négative, et pointe à l'opposé de  $q$  si  $q$  est positive :

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q\mathbf{r}}{r^3}$$

où  $\mathbf{r}$  est le vecteur  $\mathbf{OP}$ .

L'additivité de la force de Coulomb permet de définir le champ électrique dû à un ensemble de  $n$  charges comme étant la somme vectorielle des champs électriques dus à chaque charge.

### 5.3.2 Champ électrique dû à une distribution de charge

Pour des distributions de charges différentes, nous utiliserons toujours le principe d'addition. Comme exemple, nous discutons le champ créé par un disque uniformément chargé. Soit  $\sigma$  la densité de charge par unité de surface. La charge  $dq$  par unité de surface est donc

$$dq = \sigma dS$$

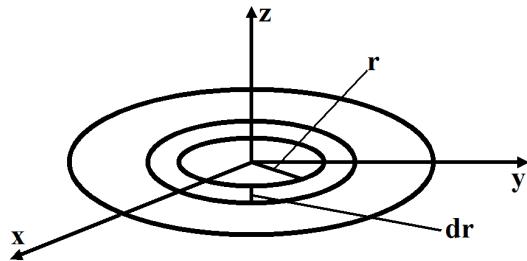


FIGURE 5.4 – Disque uniformément chargé

Nous considérons seulement le calcul du champ  $\mathbf{E}$  pour des points situés sur l'axe Oz perpendiculaire au disque et passant par son centre  $O$ . Par symétrie de la distribution

de charge, sur l'axe Oz, la seule composante de  $\mathbf{E}$  est dirigée selon Oz. Nous avons :

$$\begin{aligned}
 dE_z &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{z\sigma 2\pi r dr}{(z^2 + r^2)^{3/2}} \\
 E_z &= \int_0^R dE_z = \frac{\sigma z}{4\pi\epsilon_0} \int_0^R \frac{2\pi r dr}{(z^2 + r^2)^{3/2}} \\
 &= \frac{\sigma z}{4\epsilon_0} \int_0^R \frac{2r dr}{(z^2 + r^2)^{3/2}} = \frac{\sigma z}{4\epsilon_0} \int_0^{R^2} \frac{dr'}{(z^2 + r')^{3/2}} \\
 &= -2 \frac{\sigma z}{4\epsilon_0} (z^2 + r')^{-1/2} \Big|_0^{R^2} \\
 E_z &= \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[ 1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}} \right]
 \end{aligned}$$

### 5.3.3 Lignes de champ

Soit le champ vectoriel  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ . Les lignes de champ électrique sont des lignes qui sont tangentes en tout point à  $\mathbf{E}$ .<sup>7</sup>

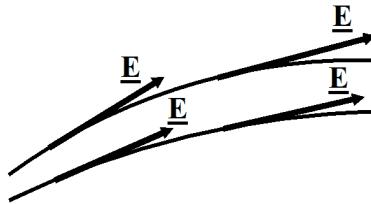


FIGURE 5.5 – Lignes de champ

Du point de vue mathématique, si nous connaissons en coordonnées cartésiennes les composantes  $E_x$ ,  $E_y$  et  $E_z$  de  $\mathbf{E}$ , l'équation des lignes de champ est

$$\frac{dx}{E_x} = \frac{dy}{E_y} = \frac{dz}{E_z}$$

Le long d'une ligne de champ, la norme  $\mathbf{E}$  du champ électrique n'est pas constante.

---

7. D'une manière générale, soit un champ vectoriel  $\mathbf{A}$ . Les lignes de champ correspondant à  $\mathbf{A}$  sont les lignes tangentes en tout point à  $\mathbf{A}$ .

Pour une charge ponctuelle négative, les lignes de champ sont :

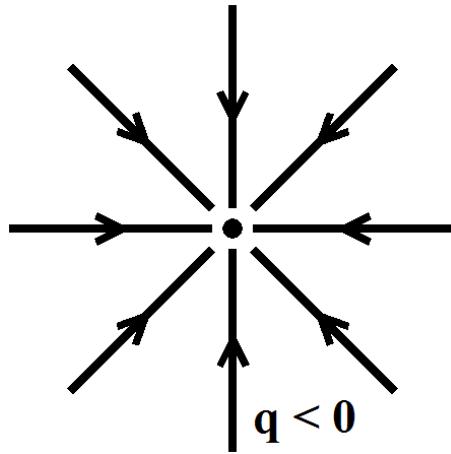


FIGURE 5.6 – Lignes de champ (charge ponctuelle négative)

Les lignes de champ pour un ensemble d'une charge positive et d'une charge négative sont :

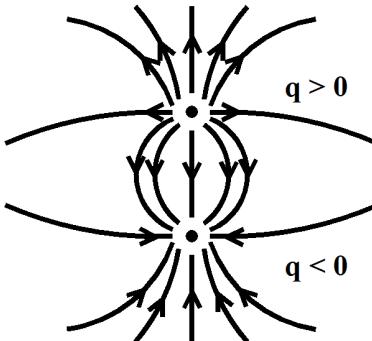


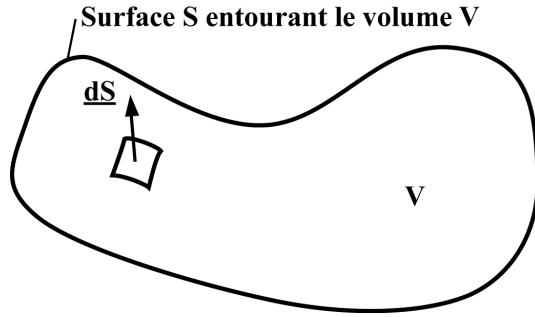
FIGURE 5.7 – Lignes de champ entre une charge positive et une charge négative.

## 5.4 Loi de Gauss, équation de Poisson

### 5.4.1 Enoncé (sans démonstration)

Soit le champ vectoriel  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ . Considérons une surface fermée  $S$  avec l'élément  $d\mathbf{S} = \mathbf{n}dS$  dirigée vers l'extérieur. La **loi de Gauss** s'énonce :

$$\varepsilon_0 \int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \text{Charges enfermées dans } S = q_{int} \quad (5.1)$$



La loi de Gauss dit que :

$\epsilon_0 \times \text{Flux de } \mathbf{E} \text{ à travers } S = \text{Valeur de la charge dans le volume } V \text{ entouré par } S$

Si nous définissons la densité de charge  $\rho_{el}$ , la charge  $q_{int}$  est

$$q_{int} = \int_V d^3r \rho_{el}$$

où  $V$  est le volume à l'intérieur de  $S$ .

L'équation de Gauss devient

$$\int_S d\mathbf{S} \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V d^3r \rho_{el}$$

En transformant l'intégrale de surface en intégrale de volume par le théorème de la divergence (cf. Notations du cours)

$$\int_S d\mathbf{S} \cdot \mathbf{E} = \int_V d^3r \nabla \cdot \mathbf{E}$$

le théorème de Gauss devient

$$\int_V d^3r \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V d^3r \rho_{el}$$

Cette égalité étant vraie quel que soit le volume  $V$ , nous en déduisons

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho_{el} \quad (5.2)$$

L'équation (5.2) est appelée **équation de Poisson**. C'est la forme différentielle (ou forme locale) de l'équation de Gauss (5.1) qui est une équation intégrale.

La loi de Poisson (5.2) dit que :

$$\begin{aligned} \text{La divergence de } \mathbf{E} \text{ évaluée au point } \mathbf{r}_0 = \\ = \frac{1}{\epsilon_0} \times \text{ Densité de charge électrique au même point } \mathbf{r}_0 \end{aligned}$$

### 5.4.2 Applications de la loi de Gauss

Nous utiliserons souvent la loi de Gauss pour évaluer le champ électrique  $\mathbf{E}$  d'une distribution de charge donnée. Pour cela, nous devons faire appel à la symétrie du problème, ce qui doit être déterminé au cas par cas.

#### a) Champ électrique dû à une distribution linéique de charge

Soit un fil rectiligne infini avec une densité de charge linéique  $\lambda$  :

$$[\lambda] = \text{C} \cdot \text{m}^{-1}$$

Nous cherchons à calculer le champ  $\mathbf{E}$  à une distance  $r$  du fil. Nous utilisons la loi de Gauss. Nous explicitons ici ce que nous pouvons déduire de la géométrie du problème.

**A)** Indépendance du champ  $\mathbf{E}$  vis-à-vis de la coordonnée  $z$ .

Le fil étant de longueur infinie et supposé confondu avec  $Oz$ , tout point  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  est équivalent à un autre point  $P_1(x_0, y_0, z_1)$ .

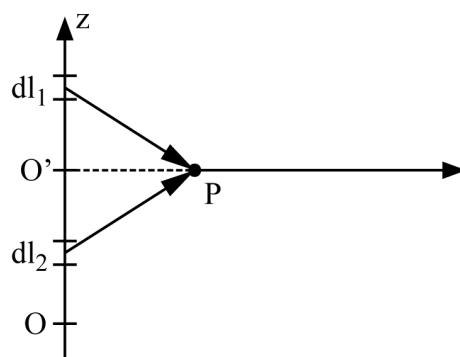
**B)** Indépendance du champ  $\mathbf{E}$  vis-à-vis de la coordonnée angulaire  $\theta$  par symétrie de la géométrie.

Au lieu de considérer le système de coordonnées cartésiennes, prenons le système de coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$ . L'axe  $Oz$  est confondu avec le fil. La source du champ  $\mathbf{E}$ , c'est-à-dire le fil, et l'espace dans lequel le champ est créé (ici le vide) étant isotropes, le champ  $\mathbf{E}$  ne peut pas dépendre de  $\theta$ , car il n'y a aucune direction préférentielle.

Nous avons donc  $\mathbf{E} = \mathbf{E}(r)$  seulement.

**C)** Quelle est la direction de  $\mathbf{E}$  ?

Pour chaque point  $P$  où nous devons calculer le champ  $\mathbf{E}$ , la contribution infinitésimale  $d\mathbf{E}_1$  due à  $dl_1$  a une contribution équivalente  $d\mathbf{E}_2$  due à  $dl_2$ .  $dl_2$  est le symétrique de  $dl_1$  par rapport à  $O'$ . La somme vectorielle  $d\mathbf{E}_1 + d\mathbf{E}_2$  ne possède qu'une composante radiale. Donc  $\mathbf{E} = \mathbf{E}(r)$  ne possède qu'une composante radiale.



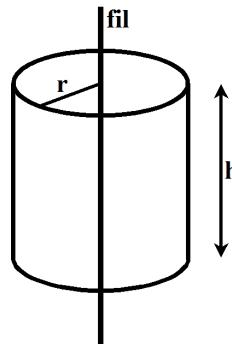


FIGURE 5.8 – Fil infini entouré d'un cylindre

La surface considérée pour l'application de la loi de Gauss est un cylindre coaxial à la droite chargée ainsi que les deux surfaces qui ferment les deux bouts du cylindre.

Soit  $r$  le rayon du cylindre et  $h$  sa hauteur. Le rayon  $r$  vaut OP. Comme discuté avant, le champ  $\mathbf{E}$  doit être radial. Donc, par la loi de Gauss,

$$\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 2\pi rhE = \frac{1}{\epsilon_0}(\text{somme des charges dans } S) = \frac{1}{\epsilon_0}\lambda h$$

$$E = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{r}$$

$\mathbf{E}$  est dirigé vers l'extérieur si la ligne de charge est positive, et dirigé vers l'intérieur si elle est négative.

### b) Champ électrique dû à une distribution de charge uniforme sur une sphère

Soit une sphère de rayon  $R$ , de centre O, avec une densité de charge  $\sigma$  uniformément distribuée sur la surface.  $\sigma$  a donc pour dimension  $\text{Cm}^{-2}$ .

Calculons le champ électrique à une distance  $r$  du centre O de la sphère. Pour effectuer ce calcul, nous utilisons à nouveau à loi de Gauss. La surface  $S$  est celle d'une sphère de rayon  $r$  et de centre O.

Pour des raisons de symétrie, le champ  $\mathbf{E}$  ne peut avoir qu'une composante selon la direction radiale (essayez de vous en convaincre en considérant la géométrie du problème).

Considérons maintenant l'équation de Gauss. Si  $r < R$ , la surface  $S$  n'inclut aucune charge. Le champ électrique  $\mathbf{E}$  est donc nul.

Si  $r > R$ , nous avons

$$\int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 4\pi r^2 E = \frac{1}{\epsilon_0} \sigma 4\pi R^2 = \frac{q}{\epsilon_0}$$

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}$$

Résumons les résultats obtenus avec une distribution de charge uniformément répartie sur une sphère de rayon  $R$  :

- le champ électrique  $E$  est nul pour  $r < R$ ,
- le champ électrique  $E$  pour  $r > R$  causé par cette distribution de charge est celui produit par une charge équivalente  $q = 4\pi R^2 \sigma$  mise au centre O de la sphère.

## 5.5 Potentiel électrique

### 5.5.1 Définition du potentiel électrique

Notons qu'à part des constantes, la force de la gravitation et la force de Coulomb ont la même dépendance spatiale.

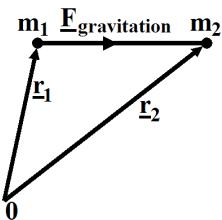


FIGURE 5.9 – Force de gravitation

$$\mathbf{F}_{\text{gravitation}} = G \frac{m_1 m_2}{\|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\|^3} (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)$$

$\mathbf{F}_{\text{gravitation}}$  est la force de gravité de la masse  $m_2$  sur la masse  $m_1$ .

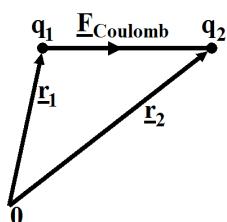


FIGURE 5.10 – Force de Coulomb

$$\mathbf{F}_{\text{Coulomb}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|q_1 q_2|}{\|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\|^3} (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)$$

$\mathbf{F}_{Coulomb}$  est la force de Coulomb de la charge  $q_2$  sur la charge  $q_1$  dans le cas de l'attraction (voir 5.2.1).

Nous savons que la force due à la gravitation universelle dérive d'un potentiel, c.à.d.  $\mathbf{F}_{gravitation}$  est égal à  $-\nabla U$  :

$$\mathbf{F}_{gravitation} = -\nabla U_{gravitation}$$

La quantité  $\mathbf{F}_{gravitation} \cdot d\mathbf{l}$  est donc égale à

$$\mathbf{F}_{gravitation} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{\partial U}{\partial x}dx - \frac{\partial U}{\partial y}dy - \frac{\partial U}{\partial z}dz$$

$$\mathbf{F}_{gravitation} \cdot d\mathbf{l} = -dU$$

Le travail  $\mathbf{F}_{gravitation} \cdot d\mathbf{l}$  est donc une différentielle totale exacte.

Comme la force de Coulomb a la même dépendance fonctionnelle dans l'espace que la force de gravitation universelle, nous concluons qu'un potentiel lui est également associé. Plus précisément, nous définissons le potentiel électrique  $\Phi_{elec}$  (ou par simplicité  $\Phi$ ) comme

$$\mathbf{E} = -\nabla\Phi$$

Le potentiel  $\Phi$  d'une charge  $q$  située en O mesuré à une distance  $r$  de  $q$  est

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}$$

Le potentiel  $\Phi$  est un champ scalaire. Notons que si  $\mathbf{E}$  est défini d'une manière univoque par la force exercée sur une charge  $q_0$ , le potentiel  $\Phi$  n'est défini qu'à une constante près. En effet, si  $\Phi$  satisfait

$$-\nabla\Phi = \mathbf{E}$$

la quantité  $\Phi' = \Phi + \text{cte}$  satisfait aussi cette égalité. **Un potentiel n'est donc défini qu'à une constante près.**

L'unité de  $\Phi$  se déduit de l'unité de force et est le volt :

$$[F] = [q] \cdot [E] = [\Phi] \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{C}$$

$$[\Phi] = \text{m} \cdot [E]$$

$$[\Phi] = \text{V}$$

car  $[\text{E}] = \text{V}/\text{m}$ . Rappelons que

$$[\text{V}] = \frac{\text{kgm}^2}{\text{s}^2} \frac{1}{\text{As}}$$

### 5.5.2 Additivité du potentiel

Le champ électrique en un point dû à plusieurs charges étant la somme des champs électriques créés par ces charges, le potentiel en un point est alors la somme des potentiels dus à ces charges.

### 5.5.3 Exemple de calcul d'un potentiel

#### a) Potentiel dû à une distribution linéique de charge

Soit un segment de longueur  $L$  portant des charges de densité linéique  $\lambda$  constante ( $[\lambda]=\text{Cm}^{-1}$ ). La géométrie est donnée sur la figure 5.11.

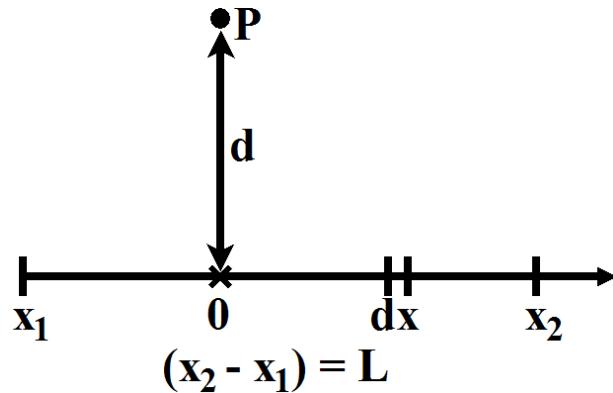


FIGURE 5.11 – Distribution linéique de charge

Le potentiel  $d\Phi$  dû à l'élément  $dx$  situé en  $x$  est

$$\begin{aligned}
 d\Phi &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dx}{(x^2 + d^2)^{1/2}} \\
 \Phi &= \int_{x_1}^{x_2} \frac{\lambda dx}{4\pi\epsilon_0(x^2 + d^2)^{1/2}} \\
 &= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln \left[ x + (x^2 + d^2)^{1/2} \right] \Big|_{x_1}^{x_2} \\
 \Phi &= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln \left[ \frac{x_2 + (x_2^2 + d^2)^{1/2}}{x_1 + (x_1^2 + d^2)^{1/2}} \right]
 \end{aligned}$$

Nous avons utilisé

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + d^2}} = \ln \left[ x + \sqrt{x^2 + d^2} \right]$$

### b) Potentiel dû à un disque uniformément chargé

Nous cherchons le potentiel en un point  $P$  situé sur l'axe  $Oz$  passant par  $O$  et perpendiculaire au disque de rayon  $R$ .

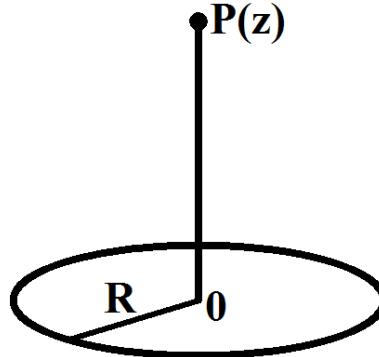


FIGURE 5.12 – Disque uniformément chargé

Le potentiel dû aux charges sur une couronne circulaire  $2\pi r dr$  est

$$d\Phi = \frac{\sigma 2\pi r dr}{4\pi\epsilon_0(r^2 + z^2)^{1/2}}$$

donc

$$\begin{aligned}\Phi &= \int_0^R \frac{\sigma 2\pi r dr}{4\pi\epsilon_0(r^2 + z^2)^{1/2}} \\ \Phi(P) &= \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left( \sqrt{R^2 + z^2} - z \right)\end{aligned}$$

#### 5.5.4 Surface équipotentielle

Une surface équipotentielle est définie par l'équation

$$\Phi(\mathbf{r}) = \text{cte}$$

Considérons maintenant une surface équipotentielle. Décomposons le gradient en deux composantes :

- le gradient selon une direction tangente à la surface, soit  $\nabla_{\parallel}$
- le gradient perpendiculaire à la surface, soit  $\nabla_{\perp}$

La surface étant une surface équipotentielle,  $\nabla_{\parallel}\Phi = 0$ , c'est-à-dire  $E_{\parallel} = 0$ .

Par exemple, pour une charge ponctuelle, le potentiel au point  $P$  est

$$\Phi(P) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

où  $r$  est la distance entre la charge et le point P. Une surface équipotentielle est donc ici une sphère de rayon  $r$  centrée sur la charge.

Un autre exemple est le cas du champ électrique atmosphérique. Dans les conditions normales (pas de précipitations), il existe au voisinage du sol un champ électrique  $\mathbf{E}$  dirigé verticalement de haut en bas, et d'intensité  $100 \text{ V}\cdot\text{m}^{-1}$ . Donc les équipotentielles sont des plans horizontaux. Deux équipotentielles distantes de 1 m diffèrent de 100 V. Le corps humain étant conducteur, il déforme les surfaces équipotentielles (figure 5.13).

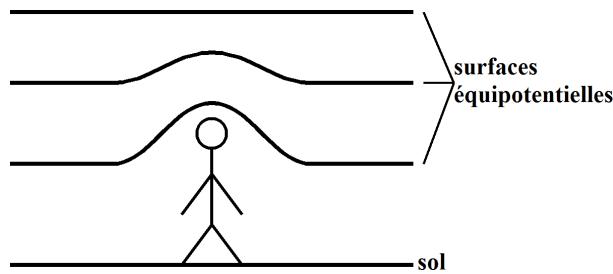


FIGURE 5.13 – Surfaces équipotentielles atmosphériques

Par définition du champ électrique ( $\mathbf{E} = -\nabla\Phi$ ), le champ  $\mathbf{E}$  en un point P est normal à la surface équipotentielle passant par ce point. La ligne de champ électrique passant par P (donc tangente à  $\mathbf{E}$  en P) est alors normale à la surface équipotentielle passant par P.

### 5.5.5 Travail et potentiel

Soit une particule chargée. Elle se trouve au point A où le potentiel est  $\Phi(A)$ . Nous l'amenons au point B où le potentiel est  $\Phi(B)$ . Le travail fourni pour l'amener de A à B est

$$W = - \int_A^B q \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

L'intégrale est évaluée le long de la trajectoire suivie par la particule. Le signe – provient du fait que  $W$  est le travail fourni contre le champ  $\mathbf{E}$ .

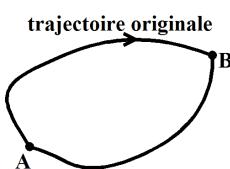


FIGURE 5.14 – Trajectoires entre A et B

Nous désirons montrer que

$$W = - \int_A^B q \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

est indépendant de la trajectoire, mais dépend seulement des points A et B.

Considérons la quantité

$$W' = -q \left[ \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} + \int_B^A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \right]$$

Ecrivons  $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$  en utilisant le fait que  $\mathbf{E} = -\nabla\Phi$  :

$$\mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\nabla\Phi \cdot d\mathbf{l} = - \left[ \frac{\partial\Phi}{\partial x} dx + \frac{\partial\Phi}{\partial y} dy + \frac{\partial\Phi}{\partial z} dz \right]$$

L'expression

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} dx + \frac{\partial\Phi}{\partial y} dy + \frac{\partial\Phi}{\partial z} dz$$

est la différentielle totale exacte  $d\Phi$  de  $\Phi$  :

$$d\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial x} dx + \frac{\partial\Phi}{\partial y} dy + \frac{\partial\Phi}{\partial z} dz$$

Donc

$$W' = \int_A^A d\Phi = 0 = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

Par conséquent

$$- \int_A^B q \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

selon le chemin original (figure 5.14) est aussi égal à l'intégrale  $- \int_A^B q \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$  selon le deuxième chemin.

Le travail nécessaire pour amener une charge  $q$  d'un potentiel  $\Phi(A)$  à un potentiel  $\Phi(B)$  est indépendant de chemin suivi.

$$W = - \int_A^B q \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = q [\Phi(B) - \Phi(A)]$$

Le deuxième résultat important est que

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

L'intégrale de  $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$  le long d'un contour fermé est nulle.

## 5.6 Quelques problèmes d'électrostatique

Le but de cette partie est de discuter quelques problèmes importants de l'électrostatique. Elle vous introduit aussi aux techniques de calcul en électrostatique. Considérez-la comme un petit recueil d'exercices corrigés !

### 5.6.1 Conducteur chargé

Un conducteur est un corps dans lequel les charges électriques peuvent se mouvoir. Nous supposerons que ce mouvement n'est pas entravé : il n'y a pas de résistance électrique.

Considérons d'abord un conducteur isolé. Physiquement, nous pouvons l'imaginer comme un morceau de Cu (conducteur) isolé par un fil isolant :

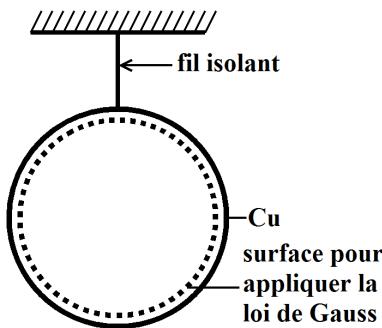


FIGURE 5.15 – Conducteur isolé par un fil

Plaçons sur le conducteur un excès de charge  $q$ . Nous allons démontrer la propriété suivante : toute la charge excédentaire placée sur un conducteur isolé se répartit sur la surface du conducteur. Aucune partie de cette charge excédentaire ne se répartit à l'intérieur du conducteur.

Le raisonnement se décompose en plusieurs étapes :

- A l'intérieur du conducteur, le champ électrique doit être égal à 0. Sinon, il mettrait en mouvement les électrons libres du conducteur<sup>8</sup>. Nous aurions ainsi un courant<sup>9</sup> perpétuel, ce qui n'existe pas.
- Considérons alors une surface fermée juste au dessous de la surface  $S$  du conducteur. La loi de Gauss appliquée sur cette surface donne

$$\int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

dans le conducteur (car  $\mathbf{E} = 0$ ), donc sur la surface  $S$ . La charge à l'intérieur de la surface  $S$  est donc nulle.

- La charge excédentaire ne pouvant se répartir dans le conducteur est donc sur la surface.

### Direction et valeur du champ électrique à la surface

Quelle est la valeur du champ électrique à la surface du conducteur chargé ?

Montrons que la composante parallèle à la surface  $\mathbf{E}_{\parallel}^S$  du champ électrique  $\mathbf{E}^S$  à la surface est nulle.  $\mathbf{E}_{\parallel}^S$  doit être nul, sinon il produirait un courant perpétuel.

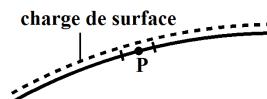
$$\mathbf{E}_{\parallel}^S = 0$$

Si  $\mathbf{E}_{\parallel}^S = 0$ , la surface du conducteur est une équipotentielle (voir la définition d'une surface équipotentielle).

A la surface du conducteur, le champ électrique  $\mathbf{E}^S$  est donc perpendiculaire à la surface. Les lignes de champ électrique partent perpendiculairement de la surface.

$$\mathbf{E}^S = \mathbf{E}_{\perp}^S$$

Pour calculer  $\mathbf{E}_{\perp}^S$  en un point de la surface, définissons tout d'abord la densité de charge de surface  $\sigma$  sur une petite surface  $\Delta S$  autour du point P où nous évaluons  $\mathbf{E}_{\perp}^S$ .



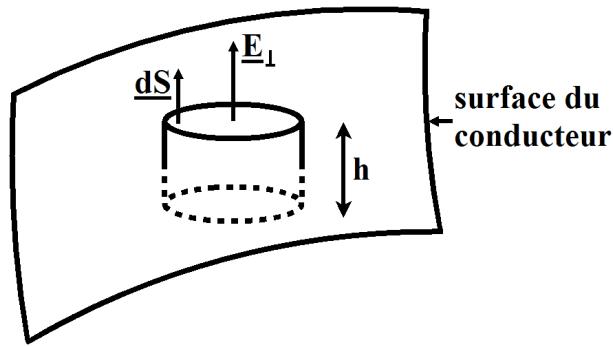
Soit  $\Delta q$  la quantité de charge sur  $\Delta S$  :

$$\sigma = \frac{\Delta q}{\Delta S}$$

Nous utiliserons de nouveau la loi de Gauss.

---

8. Dans un conducteur, ce sont des électrons "libres" qui assurent le transport du courant électrique.  
 9. Un courant est la manifestation de charges électriques en mouvement.



Nous formons un petit cylindre dont les deux faces sont parallèles à  $\Delta S$ , de hauteur  $\frac{h}{2}$  au dessus de la surface et  $\frac{h}{2}$  en dessous. Nous supposons  $\Delta S$  assez petite pour que  $\mathbf{E}_\perp^S$  soit constant sur  $\Delta S$ .

L'intégrale de Gauss sur le cylindre donne

$$\int_{Cylindre} \mathbf{E}_\perp^S \cdot d\mathbf{S} = E_\perp^S \Delta S = \frac{\sigma \Delta S}{\epsilon_0}$$

$$E_\perp^S = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

Si  $\sigma$  est positif,  $\mathbf{E}_\perp^S$  est dirigé vers l'extérieur. Si  $\sigma$  est négatif,  $\mathbf{E}_\perp^S$  est dirigé vers l'intérieur.

### 5.6.2 Influence sur des conducteurs non chargés

Le problème suivant illustre plusieurs concepts importants. Soit une coque sphérique conductrice ayant une certaine épaisseur. Le centre de la coque est en  $O$ . En  $O$ , nous plaçons une charge  $q$ . Le problème est de connaître la distribution de charge sur les deux surfaces de la coque.

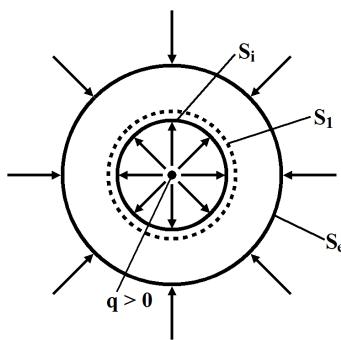


FIGURE 5.16 – Coque sphérique conductrice

Considérons d'abord la surface intérieure  $S_i$  de la coque. Prenons comme surface pour appliquer la loi de Gauss une sphère  $S_1$  juste à l'extérieur de la surface intérieure, dans le conducteur :

$$\varepsilon_0 \int_{S_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 0 \text{ car } \mathbf{E} = 0 \text{ dans le conducteur}$$

Donc la somme des charges dans  $S_1$  doit être nulle.

$$\int_{S_1} \sigma_i dS + q = 0$$

Il apparaît donc une densité de charge  $\sigma_i$  de signe opposé à  $q$  sur l'intérieur de la coque. Comme  $q$  est placé au centre de la sphère, par symétrie,  $\sigma_i$  est uniforme sur  $S_i$ .

$$\sigma_i = \frac{-q}{S_i}$$

A l'intérieur de la coque conductrice,  $\mathbf{E}$  et les charges sont nuls.

Par contre à la surface extérieure  $S_e$ , il doit apparaître une densité de charge  $\sigma_e$  telle que

$$\left| \int_{S_e} \sigma_e dS \right| = \left| \int_{S_i} \sigma_i dS \right| = |q|$$

et le signe des charges sur  $S_e$  est celui de  $q$ . En effet, s'il apparaît une charge  $-q$  sur la surface  $S_i$ , comme le conducteur est neutre électriquement, la charge sur  $S_e$  doit être égale à  $+q$ .

### 5.6.3 Discontinuité sur une surface

Nous considérons une surface  $S$  avec sur cette surface une distribution  $\sigma$  de charges de surface. Nous nous intéressons au champ  $\mathbf{E}$  dû à cette distribution de charge spécialement aux discontinuités de champ  $\mathbf{E}$  à la surface  $S$ .

Pour traiter ce genre de problème, rappelons les deux théorèmes importants :

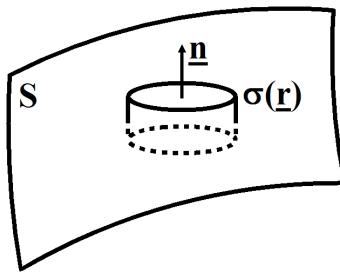
$$\int_{S_{Gauss}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{\text{charges}}{\varepsilon_0}$$

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

Par un choix adapté de la surface de Gauss et du contour d'intégration fermé, nous pouvons avoir une information sur les composantes perpendiculaire et parallèle à  $S$  de  $\mathbf{E}$ .

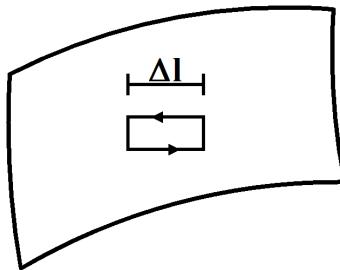
Pour appliquer la loi de Gauss, nous choisissons un cylindre avec les surfaces circulaires parallèles (localement) à  $S$ . La hauteur du cylindre est infiniment petite. Donc

$$(\mathbf{E}_{ext} - \mathbf{E}_{int}) \cdot \mathbf{n} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$



**Le champ électrique perpendiculaire (ou normal) à  $S$  est discontinu en traversant la surface.**

Pour connaître la variation de la composante parallèle, prenons un circuit fermé formé d'un rectangle perpendiculaire à  $S$ . La largeur du rectangle est infiniment petite. Sa longueur est tangente à  $S$ . La normale au rectangle est tangente à  $S$ .



$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \mathbf{E}_{ext\parallel} - \mathbf{E}_{int\parallel} = 0$$

**La composante tangentielle du champ électrique est continue à travers la surface.**

De ces deux résultats, nous notons que le champ  $\mathbf{E}$  reste borné, même si la composante normale est discontinue. Du fait que  $\mathbf{E}$  reste borné, le potentiel  $\Phi$  est une fonction continue.

#### 5.6.4 Capacité et condensateur

Un conducteur sur lequel nous ajoutons des charges se mettra à un potentiel  $\Phi$ . Ce potentiel est positif si les charges sont positives, et négatif si elles sont négatives.

Si maintenant nous approchons un conducteur chargé d'un autre, ils s'influencent l'un l'autre. En effet, le champ électrique du premier conducteur va induire des charges à la surface du deuxième, et inversement.

Considérons  $N$  conducteurs chargés, isolés les uns des autres et placés dans le vide. Soit  $\Phi_i$  le potentiel de chacun de ces conducteurs. Comme le potentiel est linéairement proportionnel à la charge  $q_j$ , nous avons

$$\Phi_i = \sum_j p_{ij} q_j$$

En résolvant ce système d'équations linéaires pour obtenir  $q_i$ , nous pouvons écrire

$$q_i = \sum_j C_{ij} \Phi_j$$

$C_{ii}$  est appelé la **capacité** du conducteur.  $C_{ij}$  avec  $i \neq j$  sont les coefficients d'induction. La dimension de la capacité est le farad, c'est-à-dire  $\text{A}^2 \text{s}^4 \text{kg}^{-1} \text{m}^{-2}$ .

Dans la pratique, ce que nous appelons un condensateur est formé de deux conducteurs chargés avec des charges égales et opposées. La capacité  $C$  est définie comme le rapport entre la charge  $|q|$  et la différence de potentiel.

Comme exemple, calculons la capacité d'un condensateur plan et celle d'un condensateur cylindrique. Nous avons besoin pour cela :

- de la relation entre la charge  $q$  et le champ électrique  $E$ . C'est la loi de Gauss qui nous donne cette relation.
- de la relation entre la différence de potentiel  $\Phi_B - \Phi_A$  et le champ  $\mathbf{E}$ . C'est l'intégrale  $\Phi_B - \Phi_A = - \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$ , l'intégrale étant en principe prise le long de n'importe quel parcours partant d'un conducteur et allant vers l'autre.

### Condensateur plan

Considérons un système plan formé de deux plaques conductrices parallèles. Nous supposons que les plaques conductrices sont assez grandes pour que le champ  $\mathbf{E}$  soit uniforme à l'intérieur et nul à l'extérieur.

Il y a des charges  $+q$  sur une plaque et  $-q$  sur l'autre plaque. Pour effectuer l'intégrale de Gauss, nous choisissons la surface  $S$  qui entoure la charge  $+q$ .

$$\int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{q}{\epsilon_0} = ES_c$$

$$q = \epsilon_0 E S_c$$

$S_c$  est la surface de chaque plaque du condensateur.

Pour évaluer  $\Phi_B - \Phi_A$ , nous prenons un segment partant de la plaque chargée négativement vers celle chargée positivement, et perpendiculaire aux plaques :

$$\Phi_B - \Phi_A = \int_0^d Edx = Ed$$

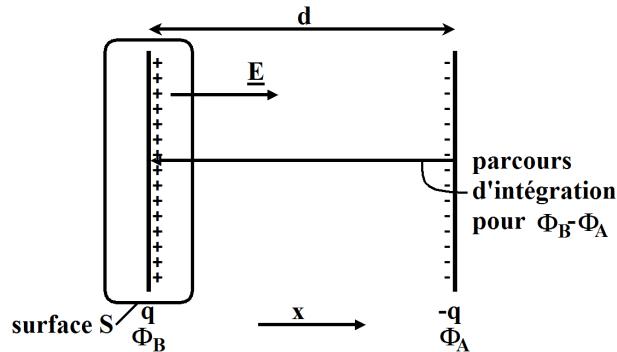


FIGURE 5.17 – Condensateur plan

$$E = \frac{\Phi_B - \Phi_A}{d}$$

Nous avons donc

$$q = \frac{\varepsilon_0 S_c}{d} (\Phi_B - \Phi_A) = C (\Phi_B - \Phi_A)$$

$C$  est la capacité du condensateur. Cette capacité est donc

$$C = \frac{\varepsilon_0 S_c}{d}$$

La capacité  $C$  est le facteur de proportionnalité entre  $q$  et la différence de potentiel  $(\Phi_B - \Phi_A)$ .  $C$  dépend des facteurs géométriques du condensateur. La dimension de la capacité  $C$  est le Farad.

### Condensateur cylindrique

Considérons maintenant le cas du condensateur cylindrique formé de deux cylindres coaxiaux de longueur  $L$ .

Soit  $b$  le rayon du cylindre intérieur et  $a$  celui du cylindre extérieur. Nous supposons que la hauteur  $L$  du cylindre est telle que nous pouvons négliger les effets aux bouts du cylindre. Par symétrie, le champ  $\mathbf{E}$  est dans la direction radiale.

Soit  $S$  la surface utilisée pour l'intégration de Gauss.  $S = 2\pi rL$ .

$$q = \varepsilon_0 \int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \varepsilon_0 E 2\pi r L$$

$$E = \frac{q}{\varepsilon_0 2\pi L r}$$

$$\Phi_B - \Phi_A = \int_b^a E dr = \frac{q}{\varepsilon_0 2\pi L} \int_b^a \frac{dr}{r}$$

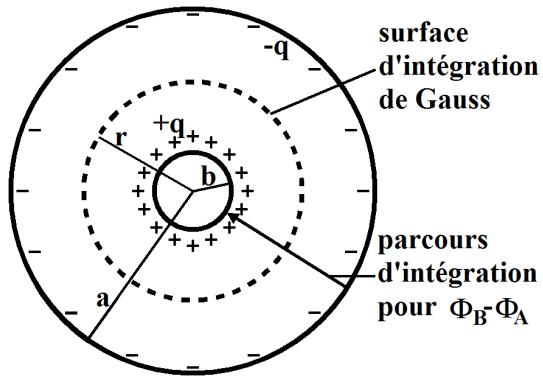


FIGURE 5.18 – Condensateur cylindrique

$$\Phi_B - \Phi_A = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 L} \ln\left(\frac{a}{b}\right)$$

La capacité d'un condensateur cylindrique est

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0 L}{\ln\left(\frac{\text{rayon extérieur}}{\text{rayon intérieur}}\right)}$$

### Energie stockée dans un condensateur et densité d'énergie électrique

Un condensateur sert à stocker de l'énergie. Pour simplifier la notation, appelons  $U$  la différence de potentiel entre les deux plaques du condensateur. La charge  $q$  est alors  $CU$ .

Supposons qu'à un moment donné, la charge sur le condensateur soit  $q'$ . La différence de potentiel est  $U' = \frac{q'}{C}$ . Si nous rajoutons une charge  $dq'$ , la travail additionnel  $dW$  est

$$dW = U' dq' = \frac{q'}{C} dq'$$

Le travail total pour charger le condensateur à la charge  $q$  est

$$W = \frac{1}{C} \int_0^q q' dq' = \frac{q^2}{2C} = \frac{1}{2} CU^2$$

Prenons maintenant un condensateur plan de surface  $S_C$  et de largeur  $d$ .

$$W = \frac{1}{2} Cu^2 = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 S_C}{d} E^2 d^2 = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 S_C d$$

$$W = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 V$$

où  $V$  est le volume du condensateur. La quantité  $e_E = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$  est la **densité d'énergie électrique**.

### 5.6.5 Capacité avec un diélectrique

Au début du XIX<sup>e</sup> siècle, Faraday avait constaté que, si des substances isolantes (appelées **diélectriques**) sont placées dans l'espace vide entre les surfaces conductrices d'un condensateur, la capacité du condensateur augmente par rapport à sa valeur dans l'air. Alors

$$C_{diel} = \varepsilon_r C_{air}$$

si le diélectrique remplit tout le condensateur.  $\varepsilon_r$  est une constante liée au matériau, et est sans dimension. On l'appelle **constante diélectrique relative**.  $\varepsilon_r$  est plus grand que 1.

#### Interprétation physique de cette observation

Si nous utilisons une batterie dont la différence de potentiel est  $U$  pour charger le condensateur, alors

- sans le diélectrique, la charge  $q$  sur un conducteur est

$$q = C_{air}U$$

- avec le diélectrique, la charge est  $q'$  :

$$q' = C_{diel}U > q$$

car  $C_{diel} > C_{air}$ .

Si nous chargeons le condensateur à la charge  $q$  *sans le diélectrique*, la tension  $U$  à ses bornes est

$$U = U_{air} = \frac{q}{C_{air}}$$

*Déconnectons la batterie, et introduisons dans le condensateur un matériau diélectrique de constante diélectrique  $\varepsilon_r$ .* La charge  $q$  est la même car le condensateur n'est connecté à aucune batterie!. Alors :

$$U_{diel} = \frac{U_{air}}{\varepsilon_r} < U_{air}$$

De même, le champ électrique dans le diélectrique est

$$E = \frac{E_0}{\varepsilon_r}$$

Dans ce cas, que se passe-t-il avec l'énergie ? Lorsque le condensateur n'a pas de diélectrique, il a stocké

$$W_{air} = \frac{1}{2}C_{air}U_{air}^2 = \frac{q^2}{2C_{air}}$$

Comme la batterie est déconnectée, l'introduction du diélectrique ne peut pas modifier  $q$ .

$$W_{diel} = \frac{q^2}{2C_{air}\epsilon_r} < W_{air}$$

Où est donc passé  $(W_{air} - W_{diel})$ ? L'expérimentateur qui tient le diélectrique sent que **le condensateur attire le diélectrique et lui transfère cette énergie**.

Une image simple de ce qui se passe dans le diélectrique peut être décrite ainsi :

- En l'absence de champ  $\mathbf{E}$ , il n'y a pas de charge nette en tout point du diélectrique.
- Lorsque le diélectrique est dans le champ  $\mathbf{E}_0$ , il y a une séparation de charge dans le diélectrique (figure 5.19).
- A la surface du diélectrique, nous avons une densité de charge de surface, ce qui crée le champ  $\mathbf{E}_p$  opposé à  $\mathbf{E}_0$  (figure 5.20).
- La résultante  $\mathbf{E}_{tot} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_p$  a une amplitude inférieure à  $\mathbf{E}_0$ , ce dernier étant le champ dans le condensateur en l'absence du diélectrique.

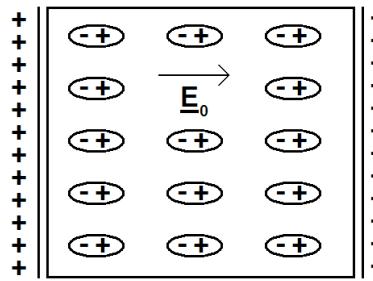


FIGURE 5.19 – Séparation de charge

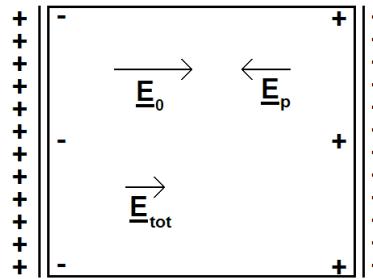


FIGURE 5.20 – Champ  $\mathbf{E}$  dans un condensateur avec diélectrique

### Définition de la constante diélectrique d'un diélectrique

La capacité d'un condensateur avec de l'air s'écrit d'une manière générale

$$C_{air} = \epsilon_0 f(\text{dimensions du condensateur})$$

où  $f$  a la dimension d'une longueur, car  $[C_{air}] = \text{Farad}$  et  $[\varepsilon_0] = \text{Farad} \cdot \text{m}^{-1}$

Si le condensateur est rempli de diélectrique, nous avons

$$C_{diel} = \varepsilon_0 \varepsilon_r f (\text{dimensions du condensateur})$$

$\varepsilon_0 \varepsilon_r$  a la même dimension que  $\varepsilon_0$ . On appelle  $\varepsilon_0 \varepsilon_r$  la **constante diélectrique** du milieu diélectrique concerné.  $\varepsilon_r$  vaut 1.006 pour l'air, entre 2 et 4 pour les isolants usuels, 4 à 6 pour le verre, 80 pour l'eau.

### Loi de Gauss en présence de diélectrique

Considérons un condensateur rempli d'air (figure 5.21, dessin de gauche). Nous y introduisons un diélectrique (figure 5.21, dessin de droite). Nous avons donc les charges  $+q$  et  $-q$  sur les plaques conductrices du condensateur, et les charges induites  $-q'$  et  $+q'$  à la surface du diélectrique.

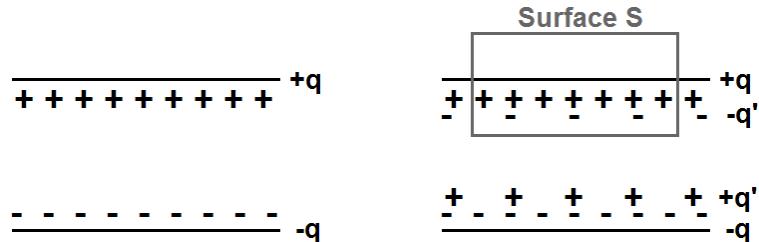


FIGURE 5.21 – Condensateur avec un diélectrique

Appliquons la loi de Gauss sur la surface  $S$ .

$$\varepsilon_0 \int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \text{somme des charges}$$

$\mathbf{E}$  est le champ électrique dans le diélectrique (dans l'exemple précédent de la figure 5.20, il s'agit de  $\mathbf{E}_{tot}$ ). Soit  $S_0$  la surface du condensateur.

$$\varepsilon_0 E S_0 = q - q'$$

$$E = \frac{q - q'}{\varepsilon_0 S_0}$$

$E$  est aussi le champ dans le diélectrique  $E_{diel}$ .

Nous avons ici un problème : nous ne savons pas calculer  $q'$ . Nous pouvons résoudre ce problème en nous rappelant que, par rapport au condensateur sans le diélectrique, nous avons

$$E_{diel} = \frac{E_0}{\varepsilon_r} = \frac{q}{\varepsilon_0 \varepsilon_r S_0} = E$$

Nous en tirons

$$\frac{q - q'}{\varepsilon_0} = \frac{q}{\varepsilon_0 \varepsilon_r}$$

et donc

$$\varepsilon_0 \varepsilon_r \int_S E dS = q$$

Notez que le membre de droite est la charge  $q$  sur les plaques conductrices du condensateur, et non pas la différence  $q - q'$ .

Dans la littérature (que nous n'adopterons pas), les charges  $q$  sont appelées **charges libres** car elles sont libres de bouger lorsque nous changeons le potentiel de la plaque conductrice. Par contre, les charges induites sur la surface du diélectrique sont liées, car elles ne peuvent pas bouger de la surface.

### 5.6.6 Equation de Laplace, équation de Poisson

Rappelons la forme différentielle de l'équation de Gauss :

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho_{el}}{\varepsilon_0}$$

Cette équation est appelée équation de Poisson. Avec la définition du potentiel  $\Phi$ , l'équation de Poisson devient

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\nabla \Phi) &= -\frac{\rho_{el}}{\varepsilon_0} \\ \nabla^2 \Phi &= -\frac{\rho_{el}}{\varepsilon_0} \end{aligned}$$

L'équation de Poisson signifie que la divergence de  $\mathbf{E}$  (ou le laplacien du potentiel) évaluée en un point  $\mathbf{r}_0$  dans l'espace est égale à  $\rho_{el}(\mathbf{r}_0)/\varepsilon_0$  (ou  $-\rho_{el}(\mathbf{r}_0)/\varepsilon_0$ ). En particulier, si  $\rho(\mathbf{r})$  est seulement non nul dans une partie de l'espace, dans la partie de l'espace où  $\rho_{el}(\mathbf{r}) = 0$ , nous avons :

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$$

ou

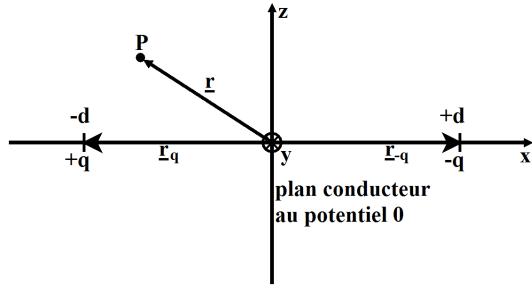
$$\nabla^2 \Phi = 0 \tag{5.3}$$

L'équation (5.3) est appelée **équation de Laplace**. Les grands problèmes de l'électrostatique consistent en la résolution de l'équation de Poisson ou de Laplace avec des conditions aux limites. Nous allons discuter quelques exemples.

### Méthode des images

Soit l'espace vide. Nous avons un plan conducteur dont le potentiel est nul (figure 5.22).

Une charge  $+q$  est placée à une distance  $d$  du plan. Nous voulons calculer le potentiel dans la région de l'espace contenant  $q$ .

FIGURE 5.22 – Plan conducteur en  $x = 0$ 

Prenons le système de coordonnées indiqué sur la figure 5.22. Les coordonnées de  $q$  sont

$$\mathbf{r}_q = (-d, 0, 0)$$

On nous demande de calculer  $\Phi(P) = \Phi(\mathbf{r})$  avec les conditions suivantes :

- En  $\mathbf{r}_q$  nous avons une charge  $+q$ .
- Le plan  $x = 0$  est un conducteur avec  $\Phi(0, y, z) = 0$ .

Le potentiel  $\Phi(\mathbf{r})$  de la charge  $q$  est donné par

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \|\mathbf{r} - \mathbf{r}_q\|}$$

L'existence de la plaque conductrice en  $x = 0$  change la distribution du potentiel. En fait, elle nous conduit à imposer

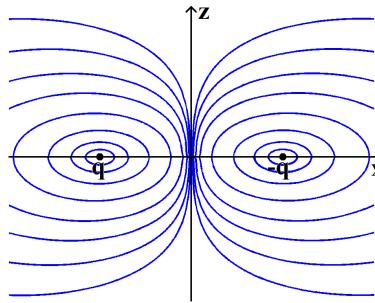
$$\Phi(x = 0, y, z) = 0$$

Une manière simple de satisfaire cette condition est d'imaginer qu'il y a une charge  $-q$  placée en  $\mathbf{r}_{-q} = (d, 0, 0)$ . En effet, la superposition des potentiels causés par  $q$  et  $-q$  est

$$\Phi_{tot} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \|\mathbf{r} - \mathbf{r}_q\|} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \|\mathbf{r} - \mathbf{r}_{-q}\|}$$

Nous voyons que  $\Phi_{tot}(0, y, z) = 0$ .

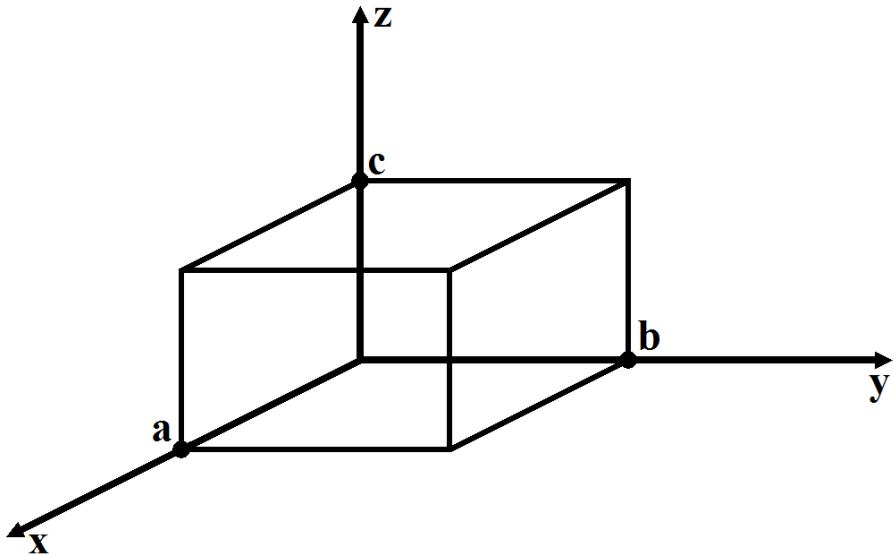
Nous avons résolu le problème en plaçant une charge image qui nous permet de satisfaire la condition aux limites. Les équipotentielles de  $\Phi_{tot}$  sont tracées sur la figure 5.23.

FIGURE 5.23 – Surfaces équipotentielles de  $\Phi_{tot}$ 

### Technique de séparation des variables

Nous devons souvent résoudre des problèmes décrits par l'équation de Laplace avec des conditions aux limites. Posons le problème : cherchez le potentiel dans tout l'espace avec les conditions aux limites suivantes :

- Sur un parallélépipède rectangle, 5 faces ont un potentiel 0 (toutes les faces sauf celle en  $z = c$  sont à 0).



- La face en  $z = c$  a le potentiel  $\Phi_0 = \text{cte}$ .
- Il n'y a aucune charge dans l'espace.

L'équation pour  $\Phi$  est donc l'équation de Laplace :

$$\nabla^2 \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0$$

avec les conditions aux limites précédentes.

Nous allons utiliser la technique dite de la séparation des variables. Nous supposons que

$$\Phi(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z)$$

L'équation de Laplace est alors

$$\frac{1}{X} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \frac{1}{Y} \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} + \frac{1}{Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = 0$$

Pour que cette équation soit vérifiée quels que soient  $x$ ,  $y$  et  $z$ , nous imposons

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{X} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = -\alpha^2 \\ \frac{1}{Y} \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} = -\beta^2 \\ \frac{1}{Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = \gamma^2 \\ \alpha^2 + \beta^2 = \gamma^2 \end{array} \right.$$

Posons  $\alpha^2 > 0$  et  $\beta^2 > 0$ .  $X$  et  $Y$  sont des fonctions trigonométriques en sinus et cosinus. Comme  $\Phi$  est nul en  $x = 0$ ,  $y = 0$  et  $z = 0$ , nous avons

$$\begin{aligned} X &\text{ selon } \sin(\alpha x) \\ Y &\text{ selon } \sin(\beta y) \\ Z &\text{ selon } \sinh(\gamma z) = \sinh\left(\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} z\right) \end{aligned}$$

Comme  $\Phi = 0$  en  $x = a$  et  $y = b$ , nous devons imposer

$$\alpha = \frac{n\pi}{a}, \quad n \text{ entier } = 1, 2, \dots$$

$$\beta = \frac{m\pi}{b}, \quad m \text{ entier } = 1, 2, \dots$$

La fonction  $\Phi$  s'exprime donc comme somme de  $\Phi_{n,m}$  :

$$\Phi_{n,m}(x, y, z) = A_{nm} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right) \sinh\left[\sqrt{\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2} z\right]$$

En effet,

- $\Phi_{n,m}(x, y, z)$  satisfait l'équation de Laplace,
- $\Phi_{n,m}(x, y, z)$  satisfait les conditions aux limites, exceptée celle sur la face  $z = c$ ,
- l'équation de Laplace est linéaire, la somme des  $\Phi_{n,m}$  est donc aussi solution de l'équation de Laplace et des conditions aux limites (exceptée celle sur la face  $z = c$ ).

Donc

$$\Phi(x, y, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A_{nm} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right) \sinh\left[\sqrt{\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2} z\right]$$

Imposons qu'en  $z = c$ ,  $\Phi(x, y)$  est prescrit :

$$\Phi_0 = \sum_{n,m=1}^{\infty} A_{nm} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right) \sinh\left[\sqrt{\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2} c\right]$$

Les coefficients  $A_{nm}$  sont les coefficients de Fourier.

$$A_{nm} = \frac{4}{ab \sinh\left[\pi \sqrt{\left(\frac{n}{a}\right)^2 + \left(\frac{m}{b}\right)^2} c\right]} \int_0^a dx \int_0^b dy \Phi_0 \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right)$$

## 5.7 Résumé des notions importantes

### Charge électrique $q$

Il existe des charges positives et négatives. L'unité de charge est le coulomb C. Il existe une charge élémentaire, celle que porte un électron, qui vaut  $1.6 \cdot 10^{-19}$  C.

- Les charges (avec leur signe) sont additives.
- Force entre deux charges  $q_1$  et  $q_2$  : loi de Coulomb.

### Champ électrique $\mathbf{E}(\mathbf{r})$

Dans l'espace, on dit qu'il y a un champ électrique  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  en un point  $\mathbf{r}$  si une charge  $q$  placée en  $\mathbf{r}$  subit une force  $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$ . L'unité de champ électrique est le volt/m  $\equiv$  V/m.

### Loi de Gauss, équation de Poisson

Soit une surface  $S$  fermée et entourant une volume  $V$ .

$$\int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho_{el} d^3r = \text{ somme des charges dans } V$$

où  $\rho_{el}(\mathbf{r})$  est la densité volumique de charge.

Par le théorème de la divergence, nous trouvons l'équation de Poisson, qui est une loi locale :

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho_{el}}{\varepsilon_0}$$

### Potentiel électrique

Le champ  $\mathbf{E}$ , en électrostatique, dérive d'un potentiel électrique  $\Phi(\mathbf{r})$  :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla\Phi$$

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

Le travail pour faire passer une charge  $q$  du potentiel  $\Phi_A$  au potentiel  $\Phi_B$  est  $q(\Phi_B - \Phi_A)$  et est indépendant du chemin suivi. L'unité de potentiel électrique est le volt V.

### Expression de l'équation de Poisson avec $\Phi$

$$-\nabla^2\Phi = \frac{\rho_{el}}{\varepsilon_0}$$

Expression du laplacien  $\nabla^2$  en coordonnées cartésiennes :

$$\nabla^2 \equiv \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

### Champ $\mathbf{E}$ à l'interface

La composante tangentielle du champ électrique  $\mathbf{E}$  est continue à l'interface.

La composante normale du champ  $\mathbf{E}$  est discontinue :

$$[\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1] \cdot \mathbf{n} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

$\sigma$  = densité de charge de surface.

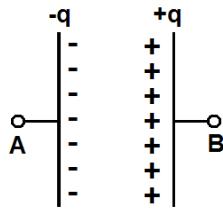


FIGURE 5.24 – Condensateur

### Condensateur

Un condensateur est un système formé de deux conducteurs portant une charge égale et de signe opposé.

$$\Phi_B - \Phi_A = U$$

$$q = CU$$

$C$  est la capacité du condensateur et  $q$  la charge sur une des plaques du condensateur. Un condensateur chargé avec un potentiel  $U$  emmagasine une énergie  $W = \frac{1}{2}CU^2$ .

### Unités

Grandeur	Unité
Charge	Coulomb $\equiv C = A \cdot s$
Potentiel	Volt $\equiv V = W \cdot A^{-1}$
Champ électrique	$V \cdot m^{-1}$
Capacité	Farad $\equiv F = C \cdot V^{-1}$
Charge de l'électron	$1.6 \cdot 10^{-19} C$
$\epsilon_0$	$8.854 \cdot 10^{-12} F \cdot m^{-1}$

TABLE 5.2 – Unités dans le système SI

Vous notez que nous utilisons des unités dérivées comme le volt, le farad et très rarement l'équivalent avec les unités SI. (Voir Annexe sur les unités électrique et magnétique).

# Chapitre 6

## Circuits électriques

### 6.1 Introduction

Jusqu'à maintenant, nous avons surtout considéré des problèmes où il y avait des charges "immobiles". Avant d'aborder la magnétostatique, nous devons introduire la notion de courant électrique, donc parler des circuits électriques. Nous pouvons bien sûr dire la chose suivante : le champ électrique  $\mathbf{E}$  crée une force  $\mathbf{F}$  sur des charges libres de se mouvoir. Ce sont ces charges en mouvement qui créent le courant  $I$ .

Définissons le courant. Tout d'abord supposons que dans le milieu (que nous appellerons un "**conducteur**") il y ait des charges qui peuvent se déplacer sans aucune "friction" (dans le langage électrique : sans aucune "résistance"). Soit  $S$  la section du conducteur,  $n$  le nombre de charge par unité de volume,  $q$  la charge électrique de ces charges, et  $\mathbf{v}_D$  la vitesse de chaque charge. Le courant  $I$  est défini par

$$I = n q v_D S$$

$$[I] = \frac{1}{m^3} C \frac{m}{s} m^2 = \frac{C}{s}$$

$n$  est de l'ordre de  $8 \times 10^{28}$  charges par  $m^3$  dans un conducteur et  $v_D$  de l'ordre  $10^{-3} m/s$ .

L'unité de courant dans le système *SI* est l'ampère,  $A$ . Le coulomb  $C$  est donc  $A \cdot s$  et est donc la quantité de charge apportée par un courant de  $1A$  pendant  $1s$ . On voit, d'après la définition du courant, que la charge  $q'$  derrière la surface  $S$  varie car  $I$  apporte des charges. Donc localement on peut dire

$$I = \frac{dq}{dt}$$

Nous pouvons aussi définir la densité de courant  $\mathbf{j}$  par

$$\mathbf{j} = n q \mathbf{v}_D$$

ou avec la densité de charge<sup>1</sup>  $\rho_{el}$

$$\mathbf{j} = \rho_{el} \mathbf{v}_D$$

$\mathbf{j}$  est donc un champ vectoriel  $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$ .

Une petite remarque amusante. Lorsque vous appuyez sur le bouton d'une sonnerie située à  $10^3$  m, vous savez que la sonnette sonne "immédiatement". Si vous voulez calculer le temps mis par un électron pour parcourir 1000 m vous trouvez 1 s ! En fait, la propagation du signal est donné par les ondes électromagnétiques (Chapitre 9). Ce ne sont pas les mêmes électrons mis en marche par le bouton et ceux qui actionnent la sonnette !

Nous adopterons dans ce chapitre une approche plus technique. Nous dirons que pour faire bouger les charges, il faut un appareil avec une **force électromotrice**. De tels appareils sont par exemple des piles, des accumulateurs, des piles à combustible et au laboratoire des alimentations. Ils produisent une force électromotrice (fém) entre deux bornes. Si nous connectons un tel appareil à un circuit (par exemple à une résistance), du courant circule.

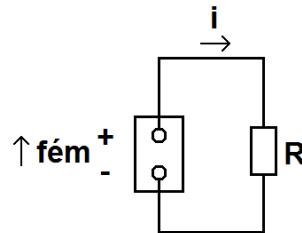


FIGURE 6.1 – Circuit avec fém

Par convention, le courant circule dans le circuit du pôle positif au pôle négatif. Dans l'appareil à fém, il circule du pôle négatif au pôle positif. Dans un conducteur, les charges sont des électrons. Les électrons circulent dans le sens opposé au sens du courant conventionnel  $I$ .

## 6.2 Définition de la fém

Un appareil à fém doit fournir du travail pour faire bouger les charges dans le circuit. La fém  $\varepsilon$  est définie comme le travail  $dW$  fourni pour une charge  $dq$ .

$$\varepsilon = \frac{dW}{dq}$$

---

1. Des fois, lorsqu'il n'y a aucune ambiguïté avec la densité de masse  $\rho$ , nous noterons  $\rho_{el} = \rho$ .

Remarquons que l'unité de  $\varepsilon$  est le volt. En effet,

$$[\varepsilon] = \frac{\text{N} \cdot \text{m}}{\text{A} \cdot \text{s}} = \frac{\text{kgm}^2}{\text{s}^2} \cdot \frac{1}{\text{As}} = \frac{\text{kgm}^2}{\text{As}^3} = \text{V}$$

La puissance  $dP$  correspondante est donc :

$$\frac{dW}{dt} = \frac{dW}{dq} \frac{dq}{dt} = \varepsilon \frac{dq}{dt} = \varepsilon I$$

Le produit du courant  $I$  par la fém est la puissance.

## 6.3 Éléments de circuit : résistance et condensateur

### 6.3.1 Résistance

Une résistance est un élément qui, lors du passage d'un courant  $I$ , développe à ses bornes une différence de potentiel proportionnelle à  $I$ .

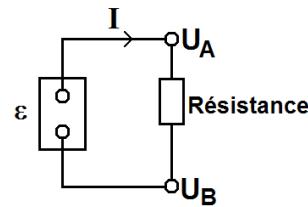


FIGURE 6.2 – Circuit avec résistance

$$U_A - U_B = RI \quad (6.1)$$

$$[\text{R}] = \text{Ohm} \equiv \Omega = \frac{\text{V}}{\text{A}}$$

L'équation (6.1) est appelée **loi d'Ohm**. Le coefficient de proportionnalité  $R$  est la résistance.  $R$  dépend du milieu considéré et des dimensions géométriques du corps.

Pour un corps de section  $S$  et de longueur  $l$ , la résistance  $R$  est donnée par

$$R = \rho \frac{l}{S}$$

$\rho$  est la **résistivité** électrique<sup>2</sup> et son unité est :

$$[\rho] = \Omega \cdot \text{m}$$

L'inverse de la résistivité ( $1/\rho$ ) est la **conductibilité** électrique  $\sigma$ . L'unité de  $\sigma$  est  $(\Omega \cdot \text{m})^{-1}$ .

Matériaux	$\sigma = 1/\rho$ [ $(\Omega \cdot \text{m})^{-1}$ ]
Cu	$5.8 \cdot 10^7$
Ag	$6.14 \cdot 10^7$
Acier	$(0.5 - 1) \cdot 10^7$
Eau distillée	$2 \cdot 10^{-4}$
Eau de mer	$3 - 5$
Quartz	$< 2 \cdot 10^{-17}$

TABLE 6.1 – Quelques conductibilités électriques

La puissance perdue par le passage du courant dans une résistance est

$$P = I(U_A - U_B) = RI^2$$

C'est l'effet Joule. Seuls les supraconducteurs ont une résistivité  $\rho = 0$ .

### 6.3.2 Appareil à fém idéal, appareil à fém réel

Dans un appareil à fém idéal, lorsque le circuit est fermé (c'est-à-dire lorsqu'un courant  $I$  circule), la fém  $\varepsilon$  mesurée est égale à celle mesurée lorsque  $I$  est nul (circuit ouvert).

Dans un appareil à fém réel, la fém  $\varepsilon'$  mesurée lorsqu'un courant circule est inférieure à celle mesurée  $\varepsilon$  lorsque  $I$  vaut 0. Cela est dû à la présence d'une résistance  $R_i$  (appelée résistance interne) à l'intérieur de l'appareil qui provoque une différence de potentiel à ses bornes.

$$\varepsilon' = \varepsilon - R_i I$$

---

2. Ne confondez pas la résistivité électrique  $\rho$  avec la densité de masse ou la densité de charge! Ni la conductibilité électrique  $\sigma = 1/\rho$  avec la densité de charge de surface! Le contexte vous indique la signification du symbole.

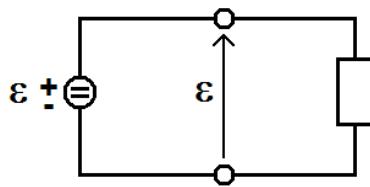
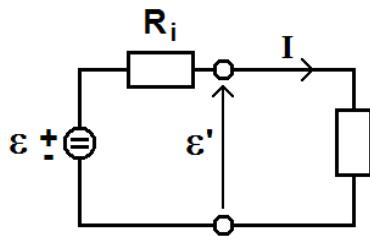


FIGURE 6.3 – Appareil à fém idéal

FIGURE 6.4 – Appareil à fém réel, avec la résistance interne  $R_i$ ,  $\varepsilon' = \varepsilon - R_i I$ .  $\varepsilon$  est la fém mesurée en circuit ouvert ( $I = 0$ ).  $\varepsilon'$  est la fém mesurée en circuit fermé.

La puissance transférée au circuit externe est

$$P = \varepsilon' I = (\varepsilon - R_i I) I = \varepsilon I - R_i I^2$$

Dans l'appareil à fém, la puissance  $R_i I^2$  est dissipée. Expérimentalement, vous constatez qu'une pile chauffe lorsque vous la court-circuitez, à cause de la puissance  $R_i I^2$  dissipée dans la pile.

### 6.3.3 Condensateur

Soit un condensateur de capacité  $C$ . Supposons qu'il ne soit pas chargé au moment où nous le connectons à un appareil à fém idéal. Cet appareil va le charger jusqu'à ce que la tension aux bornes du condensateur soit égale à  $\varepsilon$  (appareil à fém idéal).

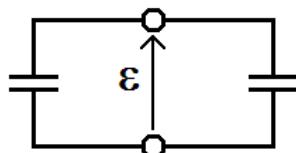


FIGURE 6.5 – Circuit avec condensateur

En pratique, nous ne faisons jamais un circuit avec uniquement un condensateur, mais plutôt des circuits comme dans 6.3.4.

### 6.3.4 Circuit RC

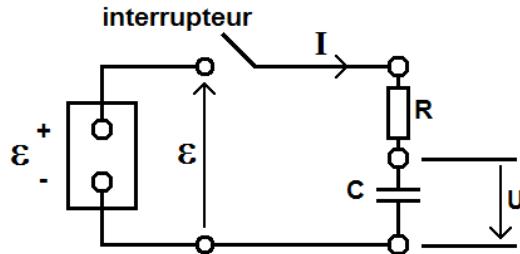


FIGURE 6.6 – Circuit RC

Au temps  $t = 0$ , nous fermons l'interrupteur. Avec la loi d'Ohm, et la tension aux bornes d'un condensateur donnée par  $q = CU$ , l'équation du circuit est

$$\varepsilon = RI + \frac{q}{C}$$

Or

$$I = \frac{dq}{dt}$$

D'où

$$\varepsilon = R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C}$$

C'est l'équation différentielle pour  $q(t)$ .

La technique utilisée pour résoudre cette équation est de :

a) Trouver une solution générale de l'équation différentielle sans second membre.

$$R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0$$

b) Trouver une solution particulière de l'équation différentielle avec second membre.

$$R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = \varepsilon$$

c) Trouver les constantes d'intégration à partir des conditions initiales.

Pour la première étape, nous avons

$$q = q_0 \exp \left\{ -\frac{t}{RC} \right\}$$

où  $q_0$  est une constante à déterminer avec la condition initiale.

Pour la deuxième étape :

$$q = \varepsilon C$$

est une solution particulière.

Donc

$$q(t) = q_0 \exp \left\{ -\frac{t}{RC} \right\} + \varepsilon C$$

À  $t = 0$ ,  $q(0) = 0$ . Donc  $q_0 = -\varepsilon C$ .

La solution générale pour  $q$  est

$$q = C\varepsilon \left[ 1 - \exp \left\{ -\frac{t}{RC} \right\} \right]$$

L'évolution temporelle du courant  $I$  est

$$I(t) = \frac{dq(t)}{dt} = \frac{\varepsilon}{R} \exp \left\{ -\frac{t}{RC} \right\}$$

$\tau = RC$  est appelée **constante de temps** du circuit RC. Après 5 fois la constante de temps, l'exponentielle  $e^{-5}$  vaut  $6.7 \times 10^{-3}$ , ce qui pratiquement est nul.

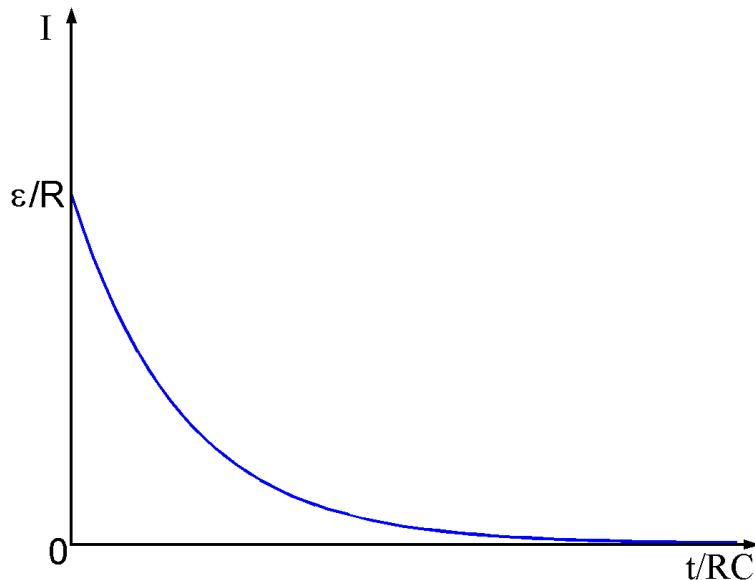


FIGURE 6.7 – Evolution du courant  $I$

Au début de la charge ( $t = 0$ ) du condensateur, ce dernier se comporte comme un court-circuit. Le courant est seulement limité par la résistance  $R$ . C'est pour cela que nous devons mettre une résistance en série avec le condensateur pour limiter le courant.

## 6.4 Lois de Kirchhoff

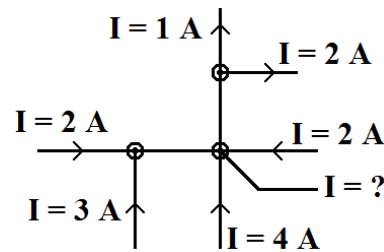
Dans la pratique, nous avons des circuits comportant plusieurs éléments en série ou en parallèle. Pour leur analyse, nous avons plusieurs règles importantes, connues sous le nom de **lois de Kirchhoff**.

### 6.4.1 Loi de Kirchhoff sur le courant

La somme des courants qui entrent en un point est égale à la somme des courants qui sortent de ce même point.

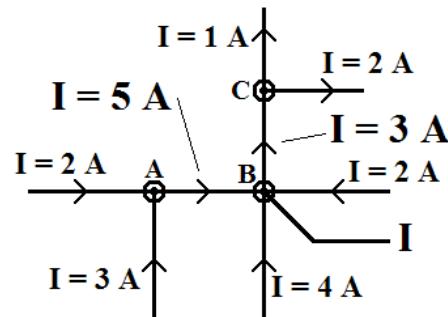
Cette loi exprime juste la conservation de la charge au point considéré. (Pourquoi ? Voyez-vous une analogue avec les circuits hydrauliques ?)

Considérez le circuit suivant :



Quel est le courant  $I$  dans la dernière branche, et dans quelle direction est ce courant ?

Ce circuit se ramène à



- a) Au point A, nous avons les courants de 2 A et 3 A qui entrent. Un courant de 5 A doit donc en sortir.
- b) Au point C, nous avons les courants de 2 A et 1 A qui sortent. Un courant de 3 A doit donc y entrer.

Finalement, au point B, les courants de 5 A (résultat a), 2 A et 4 A entrent, donc en tout 11 A. Pour le moment, seul un courant de 3 A sort du point B. Selon la règle de Kirchhoff, le courant  $I$  doit donc sortir du point B pour que l'on puisse avoir :

$$3 \text{ A} + I = 11 \text{ A}$$

$$I = 8 \text{ A}$$

Sur le schéma original,  $I$  vaut donc 8 A, et est dirigé vers la droite.

Notons que nous pouvons aussi résoudre le problème en prenant la convention suivante :

- les courants qui entrent sont comptés positivement,
- les courants qui sortent sont comptés négativement.

La règle de Kirchhoff impose que la somme algébrique des courants soit nulle. Au point B, nous avons donc :

$$2 \text{ A} + 5 \text{ A} + 4 \text{ A} - 3 \text{ A} + I = 0$$

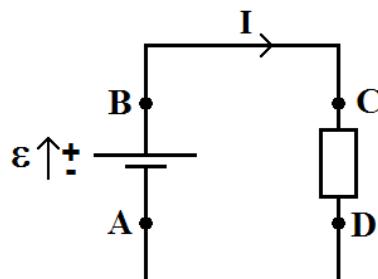
$$I = -8 \text{ A}$$

Le courant  $I$  cherché sort du point B.

#### 6.4.2 Loi de Kirchhoff sur la tension

Lorsque l'on suit un circuit sur un tour complet, la somme algébrique des tensions est nulle.

Soit le circuit



Le courant part de B, passe par C, puis D, et arrive à A. Partons du point A et faisons le tour du circuit dans le sens des aiguilles d'une montre. Nous avons donc :

$$V_B = \varepsilon > 0$$

$$V_B = V_C \text{ car le fil n'a pas de résistance}$$

On supposera toujours que les fils n'ont pas de résistance. S'ils en avaient on devrait en tenir compte en introduisant des résistances.

Le point D a un potentiel inférieur à celui en C, et sa valeur arithmétique est  $RI$ .

$$V_D = -RI$$

Finalement,  $V_D = V_A$ .

La loi de Kirchhoff pour la tension est donc

$$\varepsilon - RI = 0$$

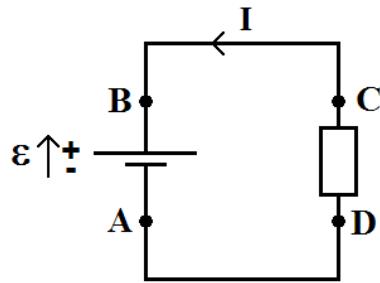
$$\varepsilon = RI$$

Essayons de tourner dans l'autre sens en partant de A. Le point C a un potentiel supérieur à celui de D, et vaut  $+RI$ . Le point A a un potentiel inférieur à celui du B, et a une valeur absolue de  $\varepsilon$  ( $\varepsilon > 0$ ).

$$-\varepsilon + RI = 0$$

$$\varepsilon = RI$$

Supposons finalement que nous avons indiqué le courant  $I$  dans l'autre sens :



Prenons le circuit partant de A dans le sens des aiguilles d'une montre. Le seul changement causé par notre "erreur" sur le sens de  $I$  est que le point D a un potentiel supérieur à celui de C, et vaut  $RI$ .

$$\varepsilon + RI = 0$$

$$RI = -\varepsilon$$

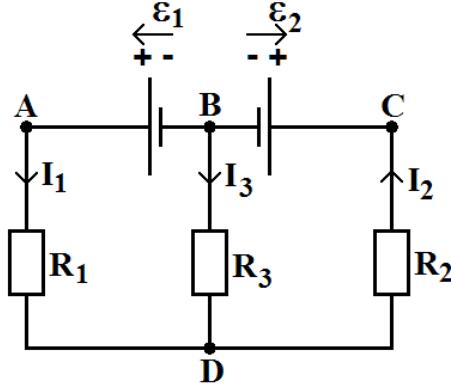
Et donc

$$I = -\frac{\varepsilon}{R}$$

L'interprétation est simplement que la physique nous dit qu'avec notre convention, le courant est opposé à ce que nous avons supposé. La physique fonctionne toujours !

### 6.4.3 Exemples

Essayons d'appliquer maintenant ces deux lois pour un circuit plus compliqué :



Connaissant  $\varepsilon_1$  et  $\varepsilon_2$ , cherchons les courants dans les trois résistances. Supposons que les courants ont les directions indiquées sur le schéma. La loi de Kirchhoff sur les courants nous donne au point B :

$$I_1 + I_3 = I_2$$

Appliquons la loi de Kirchhoff au circuit ADB :

$$-R_1 I_1 + R_3 I_3 + \varepsilon_1 = 0$$

Appliquons finalement la loi de Kirchhoff au circuit BDC :

$$-R_3 I_3 - R_2 I_2 - \varepsilon_2 = 0$$

Nous avons donc :

$$\left\{ \begin{array}{l} I_1 - I_2 + I_3 = 0 \\ -R_1 I_1 + R_3 I_3 = -\varepsilon_1 \\ R_2 I_2 + R_3 I_3 = -\varepsilon_2 \end{array} \right.$$

La résolution de ce système donne  $I_1$ ,  $I_2$  et  $I_3$ .

Notez que la loi de Kirchhoff sur la boucle ADC donne :

$$-R_1 I_1 - R_2 I_2 - \varepsilon_2 + \varepsilon_1 = 0$$

qui n'est autre que la somme des deux équations

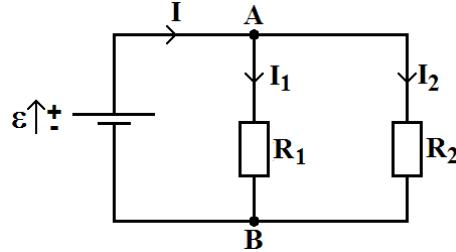
$$-R_1 I_1 + R_3 I_3 + \varepsilon_1 = 0$$

et

$$-R_3I_3 - R_2I_2 - \varepsilon_2 = 0$$

Ce n'est donc pas une nouvelle équation.

Comme deuxième exemple, prenons le cas de deux résistances en parallèle :



La loi de Kirchhoff sur les courants appliquée au point A donne la relation

$$I = I_1 + I_2$$

De plus, nous avons

$$R_1I_1 = R_2I_2 = \varepsilon$$

Donc

$$I_1 = \frac{\varepsilon}{R_1}, \quad I_2 = \frac{\varepsilon}{R_2}$$

Et le courant total est

$$I = \varepsilon \left[ \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right]$$

Vis-à-vis de l'appareil à fém, les deux résistances  $R_1$  et  $R_2$  peuvent être représentées par une résistance équivalente  $R_{equi}$  donnée par

$$\frac{1}{R_{equi}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

Si nous remplaçons  $R_1$  et  $R_2$  mises en parallèle par  $R_{equi}$ , l'appareil à fém débite le même courant  $I$ .

Rappelons finalement des résultats que vous avez vus au gymnase :

- Résistance équivalente à plusieurs résistances  $R_n$  en série :

$$R_{equi} = \sum_n R_n$$

- Condensateur équivalent à plusieurs condensateurs  $C_n$  en parallèle :

$$C_{equi} = \sum_n C_n$$

- Condensateur équivalent à plusieurs condensateurs  $C_n$  en série :

$$\frac{1}{C_{equi}} = \sum_n \frac{1}{C_n}$$

## 6.5 Résumé

Les points importants de ce chapitre sont les notions

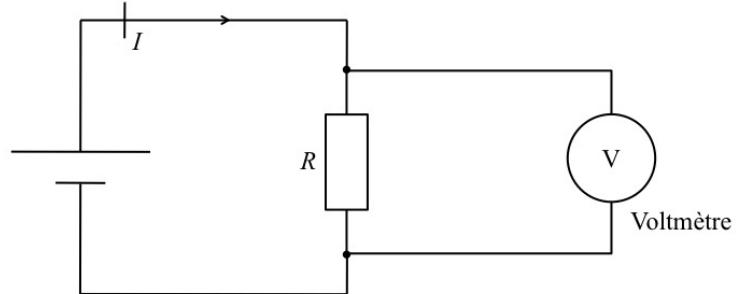
- de force électromotrice fém,
- des deux lois de Kirchhoff.

Pour l'étude des circuits eux-mêmes, nous avons montré comment calculer l'équation d'un circuit RC.

Finalement, nous avons rappelé les valeurs de résistance équivalente et de capacité équivalente pour le cas des résistances et condensateurs en série ou en parallèle.

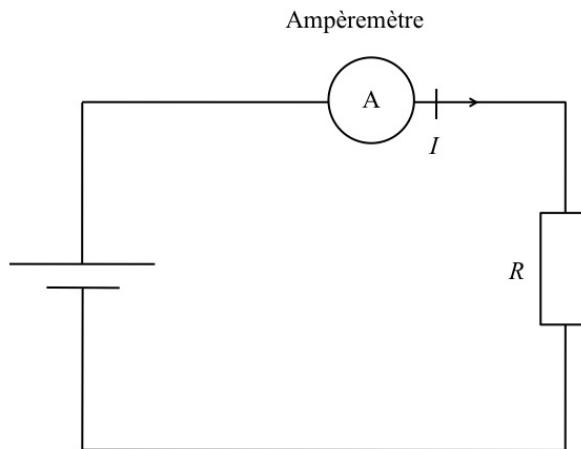
## 6.6 Appendice - Voltmètre et ampèremètre

Un voltmètre est un appareil qui permet de mesurer la différence de potentiel entre 2 points, par exemple aux bornes d'une résistance



Un voltmètre est placé en parallèle avec l'élément de circuit. Idéalement, le voltmètre ne devrait pas perturber le circuit : le courant  $I$  qui circule dans la résistance  $R$  ne devrait pas varier lorsque l'on branche le voltmètre. Ceci implique que la résistance interne du voltmètre soit très grande devant  $R$ . Nous dirons qu'un voltmètre idéal a une résistance interne infinie.

Un ampèremètre est un appareil qui permet de mesurer le courant qui traverse un circuit.



L'ampèremètre est placé en série dans le circuit. Idéalement, il ne devrait pas y avoir de chute de tension aux bornes de l'ampèremètre. Un ampèremètre idéal doit avoir une résistance interne nulle.

# Chapitre 7

## Magnétostatique

Nous nous proposons d'étudier maintenant les champs magnétiques. Notre expérience de tous les jours du magnétisme est celle du magnétisme créé par les aimants permanents. Nous savons que certains pôles des aimants s'attirent, tandis que d'autres se repoussent. Mais contrairement aux charges électriques, les aimants ont toujours deux pôles. **Il n'est pas possible d'isoler un seul pôle magnétique**, c'est-à-dire de charge magnétique isolée.

### 7.1 Définition du champ magnétique $\mathbf{B}$

Nous disons qu'il existe dans l'espace un champ magnétique  $\mathbf{B}(\mathbf{r})$  si une particule de charge  $q$  et de vitesse  $\mathbf{v}$  subit une force  $\mathbf{F}$  égale à

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}) \quad (7.1)$$

où  $\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}$  est le produit vectoriel de  $\mathbf{v}$  et  $\mathbf{B}$ . Dans l'équation (9.24), la force  $\mathbf{F}$  est la **force de Lorentz**. L'unité du champ  $\mathbf{B}$  est le Tesla :

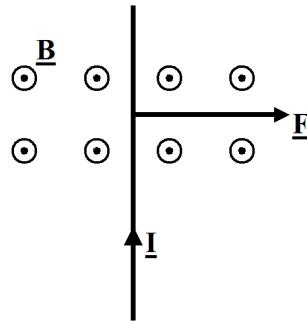
$$[\mathbf{B}] = \text{T} = \frac{\text{N s}}{\text{C m}} = \frac{\text{kgm s}}{\text{s}^2 \text{As m}} = \frac{\text{kg}}{\text{As}^2}$$

Le tableau 7.1 donne quelques valeurs typiques de champs  $\mathbf{B}$ .

On emploie aussi le gauss comme unité. 1 gauss vaut  $10^{-4}$  tesla. Le champ magnétique terrestre vaut 0.5 gauss.

Comment pouvons-nous utiliser cette définition ? Supposons que nous avons une région dans l'espace où il existe un champ  $\mathbf{B}$ . Mettons dans cette région un fil de cuivre qui porte un courant  $I$ . Le champ  $\mathbf{B}$  va donner lieu à une force  $\mathbf{F}$  comme indiqué sur la figure 7.1.

Milieu	$\mathbf{B}$ [T]
Champ magnétique terrestre	$0.5 \cdot 10^{-4}$
Champ magnétique d'appareil à imagerie	1
Espace interstellaire	$10^{-10}$
Surface d'une étoile à neutrons	$10^8$

TABLE 7.1 – Champ  $\mathbf{B}$  dans divers milieuxFIGURE 7.1 – Fil portant un courant  $I$  dans un champ  $\mathbf{B}$ . Ce champ pointe hors de la feuille.

L'origine de cette force  $\mathbf{F}$  n'est autre que la force de Lorentz agissant sur les électrons qui portent le courant  $I$  dans le fil, et qui possèdent donc une vitesse  $\mathbf{v}_D$  dirigée à l'opposé de  $I$  (la vitesse  $\mathbf{v}_D$  est dirigée à l'opposé du sens conventionnel du courant  $I$ ). La force  $d\mathbf{F}$  agissant sur une longueur  $dl$  du fil électrique est donc :

$$d\mathbf{F} = I dl \wedge \mathbf{B}$$

Comme pour le champ électrique  $\mathbf{E}$ , nous pouvons définir les lignes de champ magnétique. Ce sont des lignes qui sont tangentes en tout point à  $\mathbf{B}$ .

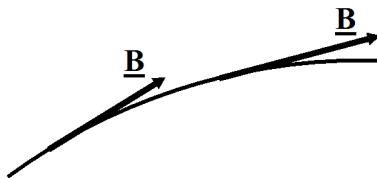


FIGURE 7.2 – Lignes de champ magnétique

## 7.2 Couple agissant sur une boucle de courant

Soit une boucle rectangulaire ABCD portant un courant  $I$ . La boucle peut pivoter autour de l'axe OO' (figure 7.3).

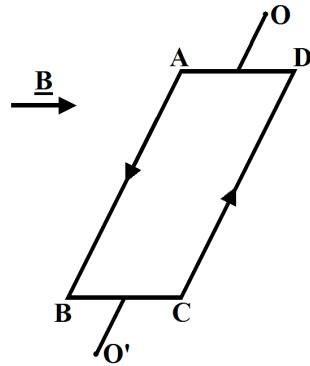


FIGURE 7.3 – Boucle de courant dans un champ magnétique

Nous plaçons les côtés AB et CD perpendiculairement au champ  $\mathbf{B}$ , qui rentre dans la feuille (figure 7.4).

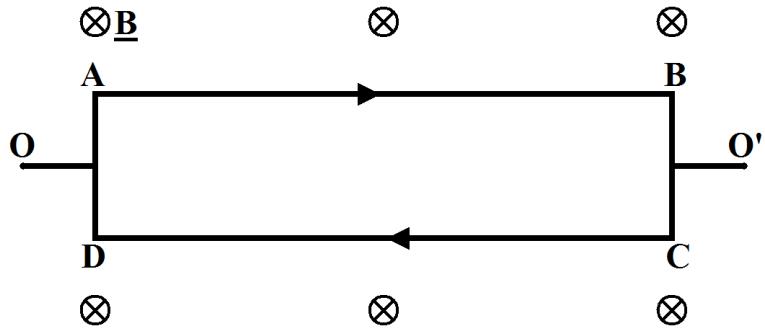


FIGURE 7.4 – Boucle de courant : AB et CD perpendiculaires à  $\mathbf{B}$

Les côtés BC et DA ne sont pas perpendiculaires au champ  $\mathbf{B}$ . Soit  $\theta$  l'angle entre la normale de la boucle et le champ  $\mathbf{B}$  (figure 7.5).

Les forces agissant sur les côtés BC et AD sont égales et opposées. Elles valent :

$$B \times I \times \overline{BC} \times \sin(90^\circ - \theta) = B \times I \times \overline{BC} \times \cos \theta$$

$$B \times I \times \overline{BC} \sin(90^\circ - \theta) = B \times I \times \overline{BC} \cos(\theta)$$

$\overline{BC}$  est la longueur du segment BC. Comme ces forces sont colinéaires avec OO', elles n'exercent aucun couple.

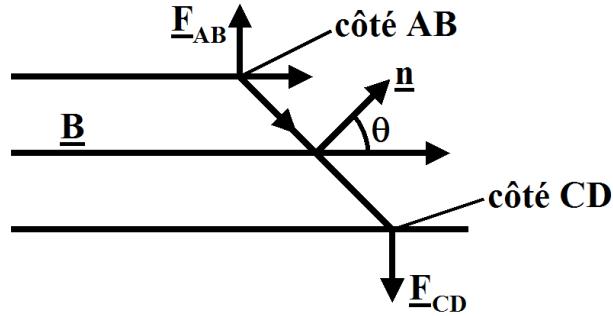


FIGURE 7.5 – Boucle de courant : vue de côté

Considérons maintenant les forces agissant sur AB et CD. De nouveau, elles sont égales et opposées :

$$\mathbf{F}_{AB} = -\mathbf{F}_{CD}$$

$$F_{AB} = F_{CD} = BI\overline{AB}$$

Elles génèrent un couple qui tend à aligner la normale **n** de la boucle parallèlement au champ **B**.

### 7.3 Champ magnétique crée par un conducteur

Montrons d'abord qu'un conducteur parcouru par un courant crée un champ magnétique. Pour cela, considérons l'expérience suivante : soit un fil portant un courant *I*. Mettons près de lui un deuxième fil, parallèle au premier, qui porte un courant *i* dans le même sens que *I* (figure 7.6). Nous remarquons que les deux fils s'attirent.

Cette expérience montre que le fil portant le courant *I* crée un champ magnétique qui est responsable de la force sur le fil qui porte le courant *i*. En effet, il suffit d'interpréter que le courant *i* est juste la manifestation des charges électriques qui se meuvent dans le conducteur. La force d'attraction est due à la force de Lorentz. Notons que si nous inversons le sens du courant *I* et maintenons celui de *i*, la force devient répulsive.

Expérimentalement, nous avons montré que :

- un conducteur portant un courant crée un champ magnétique,
- ce champ magnétique dépend de la direction du courant.

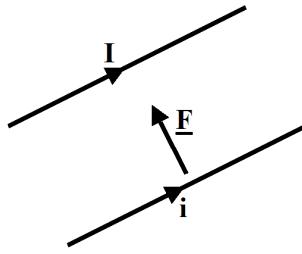
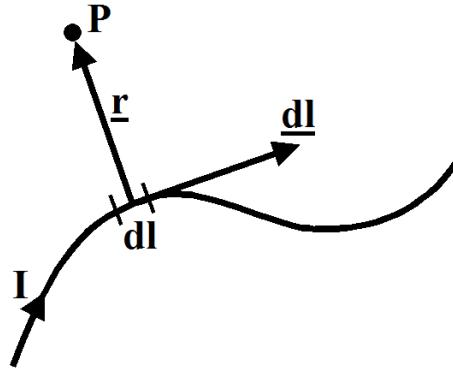


FIGURE 7.6 – Deux fils parcourus par des courants

### 7.3.1 Loi de Biot et Savart

Pour calculer le champ  $\mathbf{B}$  en un point  $P$ , considérons la situation suivante :



La contribution  $d\mathbf{B}$  au champ  $\mathbf{B}$  au point  $P$  est donnée (sans démonstration) par

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I dl \wedge \mathbf{r}}{r^3} \quad (7.2)$$

où  $dl$  est l'élément de longueur le long du conducteur et  $\mathbf{r}$  le vecteur reliant l'élément  $dl$  au point  $P$ .  $\mu_0$  vaut  $4\pi \cdot 10^{-7} \text{ TmA}^{-1}$  et est appelée **perméabilité du vide**<sup>1</sup>. En unité pratique, l'unité de  $\mu_0$  est appelé Henry/m ou H/m. Notez que  $(\epsilon_0 \mu_0)^{-1/2}$  est égal à la vitesse de la lumière  $c$  dans le vide<sup>2</sup>.

Le champ  $\mathbf{B}$  est obtenu par intégration sur toute la longueur du conducteur :

$$\mathbf{B}(P) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{dl \wedge \mathbf{r}}{r^3} \quad (7.3)$$

L'équation (7.3) est connue sous le nom de **loi de Biot et Savart**.

1.  $[\mu_0] = \frac{[B][r]}{[I]} = \frac{\text{Tm}}{\text{A}} = \frac{\text{kgm}}{\text{A}^2 \text{s}^2} = \frac{\text{Henry}}{\text{m}}$ . Le Henry (H) vaut donc  $\frac{\text{kgm}^2}{\text{A}^2 \text{s}^2}$ .  
 2.  $\frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = \frac{1}{\sqrt{4\pi \times 10^{-7} \times 8.8 \times 10^{-12}}} = 3 \times 10^3 \text{ m/s}$

### 7.3.2 Exemples

a) Champ créé par un conducteur rectiligne infini portant un courant  $I$

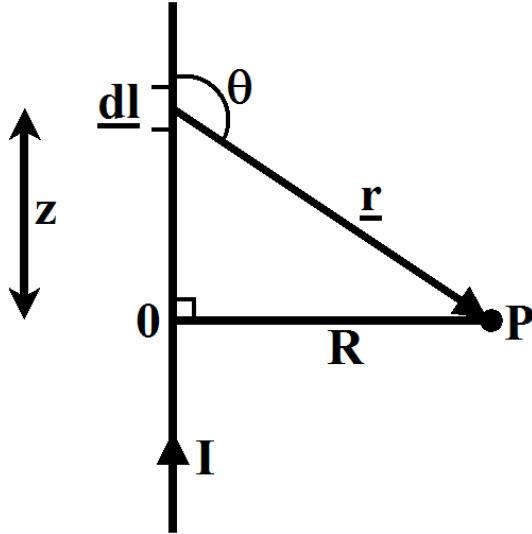


FIGURE 7.7 – Conducteur rectiligne portant un courant  $I$

D'après la figure 7.7, nous avons :

- $dl \wedge r$ , et donc  $d\mathbf{B}$ , est perpendiculaire à la feuille ;
- il nous suffit de calculer l'amplitude de  $d\mathbf{B}$ .

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dl \sin \theta}{r^2}$$

En notant la position de l'élément  $dl = dz$  par  $z$ , et la distance du point P à la droite par  $R$ , nous avons :

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dz \sin \theta}{(z^2 + R^2)}$$

Or

$$\sin \theta = \sin(\pi - \theta) = \frac{R}{(z^2 + R^2)^{1/2}}$$

Et donc

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{R dz}{(z^2 + R^2)^{3/2}}$$

$$B = \frac{\mu_0 I R}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{(z^2 + R^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 I R}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{dz}{(z^2 + R^2)^{3/2}}$$

En utilisant

$$\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{3/2}} = \frac{x}{a^2(x^2 + a^2)^{1/2}}$$

nous obtenons

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \frac{z}{(z^2 + R^2)^{1/2}} \Big|_0^\infty = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}$$

Le champ magnétique dû à un courant infini et rectiligne ne dépend que de la distance  $R$  du point  $P$  au conducteur. La direction est perpendiculaire au plan contenant le conducteur et le point  $P$ .

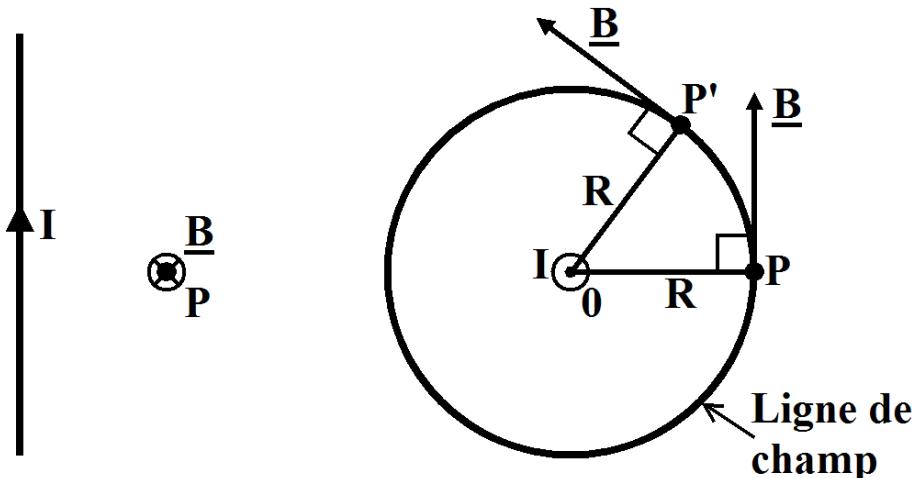


FIGURE 7.8 – Direction du champ  $\mathbf{B}$

Les lignes de champ magnétique (Cf 5.3.3 pour la définition des lignes de champ) correspondant sont des cercles situés dans le plan perpendiculaire au conducteur, et centrés à l'intersection du conducteur et du plan.

Le calcul du champ  $\mathbf{B}$  produit par un courant rectiligne nous permet de calculer la force entre deux conducteurs parallèles portant respectivement les courants  $I$  et  $i$  (figure 7.9).

Supposons que les deux courants  $I$  et  $i$  ont le même sens. Le champ  $\mathbf{B}$  créé par le fil conducteur 1 est perpendiculaire au plan formé par les deux conducteurs et "sort" de ce plan.

La force  $\mathbf{F}_{21}$  exercée par le conducteur 1 sur le conducteur 2 est :

$$\mathbf{F}_{21} = i \int d\mathbf{l} \wedge \mathbf{B}$$

où  $\mathbf{B}$  est le champ créé en  $d\mathbf{l}$  (sur le conducteur 2) par le conducteur 1.  $\mathbf{F}_{21}$  est attractive : deux conducteurs parcourus par des courants dans la même direction s'attirent.

D'après la loi de Biot et Savart,  $B$  vaut :

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi d}$$

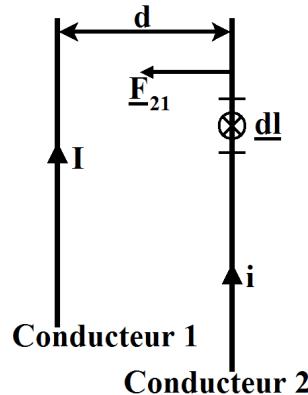


FIGURE 7.9 – Deux conducteurs portant deux courants différents

Comme  $dl$  et  $\mathbf{B}$  sont perpendiculaires,  $\mathbf{F}_{21}$  a comme amplitude

$$F_{21} = \frac{\mu_0 I i L}{2\pi d}$$

où  $L$  est la longueur d'intégration sur le conducteur.

b) Champ créé par une boucle de courant circulaire de rayon  $R$  le long de l'axe perpendiculaire à la boucle et passant par son centre

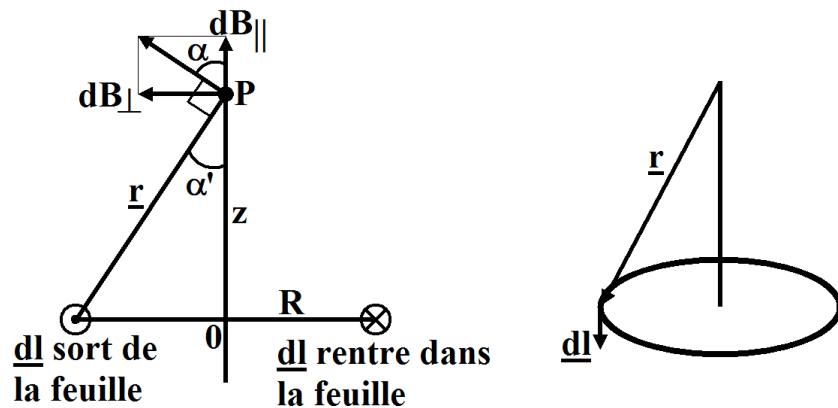


FIGURE 7.10 – Boucle de courant

Nous avons

$$\mathbf{dB} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\mathbf{dl} \wedge \mathbf{r}}{r^3}$$

Décomposons  $\mathbf{dB}$  en composantes selon OP (soit  $dB_{\parallel}$ ) et perpendiculaire, soit  $\mathbf{dB}_{\perp}$ . Par symétrie, l'élément  $\mathbf{dl}$  diamétralement opposé crée une composante  $\mathbf{dB}'_{\perp}$  opposée à  $\mathbf{dB}_{\perp}$ . Il ne reste que la composante  $dB_{\parallel}$ .

Calculons  $\mathbf{dl} \wedge \mathbf{r}$ . Notons que  $\mathbf{dl} \perp \mathbf{r}$  (voir figure 7.10). Donc

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dl}{r^2}$$

$$dB_{\parallel} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dl \cos \alpha}{r^2}$$

$$\cos \alpha = \cos \left( \frac{\pi}{2} - \alpha' \right) = \sin \alpha' = \frac{R}{r}$$

$$dB_{\parallel} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{R dl}{r^3} = \frac{\mu_0 I R}{4\pi (R^2 + z^2)^{3/2}} dl$$

$$B_{\parallel} = \int dB_{\parallel} = \frac{\mu_0 I R}{4\pi (R^2 + z^2)^{3/2}} \int dl$$

Or  $\int dl = 2\pi R$ . Donc

$$B_{\parallel} = \frac{\mu_0 I R^2}{2(R^2 + z^2)^{3/2}}$$

Pour de grandes valeurs de  $z$  ( $z \gg R$ ),  $B_{\parallel}$  vaut

$$B_{\parallel} = \frac{\mu_0 I R^2}{2z^3} = \frac{\mu_0 I \pi R^2}{2\pi z^3}$$

$B_{\parallel}$  varie comme  $1/z^3$ . La quantité  $\mu = I\pi R^2$  est appelée **moment magnétique dipolaire**.

$$B_{\parallel} = \frac{\mu_0}{2\pi z^3} \mu$$

## 7.4 Loi d'Ampère

### 7.4.1 Forme intégrale

Soit un contour  $C$  fermé qui entoure des conducteurs portant des courants  $I_m$  (figure 7.11).

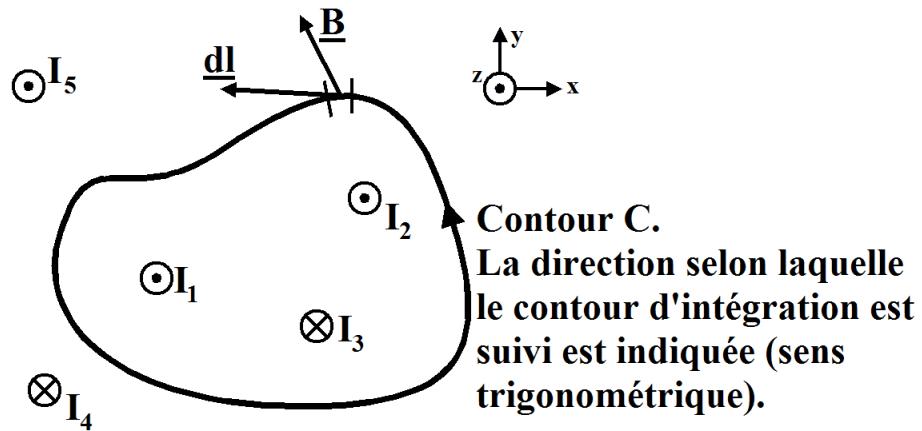


FIGURE 7.11 – Contour entourant des conducteurs

La loi d'Ampère s'écrit (sans démonstration)

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 (\text{somme des courants inclus dans } C)$$

L'intégration sur  $C$  se fait en suivant la direction marquée sur la figure 7.11. Dans le cas de cette figure :

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 (I_1 + I_2 - I_3)$$

Les courants  $I_4$  et  $I_5$  ne comptent pas car ils sont en dehors de  $C$ .

Plusieurs remarques doivent être faites ici :

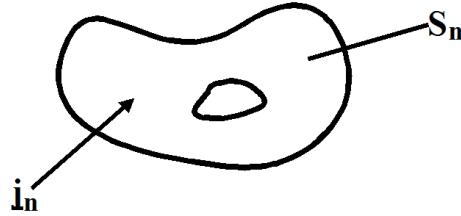
- Il est nécessaire de préciser le sens dans lequel l'intégration se fait.
- Les courants sont des quantités algébriques. Dans le cas particulier de l'exemple précédent,  $I_1$  et  $I_2$  sont positifs et  $I_3$  est négatif. Comment détermine-t-on le signe des courants ? Ce signe est lié au sens du parcours le long de  $C$ . Dans le cas de notre exemple, le sens du parcours d'intégration est le sens trigonométrique (système d'axes Oxyz droit). Les courants  $I_1$  et  $I_2$  sortent de la feuille et sont dans le même sens que  $\mathbf{e}_z$  : ils sont donc positifs.  $I_3$ , rentrant dans la feuille, est négatif.

Une autre manière pour déterminer le signe des courants est d'utiliser la main droite. Courbez votre main droite avec les quatre doigts selon le sens du parcours d'intégration. La direction du pouce tendu vers le haut correspond à la direction positive.

- Comme pour la loi de Gauss en électrostatique, la loi d'Ampère en toute généralité ne nous permet pas de calculer  $\mathbf{B}$ . Elle donne simplement la valeur de  $\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}$  le long d'un contour d'intégration  $C$  fermé.

### 7.4.2 Forme différentielle (ou locale)

Supposons que le conducteur  $n$  a une section  $S_n$  :



Nous pouvons écrire

$$I_n = \int_{S_n} \mathbf{j}_n \cdot d\mathbf{S}_n$$

où  $\mathbf{j}_n$  est la densité de courant<sup>3</sup> dans le conducteur  $n$ . Notez aussi que cette formule définit la notion de **densité de courant**. Notez aussi que la densité de courant est une quantité vectorielle.

En reprenant le cas précédent, nous pouvons donc écrire

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \left[ \int_{S_1} \mathbf{j}_1 \cdot d\mathbf{S}_1 + \int_{S_2} \mathbf{j}_2 \cdot d\mathbf{S}_2 + \int_{S_3} \mathbf{j}_3 \cdot d\mathbf{S}_3 \right]$$

Le fait que  $I_3$  est compté négativement se reflète dans la densité de courant  $\mathbf{j}_3$  qui est une quantité vectorielle, qui possède donc une direction.

Naturellement,  $S_1$ ,  $S_2$  et  $S_3$  sont totalement inclus dans  $S$  entourée par  $C$  (figure 7.12).

Avec la convention

$$\mathbf{j}_n = \begin{cases} \mathbf{j}_n & \text{dans } S_n \\ 0 & \text{hors de } S_n \end{cases}$$

nous pouvons récrire

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \left[ \int_S \mathbf{j}_1 \cdot d\mathbf{S} + \int_S \mathbf{j}_2 \cdot d\mathbf{S} + \int_S \mathbf{j}_3 \cdot d\mathbf{S} \right]$$

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \int_S \left( \sum_n \mathbf{j}_n \right) \cdot d\mathbf{S}$$

---

3.  $[j_n] = \frac{[I]}{[S]} = \frac{A}{m^2}$

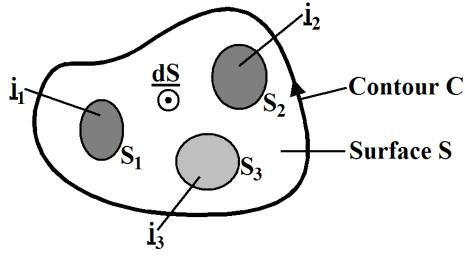


FIGURE 7.12 – Contour entourant des conducteurs

où la somme sur les  $\mathbf{j}_n$  inclut seulement les courants (ou les parties de courant) dans  $S$ .

Rappelons l'identité de Stokes (cf. Notations du cours) :

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \int_S (\nabla \wedge \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{S}$$

Donc

$$\int_S (\nabla \wedge \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{S} = \mu_0 \int_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S}$$

où nous avons désigné par  $\mathbf{j}$  la quantité  $\sum_n \mathbf{j}_n$ . Cette égalité devant être satisfaite quelle que soit la surface  $S$ , nous avons :

$$\nabla \wedge \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} \quad (7.4)$$

C'est la forme locale de la loi d'Ampère. Elle relie la densité de courant  $\mathbf{j}$  au rotationnel de  $\mathbf{B}$  au même point.

#### 7.4.3 Exemples d'utilisation de la loi d'Ampère

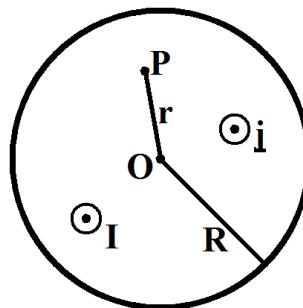


FIGURE 7.13 – Conducteur circulaire

Soit un conducteur circulaire infiniment long de rayon  $R$  (figure 7.13). Le courant  $I$  sort de la feuille et la densité de courant  $\mathbf{j}$  est uniforme à travers la section. Nous avons donc

$$I = \pi R^2 \|\mathbf{j}\|$$

Calculons  $\mathbf{B}$  au point  $P$  dans le conducteur.  $P$  se trouve à une distance  $r$  ( $r < R$ ) du centre du conducteur.

Le conducteur étant infiniment long, le champ  $\mathbf{B}$  est dans le plan perpendiculaire au conducteur. La symétrie du problème suggère d'utiliser un contour d'intégration pour la loi d'Ampère pris comme un cercle de centre  $O$  et de rayon  $r$ . Le sens d'intégration sera le sens trigonométrique.

La symétrie du problème indique que  $\mathbf{B}$  est tangent au cercle de centre  $O$  et de rayon  $r$  (essayez de vous en convaincre). Donc :

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = B 2\pi r$$

$$\mu_0 \int_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = \mu_0 j \pi r^2 = \frac{\mu_0 I \pi r^2}{\pi R^2} = \frac{\mu_0 I r^2}{R^2}$$

$$B 2\pi r = \oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \int_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = \frac{\mu_0 I r^2}{R^2}$$

Donc

$$B = \frac{\mu_0 I r}{2\pi R^2}$$

Le champ à l'intérieur du conducteur augmente linéairement avec le rayon.

Si le point  $P$  se trouve à l'extérieur du conducteur ( $r > R$ ), la même méthode conduit à

$$2\pi r B = \mu_0 I$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

A l'extérieur du conducteur,  $B$  décroît en  $\frac{1}{r}$ . A la surface du conducteur les deux expressions donnent la même valeur :

$$B(r = R) = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}$$

Nous avons dit que le champ  $\mathbf{B}$  est tangent au cercle de centre  $O$  et de rayon  $r$ . Vérifions que ce champ  $\mathbf{B}$  satisfait à la forme locale de la loi d'Ampère

$$\nabla \wedge \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$$

Dans le conducteur, au point P(x, y),

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I r}{2\pi R^2} \left( \frac{-y}{(x^2 + y^2)^{1/2}}, \frac{x}{(x^2 + y^2)^{1/2}}, 0 \right)$$

Avec  $r^2 = x^2 + y^2$ , nous avons

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi R^2} (-y, x, 0) = \frac{\mu_0 j}{2} (-y, x, 0)$$

Calculons  $\nabla \wedge \mathbf{B}$  :

$$\nabla \wedge \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -\frac{\mu_0 j}{2} y & \frac{\mu_0 j}{2} x & 0 \end{vmatrix} = \mathbf{e}_z \left( \frac{\mu_0 j}{2} + \frac{\mu_0 j}{2} \right) = \mathbf{e}_z \mu_0 j = \mu_0 \mathbf{j}$$

Donc  $\nabla \wedge \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$ .

Pour un point P en dehors du conducteur, nous avons

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \left( \frac{-y}{(x^2 + y^2)^{1/2}}, \frac{x}{(x^2 + y^2)^{1/2}}, 0 \right)$$

Avec  $r = (x^2 + y^2)^{1/2}$ , nous avons

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left( -\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2}, 0 \right)$$

Calculons  $\nabla \wedge \mathbf{B}$  :

$$\begin{aligned} \nabla \wedge \mathbf{B} &= \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{-y\mu_0 I}{2\pi(x^2 + y^2)} & \frac{x\mu_0 I}{2\pi(x^2 + y^2)} & 0 \end{vmatrix} \\ &= \mathbf{e}_z \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{x}{x^2 + y^2} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{y}{x^2 + y^2} \right) \right] \\ &= \mathbf{e}_z \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left[ \frac{x^2 + y^2 - 2x^2}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{x^2 + y^2 - 2y^2}{(x^2 + y^2)^2} \right] = 0 \end{aligned}$$

Et donc  $\nabla \wedge \mathbf{B} = 0$  pour un point P en dehors du conducteur. Notre résultat est conforme à la relation

$$\nabla \wedge \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$$

avec

$$\mathbf{j} = \begin{cases} \mathbf{j} & \text{pour } r < R \\ 0 & \text{pour } r > R \end{cases}$$

### Champ d'un solénoïde

Un solénoïde est formé de l'enroulement hélicoïdal d'un conducteur. Un solénoïde idéal

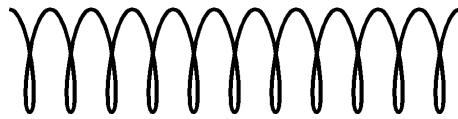


FIGURE 7.14 – Solénoïde

est un solénoïde infiniment long, et dont les enroulements sont serrés les uns contre les autres. Le champ à l'intérieur du solénoïde est uniforme et parallèle à l'axe du solénoïde. Le champ à l'extérieur d'un solénoïde idéal est nul. Calculons maintenant le champ magnétique à l'intérieur d'un solénoïde idéal. Prenons un parcours d'intégration  $C$  (figure 7.15).

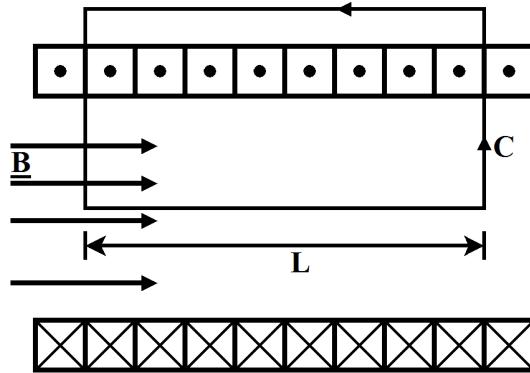


FIGURE 7.15 – Solénoïde idéal

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = BL = \mu_0 I n L$$

où  $n$  est le nombre de tours par unité de longueur et  $I$  le courant par tour. Nous avons donc :

$$B = \mu_0 n I$$

## 7.5 Valeur du flux $\int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$ sur une surface $S$ fermée

**Expérimentalement**, nous vérifions la loi

$$\int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

sur une surface fermée  $S$ . Par le théorème de la divergence,

$$\int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int_V (\nabla \cdot \mathbf{B}) d^3r$$

avec  $V$  le volume entouré par  $S$ , nous avons

$$\int_V (\nabla \cdot \mathbf{B}) d^3r = 0$$

Cette relation étant valable pour tout volume  $V$ , nous devons avoir

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

La relation

$$\int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

indique que le flux de  $\mathbf{B}$  à travers toute surface  $S$  fermée est nul. Le flux rentrant est égal au flux sortant. Pour mieux illustrer cette notion, prenons un tube fermé par des lignes de champ magnétique.

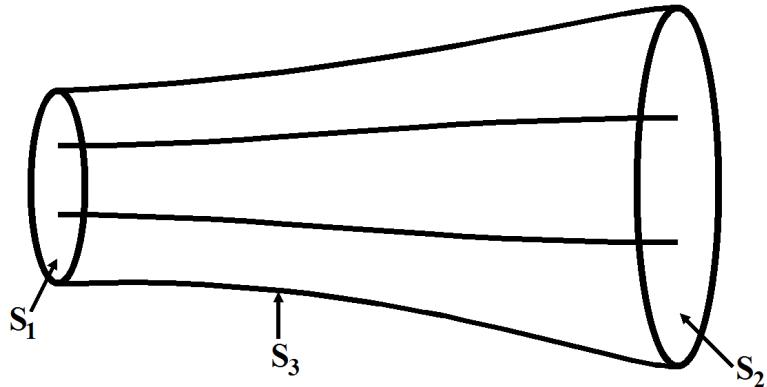


FIGURE 7.16 – Tube fermé par des lignes de champ magnétique

La surface  $S$  est prise comme celle formée par les deux faces  $S_1$  et  $S_2$  normales aux lignes de champ. La surface latérale est fermée par les lignes de champ qui forment l'extérieur du tube.

$$\int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0 = \int_{S_1} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} + \int_{S_2} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$$

car

$$\int_{S_3} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

dû au fait que, sur  $S_3$ ,  $\mathbf{B} \perp d\mathbf{S}$ .

Le flux rentrant  $|\int_{S_1} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}|$  est donc égal en valeur au flux sortant  $|\int_{S_2} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}|$ .

Nous avons ici une propriété importante du champ magnétique. Si nous prenons un petit tube formé de lignes de champ magnétique, le flux magnétique à travers une surface perpendiculaire aux lignes de champ est conservé. Si nous imaginons  $S_1$  très petit, nous dirons que toutes les lignes de champ qui rentrent dans  $S_1$  ressortent en  $S_2$ . **Les lignes de champ magnétique ne sont jamais interrompues !**

Plus précisément, si vous suivez une ligne de champ magnétique, vous avez deux possibilités :

- soit elle forme une courbe fermée,
- soit elle part de l'infini et retourne vers l'infini. En fait, dans ce cas, nous pouvons dire qu'elle se ferme à l'infini, ce qui nous ramène au cas précédent.

Une comparaison avec l'électrostatique nous aidera à mieux comprendre cette discussion sur les lignes de champ.

Electrostatique	Magnétostatique
Il existe une charge $q$	Pas de charge magnétique
$\varepsilon_0 \int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \text{somme des charges dans } V \text{ entouré par } S$	$\int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$
$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$	$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$

TABLE 7.2 – Comparaison entre électrostatique et magnétostatique

Prenons le cas de l'électrostatique avec une seule charge  $q$ .

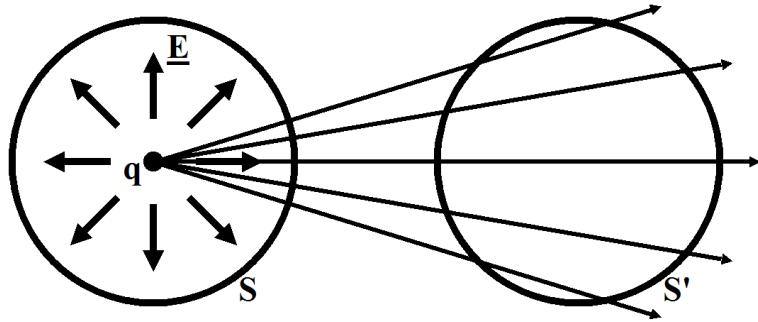


FIGURE 7.17 – Lignes de champ électrique

Les lignes de champ  $\mathbf{E}$  partent radialement à partir de  $q$ . Si nous intégrons sur une sphère  $S$  centrée sur  $q$ , le flux de  $\mathbf{E}$  à travers la sphère vaut

$$\int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{q}{\epsilon_0}$$

ce qui dénote simplement que les lignes de champ partent de  $q$  et "rayonnent" à partir de là.

Si maintenant nous intégrons sur une sphère  $S'$  non centrée sur  $q$ , les lignes de champ qui rentrent dans  $S'$  vont ressortir de  $S'$  de sorte que le flux soit nul :

$$\int_{S'} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

Ce qui différencie l'électrostatique de la magnétostatique, c'est que :

- en électrostatique, si nous suivons une ligne de champ, elle sera interrompue quelque part par une charge (la ligne part ou arrive sur une charge)
- en magnétostatique, une ligne de champ n'est jamais interrompue, et forme soit une boucle fermée, soit une ligne qui part de l'infini et va vers l'infini.

Les formes locales

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

et

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

montrent aussi la même différence. En électrostatique nous avons des charges  $q$  localisées en  $\mathbf{r}$ , nous pouvons donc définir  $\rho(\mathbf{r})$ .

L'équation  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$  n'exprime que le fait qu'il n'y a pas de charge magnétique au même sens que la charge électrique. Cette charge magnétique hypothétique, qui n'est pas montrée expérimentalement, serait le *monopôle magnétique*.

## Applications

### Lignes de champ d'une boucle de courant

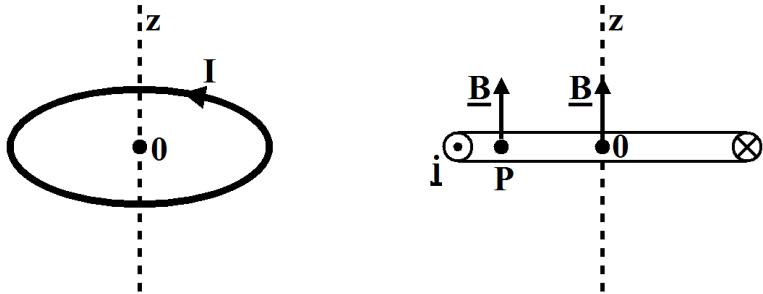


FIGURE 7.18 – Boucle de courant

Nous savons que le champ  $\mathbf{B}$  le long de l'axe Oz est parallèle à Oz. Par application de la loi de Biot et Savart, le champ  $\mathbf{B}$  en un point P situé dans le plan de la boucle est aussi dirigé le long de Oz.

En utilisant le fait que les lignes de champ sont soit fermées soit vont à l'infini, nous pouvons esquisser les lignes de champ d'une boucle de courant (figure 7.19).

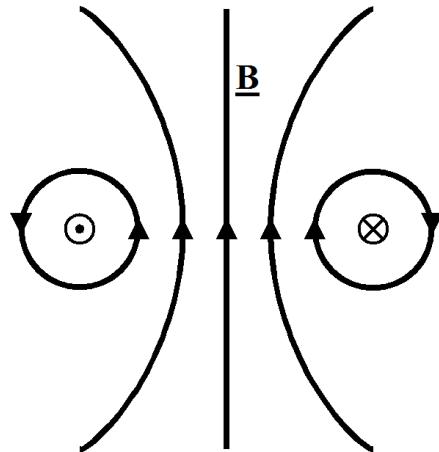


FIGURE 7.19 – Lignes de champ d'une boucle de courant

### Lignes de champ d'un solénoïde de longueur finie

Le solénoïde est formé de boucles juxtaposées. Le champ le long de l'axe des boucles est le long de l'axe du solénoïde : la ligne de champ correspondante est donc aussi dans l'axe du solénoïde.

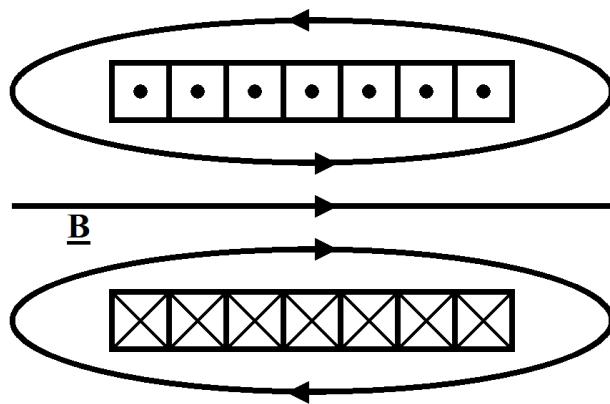


FIGURE 7.20 – Lignes de champ d'un solénoïde

Toutes les autres lignes de champ passent dans l'intérieur du solénoïde vers l'extérieur en se refermant. Comme toutes les lignes de champ se referment en passant par l'extérieur, nous avons

$$\int_{S_{int}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int_{S_{ext}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$$

où  $S_{int}$  est la surface intérieure du solénoïde et perpendiculaire à l'axe du solénoïde, et  $S_{ext}$  la surface (infinie) à l'extérieur du solénoïde et perpendiculaire à l'axe. Le champ à l'extérieur du solénoïde est donc beaucoup plus faible qu'à l'intérieur.

## 7.6 Equation de continuité

Rappelons l'équation d'Ampère sous sa forme locale :

$$\nabla \wedge \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$$

Calculons  $\nabla \cdot (\nabla \wedge \mathbf{B})$  :

$$\nabla \cdot (\nabla \wedge \mathbf{B}) = \mu_0 \nabla \cdot \mathbf{j}$$

Or  $\nabla \cdot (\nabla \wedge \mathbf{A}) = 0$  (identité vectorielle)<sup>4</sup>.

Nous avons donc

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = 0$$

4. Vous pouvez vous rappeler de cette identité

- soit en vous mémorisant : la divergence du rotationnel est nulle,
- soit en notant que nous avons formellement  $(\text{Vecteur } \nabla) \cdot (\text{Vecteur } \nabla) \wedge \mathbf{A} = 0$  (ceci est un “truc” mnémotechnique).

qui n'est autre que l'équation de continuité pour la densité de courant électrique dans le cas statique.

En effet, la densité de courant  $\mathbf{j}$  est

$$\mathbf{j} = ne\mathbf{v}_D$$

où  $n$  est le nombre d'électrons porteurs de charge (c'est-à-dire les électrons) par unité de volume et  $e$  la charge d'un électron,  $\mathbf{v}_D$  la vitesse des électrons. En écrivant  $\rho_{el} = ne$

$$\mathbf{j} = \rho_{el}\mathbf{v}_D$$

L'équation de continuité (cf. Dynamique des fluides) est

$$\frac{\partial \rho_{el}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_{el}\mathbf{v}_D) = \frac{\partial \rho_{el}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0$$

Comme nous considérons des phénomènes stationnaires,  $\frac{\partial}{\partial t} = 0$  et donc

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = 0$$

## 7.7 Relation à l'interface entre 2 milieux

(Voir le chapitre 5.6.3 pour le champ électrique.)

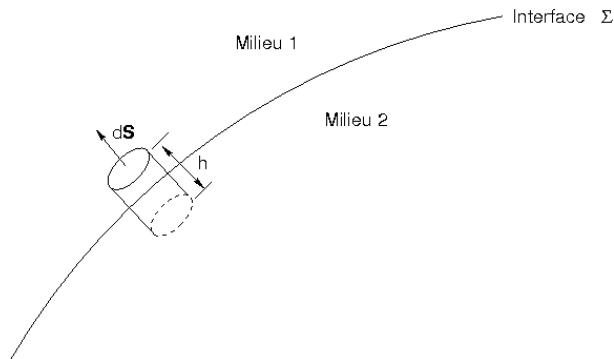
Rappelons les 2 équations

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$$

Considérons deux milieux séparés par une interface  $\Sigma$ .

L'équation  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$  montre qu'il n'y a pas de charge magnétique



Considérons un petit cylindre de hauteur  $h$  ( $h \rightarrow 0$ ) dont une moitié se trouve dans le milieu 1 et l'autre dans le milieu 2

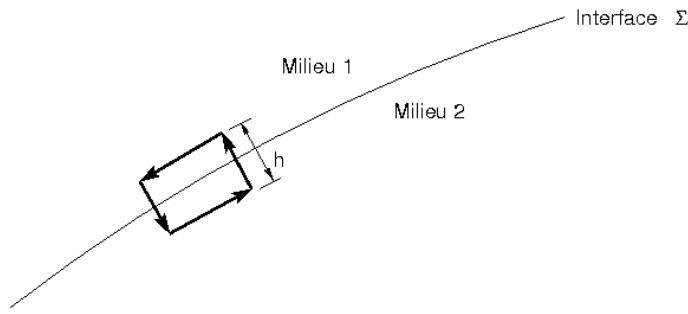
$$\int_S \text{du cylindre} \quad \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

Lorsque  $h$  tend vers 0, on a donc

$$\mathbf{B}|_{\text{selon la normale } d\mathbf{S} \text{ dans milieu 1}} = \mathbf{B}|_{\text{selon la normale } d\mathbf{S} \text{ dans milieu 2}}$$

Il y a donc toujours égalité des composantes normales de  $\mathbf{B}$  à travers l'interface.

Considérons maintenant le contour  $C$  (cf 5.6.3)



Nous ferons tendre  $h$  vers 0. Selon  $\nabla \cdot \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$ , nous avons

$$\oint_c \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \int \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S}$$

Donc  $\mathbf{B}_{\parallel 1} - \mathbf{B}_{\parallel 2} = \mu_0 \mathbf{j}_{surface}$

Il peut y avoir discontinuité de la composante parallèle de  $\mathbf{B}$ .

# Chapitre 8

## Phénomènes d'induction magnétique

### 8.1 Introduction

Lors de l'étude de l'électrostatique et de la magnétostatique, nous avons considéré que les sources des champs  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{B}$ , c'est-à-dire les charges, les courants, et les champs  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{B}$  eux-mêmes, ne dépendent pas du temps. Les lois que nous avons trouvées sont, sous forme intégrale :

$$\begin{aligned}\varepsilon_0 \int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} &= \text{Somme des charges dans } V \text{ entouré par } S \text{ (fermée)} \\ \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} &= 0 \\ \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} &= 0 \text{ (} S \text{ est fermée)} \\ \oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} &= \mu_0 [\text{Somme des courants traversant la surface entourée par } C]\end{aligned}$$

Sous forme locale, ces quatre lois sont :

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \nabla \wedge \mathbf{E} &= 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \wedge \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{j}\end{aligned}$$

où  $\rho$  est la densité (volumique) de charge électrique et  $\mathbf{j}$  la densité de courant.

Que se passe-t-il si nous introduisons maintenant la possibilité que les quantités physiques en jeu dans ces équations varient dans le temps ? C'est le but des chapitres suivants, qui vont se terminer avec la présentation des lois de l'électromagnétisme dues à Maxwell.

Ce chapitre sur l'induction discutera des relations entre les champs **E** et **B** lorsque le flux de **B** à travers une surface *S* donnée (surface qui sera définie le moment venu) varie dans le temps.

## 8.2 Présentation de quelques phénomènes expérimentaux

### Variation du flux du champ magnétique terrestre à travers une boucle circulaire

Nous savons que nous sommes immergés dans un champ magnétique terrestre **B<sub>T</sub>** qui peut être considéré comme constant dans l'expérience suivante (figure 8.1) :

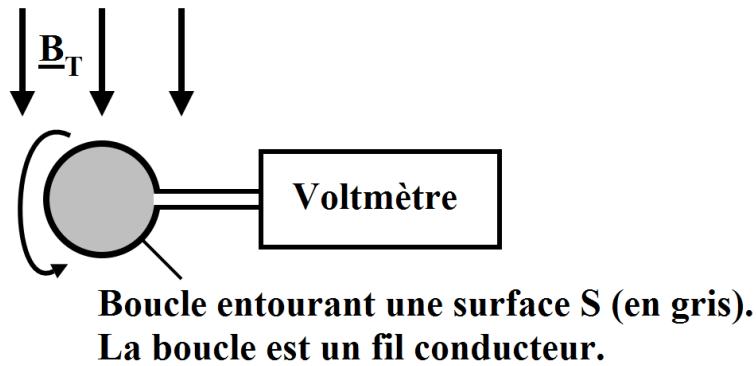


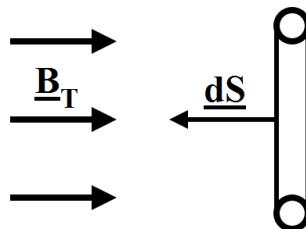
FIGURE 8.1 – Boucle circulaire dans le champ magnétique terrestre

Faisons tourner la boucle, de rayon *R*, comme si nous sautons à la corde. Nous avons successivement les situations suivantes :

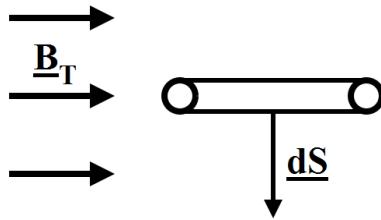
1) **dS** est dans la même direction que **B<sub>T</sub>** et de signe opposé.

$$\Phi = \int_S \mathbf{B}_T \cdot d\mathbf{S} = -\pi R^2 B_T$$

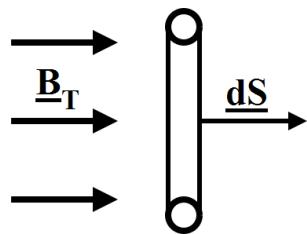
L'unité de  $\Phi$  est le Weber (Wb) égal à T·m<sup>2</sup>.



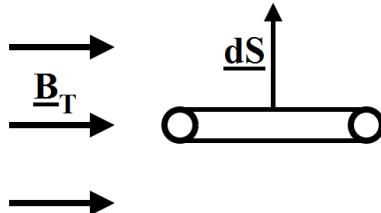
- 2) La boucle est parallèle à  $\mathbf{B}_T$  :  $\int_S \mathbf{B}_T \cdot d\mathbf{S} = 0$ .



- 3)  $\int_S \mathbf{B}_T \cdot d\mathbf{S} = \pi R^2 B_T$ .



- 4) La boucle est parallèle à  $\mathbf{B}_T$  :  $\int_S \mathbf{B}_T \cdot d\mathbf{S} = 0$ .



- 5) Nous revenons à la situation 1) :  $\int_S \mathbf{B}_T \cdot d\mathbf{S} = -\pi R^2 B_T$ .

Naturellement, nous passons à travers ces étapes d'une manière continue et la variation du flux magnétique  $\Phi$  est également continue entre  $-\pi R^2 B_T$  et  $\pi R^2 B_T$ .

Qu'observons-nous sur le voltmètre ?

**Première observation :** le fait de tourner la boucle engendre une différence de potentiel aux bornes de la boucle.

**Deuxième observation :** la différence de potentiel mesurée augmente avec la vitesse de rotation de la boucle.

Notons immédiatement que si nous observons une différence de potentiel aux bornes de la boucle, qui est conductrice, cela veut dire qu'il y a un champ électrique le long du conducteur et donc qu'il y a un courant qui circule.

### Interprétation de l'expérience

Cette expérience nous montre que lorsque le flux  $\Phi$  du champ magnétique à travers une surface  $S$  entourée par un conducteur varie temporellement, il apparaît une différence de potentiel aux bornes de la boucle. Pour utiliser la terminologie que nous avons introduite dans le chapitre sur les circuits électriques, nous disons que la variation temporelle du flux magnétique  $\Phi$  donne naissance à une force électromotrice  $\varepsilon$ .

Cette force électromotrice est liée à la variation temporelle du flux  $\Phi$ .

Le phénomène que nous venons d'observer est appelé **induction**. Le courant et la fém observés sont respectivement le courant induit et la fém induite.

### Critique de l'expérience

Cette expérience appelle plusieurs commentaires :

i) Que se passe-t-il si, au lieu d'avoir une surface  $S$  entourée par une boucle à un seul tour,  $S$  est entourée par une boucle à  $n$  tours serrés les uns contre les autres ? Une réalisation de cette expérience est assez simple et montre que la force électromotrice  $\varepsilon_n$  produite aux bornes d'une boucle à  $n$  tours est égale à  $n$  fois la force électromotrice  $\varepsilon_1$  produite aux bornes d'une boucle identique, mais à un seul tour.

$$\varepsilon_n = n\varepsilon_1$$

Le flux  $\Phi_n$  aux bornes d'une boucle à  $n$  tours serrés les uns contre les autres est aussi égal à  $n$  fois le flux à travers la boucle à un tour.

$$\Phi_n = n\Phi_1$$

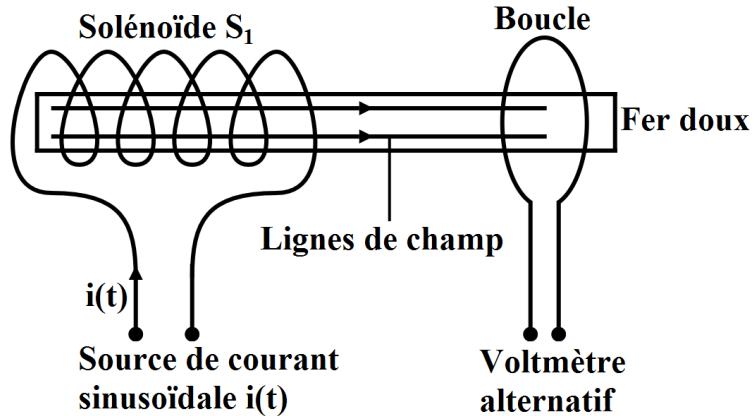
Donc, du point de vue pratique, si vous avez une boucle avec  $n$  tours, le flux magnétique est égal à  $n$  fois celui à travers une boucle à un seul tour.

ii) Nous avons obtenu que la fém induite  $\varepsilon$  est proportionnelle à la variation temporelle du flux  $\Phi$  en maintenant  $\mathbf{B}$  fixe et en changeant l'angle entre  $\mathbf{dS}$  et  $\mathbf{B}$ . Ce résultat est-il aussi valable si l'on garde constant l'angle entre  $\mathbf{dS}$  et  $\mathbf{B}$  et que l'on varie temporellement l'amplitude du champ  $\mathbf{B}$  ?

iii) Nous ne pouvons pas varier la direction du champ magnétique pour pouvoir vérifier la relation entre le signe de  $\varepsilon$  et celui de la variation de  $\Phi$ . Cette déficience ne peut pas être supprimée, car nous ne pouvons pas changer la direction du champ magnétique terrestre  $\mathbf{B}_T$ . Il faut concevoir une autre expérience !

**Réponse à la question ii)**

Considérons l'expérience suivante :



Le champ **B** dans le solénoïde  $S_1$  est créé par le passage d'un courant  $i(t)$  qui varie sinusoïdalement :

$$i(t) = I_0 \cos(\omega t)$$

Le champ  $\mathbf{B}(t)$  varie de la même manière. La barre de fer doux qui passe dans le solénoïde  $S_1$  et dans la boucle sert seulement à "canaliser" le champ **B** créé par  $S_1$  vers la boucle.

La variation du flux magnétique  $\Phi$  dans la boucle est maintenant causée par la variation du champ  $\mathbf{B}(t)$ , la boucle étant fixe. Nous observons, comme dans les autres expériences, l'apparition de courant et de fém induits dans la boucle.

Nous pouvons donc dire en toute généralité que le phénomène de l'induction et de l'apparition du courant et de la fém dépend seulement de la variation du flux magnétique  $\Phi$  à travers la surface  $S$  entourée par la boucle conductrice.

**Réponse à la question iii)**

Changeons le dispositif expérimental.

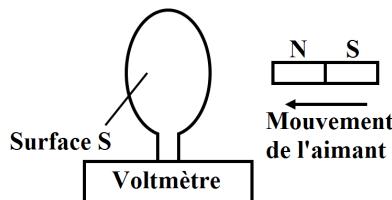
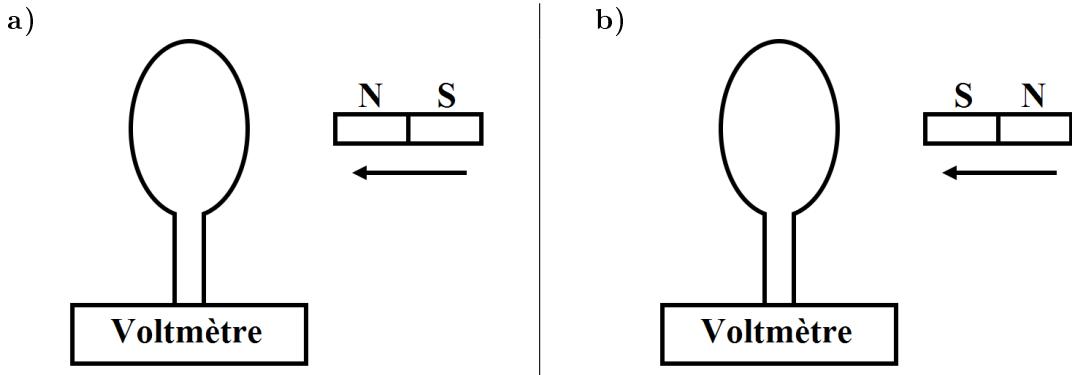


FIGURE 8.2 – Aimant permanent dans une boucle

Au lieu d'utiliser le champ magnétique terrestre, utilisons le champ  $\mathbf{B}$  créé par un aimant permanent que l'on approche et éloigne de la boucle (figure 8.2). Le flux à travers la surface  $S$  varie, car en bougeant l'aimant permanent par rapport à  $S$ , le champ  $\mathbf{B}$  sur la surface  $S$  varie, car le champ  $\mathbf{B}$  créé par l'aimant n'est pas uniforme dans l'espace.

L'expérience consiste à observer le signe de la fém  $\varepsilon$  indiquée par le voltmètre lorsque l'on inverse le sens de l'aimant permanent.



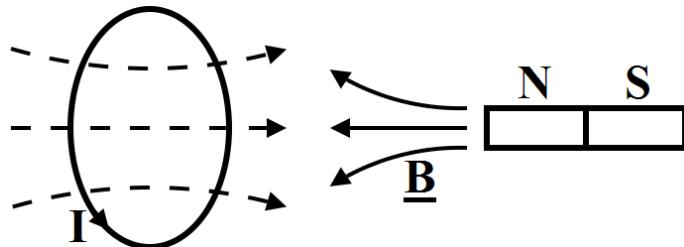
Le résultat expérimental est le suivant : pour une même vitesse de déplacement de l'aimant permanent vers la boucle, l'amplitude de la fém est la même dans les deux cas, mais le signe de la fém s'inverse.

### Interprétation

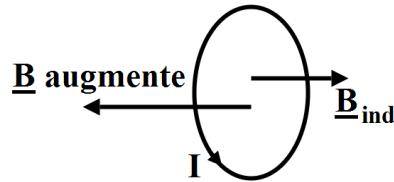
L'amplitude du champ  $\mathbf{B}$  à la surface  $S$  est la même dans les deux cas, seule sa direction a changé. Le mouvement de l'aimant étant le même, la variation de  $\Phi$  dans les deux cas est égale, mais de signe opposé.

Le signe de la fém  $\varepsilon$  dépend donc du signe de  $\Phi$ .

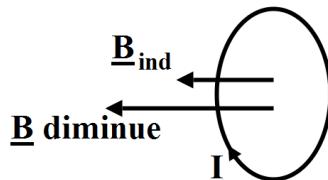
Tâchons d'être plus précis. Considérons le cas a) où nous rapprochons de la boucle le pôle nord de l'aimant. Le champ  $\mathbf{B}$  est dirigé de la droite vers la gauche et augmente.



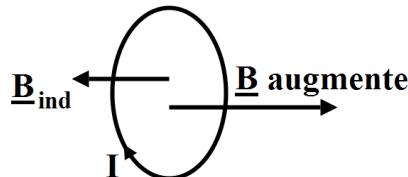
Dans ce cas, le courant induit  $I$  dans la boucle est tel que le champ  $\mathbf{B}_{ind}$  induit par  $I$  s'oppose à l'augmentation du champ  $\mathbf{B}$  créé par l'aimant :



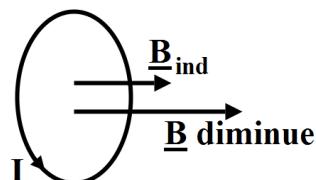
Si on éloigne maintenant l'aimant (toujours dans la même configuration), le champ  $\mathbf{B}$  va diminuer. Le courant  $I$  induit dans la boucle crée un champ  $\mathbf{B}_{ind}$  qui s'oppose à la diminution de  $\mathbf{B}$  :



Si maintenant le champ  $\mathbf{B}$  est dirigé de gauche à droite (on inverse les pôles nord et sud de l'aimant) et que l'aimant est rapproché de la boucle,  $\mathbf{B}$  va augmenter. On trouve que le courant induit  $I$  crée un champ induit  $\mathbf{B}_{ind}$  qui tend à contrecarrer l'augmentation de  $\mathbf{B}$ .  $\mathbf{B}_{ind}$  est donc dirigé de droite à gauche :



Finalement, toujours dans la même configuration, si nous éloignons l'aimant,  $\mathbf{B}$  diminue et  $I$  va essayer de contrecarrer cette diminution en créant  $\mathbf{B}_{ind}$  dirigé de gauche à droite :



## 8.3 Loi de Lenz et loi de Faraday

### 8.3.1 Loi de Lenz

Les quatre cas que nous venons de décrire donnent la base expérimentale de la loi de Lenz :

Le courant induit  $I$  dans la boucle crée un champ magnétique induit  $\mathbf{B}_{ind}$  qui s'oppose au changement du flux magnétique qui crée le courant induit.

### 8.3.2 Loi de Faraday

Soit une boucle conductrice de surface  $S$ . Le flux magnétique  $\Phi$  à travers cette boucle est :

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$$

Supposons que  $\Phi$  dépende du temps. La loi de Faraday (8.1) donne la relation entre la fém induite  $\varepsilon$  dans la boucle conductrice et  $\Phi$  :

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} \quad (8.1)$$

Si la boucle comporte  $n$  tours, alors  $\varepsilon$  dans la boucle vaut :

$$\varepsilon = -n \frac{d\Phi}{dt} \quad (8.2)$$

### 8.3.3 Exemples d'application de la loi de Faraday

Considérons un solénoïde infiniment long (solénoïde idéal) dont le nombre de tours par unité de longueur est  $n$ . Chaque tour porte initialement un courant  $i_0$ .

A l'intérieur du solénoïde, on place une boucle de rayon  $r$  comportant  $m$  tours. La boucle est perpendiculaire à l'axe du solénoïde et son centre est sur l'axe du solénoïde.  $r$  est inférieur au rayon  $R$  du solénoïde (figure 8.3).

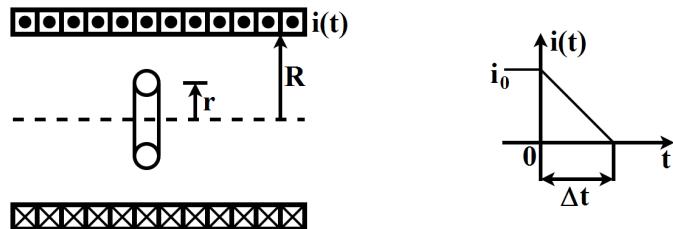


FIGURE 8.3 – Boucle dans un solénoïde idéal

On réduit le courant  $i$  dans le solénoïde de la valeur  $i_0$  à 0 A durant un temps  $\Delta t$ . Quelle est la fém aux bornes de la boucle ?

Pour résoudre le problème, nous devons utiliser la loi de Faraday

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt}$$

Dans un premier temps, il nous faut calculer  $\Phi$  en fonction de  $i$ .

Le champ dans un solénoïde idéal est parallèle à son axe et uniforme. Sa valeur est :

$$B = \mu_0 n i$$

Le flux  $\Phi$  à travers la surface  $S$  de la boucle vaut

$$\Phi = \pi r^2 B = \pi r^2 \mu_0 n i$$

La boucle comportant  $m$  tours, le flux total  $\Phi_{tot} = m\Phi$ .

Pour  $t < 0$ ,  $i(t) = i_0 = \text{cte}$ . Donc

$$\frac{d\Phi_{tot}}{dt} = 0 \text{ pour } t < 0$$

et

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi_{tot}}{dt} = -m \frac{d\Phi}{dt} = 0 \text{ pour } t < 0$$

Pour  $0 < t < \Delta t$ ,

$$i(t) = i_0 \left(1 - \frac{t}{\Delta t}\right)$$

donc

$$\Phi(t) = \pi r^2 \mu_0 n i_0 \left(1 - \frac{t}{\Delta t}\right)$$

$$\frac{d\Phi}{dt} = -\pi r^2 \mu_0 n \frac{i_0}{\Delta t}$$

Par application de la loi de Faraday :

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi_{tot}}{dt} = -m \frac{d\Phi}{dt} = mn\pi r^2 \mu_0 \frac{i_0}{\Delta t} \text{ pour } 0 < t < \Delta t$$

Finalement, pour  $t > \Delta t$ ,  $i(t) = 0$  et  $\varepsilon = 0$ .

Notons que le courant induit  $I$  dans la boucle crée un champ induit  $\mathbf{B}_{ind}$  qui s'oppose à la diminution du flux  $\Phi$ .

### Force pour déplacer une boucle dans un champ magnétique

Considérons le cas idéal suivant, qui n'est pas réel. Supposons un champ magnétique statique  $\mathbf{B}$  limité dans une région de l'espace, comme indiqué sur la figure 8.4.

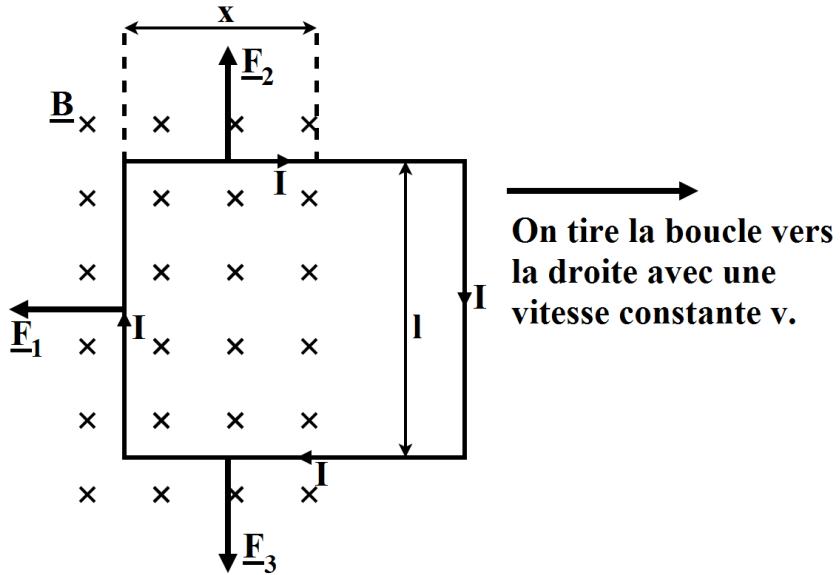


FIGURE 8.4 – Boucle dans un champ magnétique

Considérons une boucle rectangulaire de largeur  $l$  et dont une longueur  $x$  est dans le champ magnétique. On tire la boucle vers la droite. Décrivons ce qui se passe avant cela : un flux magnétique  $\Phi$  passe à travers la boucle :

$$\Phi = Blx$$

Si on tire la boucle vers la droite avec une vitesse  $v$  constante, le flux  $\Phi$  diminue car la longueur  $x$  diminue. Selon la loi de Lenz, le courant induit  $I$  tendra à contrecarrer la diminution du flux  $\Phi$  :  $I$  doit donc augmenter le champ  $B$  statique. Le sens du courant  $I$  est indiqué sur la figure.

Quelle est la fém  $\varepsilon$  induite dans la boucle ? Selon la loi de Faraday, cette fém vaut :

$$|\varepsilon| = \frac{d\Phi}{dt} = \left| \frac{dBlx}{dt} \right| = Bl \left| \frac{dx}{dt} \right| = Blv$$

La valeur absolue de la fém est proportionnelle à la vitesse de déplacement  $v$  de la boucle.

Montrons que, pour tirer la boucle, nous devons exercer une force. Lorsque nous tirons la boucle, un courant induit est généré. Nous nous trouvons dans la situation où nous

avons un conducteur portant un courant  $I$  perpendiculaire à un champ magnétique  $\mathbf{B}$ . Le conducteur ressent donc une force magnétique

$$\mathbf{F} = I \int \mathbf{dl} \wedge \mathbf{B}$$

Cette force magnétique s'exerce sur trois côtés de la boucle, comme le montre la figure 8.4.

$$\begin{aligned}\|\mathbf{F}_1\| &= IBl \\ \|\mathbf{F}_2\| &= \|\mathbf{F}_3\| = IBx \\ \mathbf{F}_2 &= -\mathbf{F}_3\end{aligned}$$

Donc, pour tirer la boucle vers la droite à vitesse constante  $v$ , l'expérimentateur doit exercer une force égale à  $-\mathbf{F}_1$ .

## 8.4 Champ électrique induit

Jusqu'à maintenant, nous avons considéré des boucles fermées avec des fils conducteurs. Nous avons vu que, lorsque le flux magnétique à travers la boucle change, un courant induit  $I$  circule dans la boucle, c'est-à-dire dans les fils conducteurs formant la boucle. Nous savons d'autre part que, dans un conducteur, l'apparition d'un courant est liée à l'existence d'un champ électrique  $\mathbf{E}$ .

Ces deux faits (création d'un courant induit  $I$  dans le conducteur et nécessité d'avoir un champ  $\mathbf{E}$  lorsque nous avons un courant  $I$ ) nous amènent à un résultat très important qui relie le champ électrique  $\mathbf{E}$  à un champ magnétique  $\mathbf{B}(t)$  variable dans le temps :

Un champ magnétique  $\mathbf{B}(t)$  variable dans le temps produit un champ électrique  $\mathbf{E}$ .

Montrons ceci à travers l'exemple suivant. Soit un champ magnétique uniforme dans l'espace, mais variable dans le temps :

$$\mathbf{B}(t) = -B_0(t)\mathbf{e}_z$$

Pour fixer les idées, supposons que  $B_0(t)$  soit du type

$$B_0(t) = B_0 \frac{t}{\Delta t}$$

c'est-à-dire que  $B_0(t)$  augmente avec le temps.

Plaçons une boucle conductrice circulaire de rayon  $R$  dans le plan Oxy (figure 8.5). Comme  $B_0(t)$  augmente avec le temps, un courant induit  $I$  circule dans la boucle. La direction de  $I$  est le sens trigonométrique.

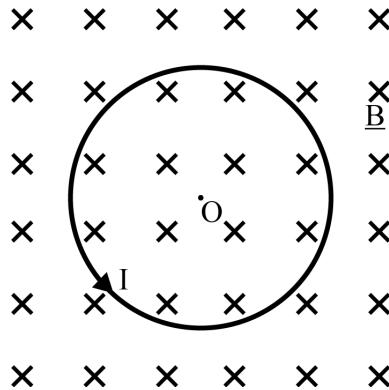


FIGURE 8.5 – Boucle dans un champ magnétique fixe dans l'espace et variable dans le temps. Le champ  $\mathbf{B}(t)$  est créé par un solénoïde dont l'axe passe par O.

D'autre part, nous savons qu'avec la présence de  $I$  il existe un champ électrique  $\mathbf{E}$ , nécessaire pour mettre en mouvement les électrons.

Par la pensée, enlevons le conducteur qui forme la boucle, tout en laissant au même endroit les électrons qui produisent le courant  $I$ . Ces électrons en mouvement ressentent l'action d'une force électrique due à un champ électrique  $\mathbf{E}$ .

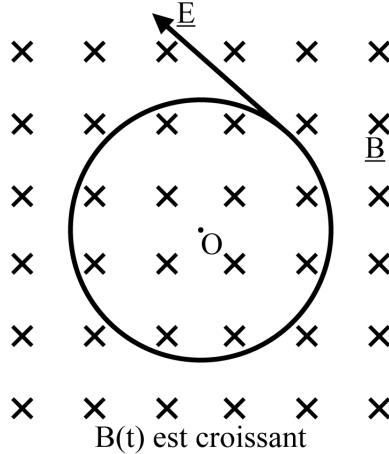


FIGURE 8.6 – Champ électrique produit par un champ magnétique variable dans le temps

Ce champ électrique  $\mathbf{E}$  est constant et, par un argument de symétrie, tangent au cercle de rayon  $R$ .

$\mathbf{E}$  est dans la direction indiquée sur la figure 8.6 si  $B_0(t)$  est une fonction croissante du temps. Si  $B_0(t)$  reste constant,  $\mathbf{E}$  est nul.  $\mathbf{E}$  inverse sa direction lorsque  $B_0(t)$  est une fonction décroissante du temps.

### 8.4.1 Loi de Faraday exprimée avec le champ électrique induit $\mathbf{E}$

Soit un champ magnétique  $\mathbf{B}$  variable dans le temps.

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$$

Il existe un champ électrique induit  $\mathbf{E}$ .

Soit une boucle fermée mathématique  $C$  encerclant une surface  $S$ . Sur une base expérimentale, et sans démonstration, nous écrivons

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \int_S \left( \frac{d}{dt} \mathbf{B} \right) \cdot d\mathbf{S} \quad (8.3)$$

Cette loi (8.3) est également connue comme loi de Faraday portant sur le champ électrique induit  $\mathbf{E}$ . Elle exprime simplement que la fém (membre de gauche) est égale à (variation du flux).

Rappelons à nouveau que le champ électrique induit  $\mathbf{E}$  n'existe que si  $\mathbf{B}$  varie dans le temps. Pour des champs  $\mathbf{B}$  constants dans le temps, et s'il n'y a pas de champ électrostatique  $\mathbf{E}_{ES}$ , alors

$$\mathbf{E} = 0$$

### 8.4.2 Différence entre les champs électriques induit et électrostatique

Il existe plusieurs différences entre le champ électrique induit et le champ électrique électrostatique. Ces différences sont indiquées dans le tableau 8.1.

	Champ électrostatique	Champ électrique induit
Cause	Charge électrique	$-\frac{d}{dt} \Phi$
Ligne de champ	Part (ou finit) sur la charge	Se ferme sur elle-même
Circulation sur $C$ fermé	$\oint_C \mathbf{E}_{ES} \cdot d\mathbf{l} = 0$	$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d\Phi}{dt}$

TABLE 8.1 – Différences entre champs électriques induit  $\mathbf{E}$  et électrostatique  $\mathbf{E}_{ES}$

La discussion sur la topologie des lignes de champ pour le cas du champ électrique induit  $\mathbf{E}$  est analogue à celle que nous avons faite pour les lignes de champ magnétique. Comme

pour le champ magnétique, le champ électrique induit n'est pas généré par des charges. Toute la discussion pour les lignes de champ magnétique est donc valable pour les lignes du champ électrique induit.

### 8.4.3 Forme locale de la loi de Faraday

La forme intégrale de la loi de Faraday est

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$$

où  $S$  est la surface entourée par  $C$  (contour d'intégration fixe). Comme  $C$  est fixe,  $S$  l'est également, et donc

$$\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int_S \left( \frac{d}{dt} \mathbf{B} \right) \cdot d\mathbf{S}$$

Nous pouvons transformer  $\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$  à l'aide du théorème de Stokes :

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_S (\nabla \wedge \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{S}$$

L'équation de Faraday devient donc

$$\int_S (\nabla \wedge \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{S} = - \int_S \left( \frac{d}{dt} \mathbf{B} \right) \cdot d\mathbf{S} \quad (8.4)$$

L'égalité (8.4) devant être satisfaite pour toute surface  $S$ , nous devons avoir :

$$\nabla \wedge \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (8.5)$$

L'équation (8.5), qui est la forme locale de l'équation de Faraday, permet de relier le champ électrique  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  et le champ magnétique  $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ . Cette équation est l'une des quatre équations de Maxwell qui décrivent l'électromagnétisme.

## 8.5 Circuit électrique en présence de phénomènes d'induction

Nous avons remarqué qu'une boucle conductrice présente une fém lorsque le flux magnétique à travers elle varie dans le temps. Nous allons maintenant essayer de préciser ces notions du point de vue des circuits électriques. Comme nous l'avons vu lors des expériences, le cas le plus fréquent que nous avons rencontré est celui du solénoïde.

Soit un solénoïde idéal ayant  $n$  tours par unité de longueur. Le champ créé à l'intérieur de ce solénoïde est

$$B = \mu_0 In$$

où  $I$  est le courant par tour du solénoïde. Si  $S$  est la section du solénoïde, le flux à travers une boucle du solénoïde est

$$\Phi = BS = \mu_0 InS$$

Si nous considérons une longueur  $l$  du solénoïde, le nombre de tours  $N$  sur cette longueur est

$$N = nl$$

Le flux total  $\Phi_{tot}$  sur la longueur  $l$  est donc

$$\Phi_{tot} = N\Phi = \mu_0 n^2 l S$$

Nous définissons le **coefficent d'induction** (ou **inductance**)  $L$  du solénoïde de longueur  $l$  par

$$L = \frac{N\Phi}{I} = \mu_0 n^2 l S \quad (8.6)$$

L'unité de  $L$  est le Henry :

$$[L] = \text{Henry} \equiv \text{H} = \text{Tm}^2 \text{A}^{-1}$$

Rappelons que  $\mu_0$  a une unité de  $\text{Hm}^{-1}$  :

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Hm}^{-1}$$

### 8.5.1 Self-induction

Soit un solénoïde (ou bobine) dans un circuit (figure 8.7). Initialement, il n'y a pas de courant dans la bobine.

Si  $I$  commence à passer, il y aura un phénomène d'induction dans la bobine : en effet, le flux à travers elle est initialement nul, et le courant  $I$  crée un champ  $\mathbf{B}$  et un flux  $\Phi$ . Il y a donc apparition d'une fém induite  $\varepsilon_{ind}$ .

$$\varepsilon_{ind} = -\frac{d\Phi_{tot}}{dt}$$

Par l'équation (8.6),  $\Phi_{tot} = LI$ , et donc :

$$\varepsilon_{ind} = -L \frac{dI}{dt}$$

La figure 8.8 donne la fém dans les deux cas d'un courant  $I$  croissant (dessin de gauche) et décroissant (dessin de droite).

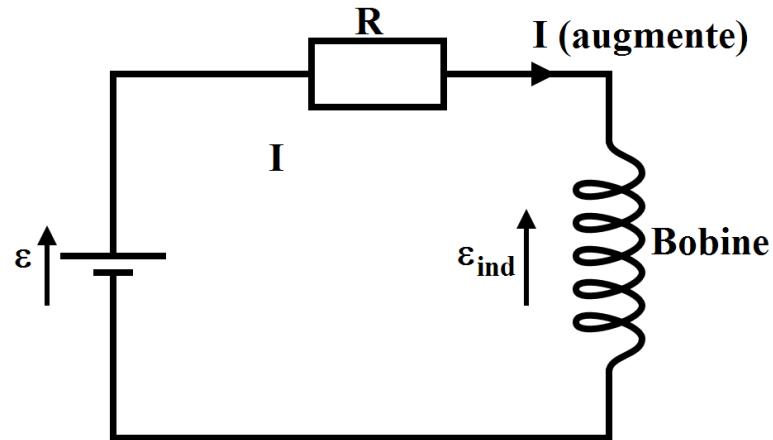
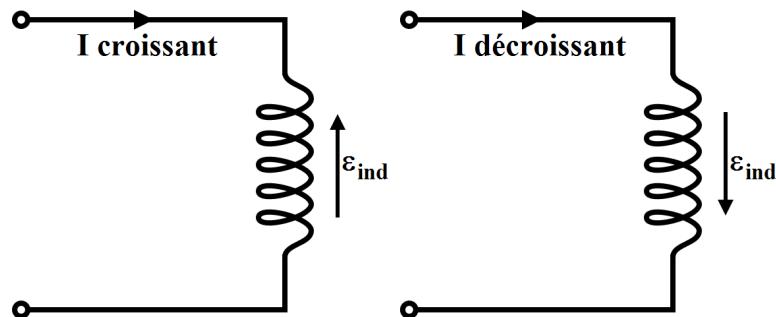


FIGURE 8.7 – Circuit avec bobine

FIGURE 8.8 – La fém  $\epsilon_{\text{ind}}$  s'oppose à la croissance (ou décroissance) du courant

Ce phénomène est appelé **self-induction**. La bobine (ou le solénoïde) est aussi appelé une "self". Pour définir une self, du point de vue électrique, il nous suffit de connaître le coefficient d'induction (ou inductance)  $L$ . Par abus de langage on appelle aussi  $L$  la self de la bobine.

Si la bobine est formée d'un fil conducteur résistif, elle possède une résistance  $R$  et le circuit équivalent de la bobine se compose d'une résistance  $R$  en série avec la self.

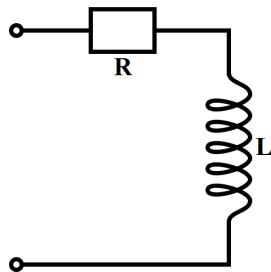


FIGURE 8.9 – Circuit équivalent d'une self

### 8.5.2 Etude d'un circuit électrique avec une self

Considérons le circuit de la figure 8.10. Au temps  $t = 0$ , l'interrupteur est fermé et le courant commence à circuler dans la résistance  $R$  et la self d'inductance  $L$ .

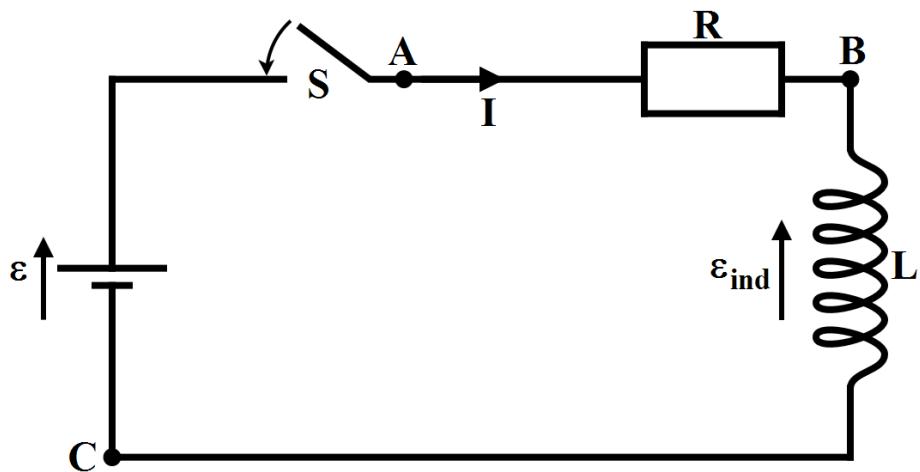


FIGURE 8.10 – Circuit avec une self

Lorsque le courant circule, il se développe une fém induite  $\varepsilon_{ind}$ . Par application de la loi de Kirchhoff sur les tensions sur le circuit ABC, nous avons :

- en B une tension  $-RI$ ,

- en C une tension égale à  $\varepsilon_{ind} = -L \frac{dI}{dt}$  obtenue par la loi de Faraday,
- en A la fém  $\varepsilon$ .

Par application de la loi de Kirchhoff :

$$-RI - L \frac{dI}{dt} + \varepsilon = 0$$

$$RI + L \frac{dI}{dt} = \varepsilon$$

avec la condition initiale  $I(t = 0) = 0$ .

La solution de cette équation différentielle est la somme

- de la solution générale de l'équation différentielle sans second membre

$$RI + L \frac{dI}{dt} = 0$$

- et d'une solution particulière de l'équation différentielle avec second membre

$$RI + L \frac{dI}{dt} = \varepsilon$$

La solution générale de l'équation différentielle sans second membre est

$$I(t) = I_0 \exp \left\{ -\frac{Rt}{L} \right\}$$

Comme solution particulière de l'équation avec second membre, nous voyons que

$$I = \frac{\varepsilon}{R}$$

la satisfait. L'équation générale est donc

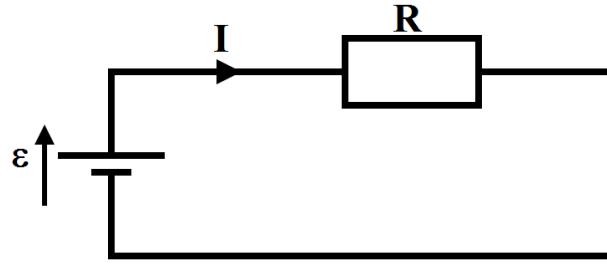
$$I(t) = I_0 \exp \left\{ -\frac{Rt}{L} \right\} + \frac{\varepsilon}{R}$$

avec la condition initiale  $I(t = 0) = 0$ . Cette condition nous permet de définir

$$I_0 = -\frac{\varepsilon}{R}$$

$$I(t) = \frac{\varepsilon}{R} \left[ 1 - \exp \left\{ -\frac{Rt}{L} \right\} \right]$$

Nous notons que le courant  $I(t)$  varie exponentiellement avec une constante de temps égale à  $\frac{L}{R}$ . Plus  $R$  est petit, plus la constante de temps pour atteindre la valeur asymptotique est grande. Si la résistance externe  $R$  est supprimée et que la self elle-même est faite de supraconducteur et n'a donc pas de résistance, la constante de temps  $\frac{L}{R}$  est infinie !


 FIGURE 8.11 – Circuit équivalent lorsque  $t \rightarrow \infty$ 

Pour  $t \rightarrow \infty$ ,  $I \rightarrow \frac{\varepsilon}{R}$ . Ce résultat est attendu, car si  $t \rightarrow \infty$ , la fonction exponentielle tend vers 0 et il n'y a plus de variation de  $I$ . Les effets de self-induction sont alors négligeables, et le circuit se ramène à celui de la figure 8.11.

Pour le circuit de la figure 8.10, la différence de potentiel  $V_R$  aux bornes de la résistance est

$$V_R = RI = \varepsilon \left[ 1 - \exp \left\{ -\frac{Rt}{L} \right\} \right]$$

Pour  $t \rightarrow \infty$ ,  $V_R$  est égale à  $\varepsilon$ .

La différence de potentiel  $V_L$  aux bornes de la self est

$$V_L = -L \frac{dI}{dt} = L \frac{\varepsilon}{R} \frac{R}{L} \exp \left\{ -\frac{Rt}{L} \right\} = \varepsilon \exp \left\{ -\frac{Rt}{L} \right\}$$

Comme nous l'avons mentionné, pour  $t \rightarrow \infty$ ,  $V_L$  tend vers 0, car le courant  $I$  ne varie plus et il n'y a plus d'effet de self-induction. Ce résultat est consistant avec le fait que  $V_R$  tende vers  $\varepsilon$  pour  $t \rightarrow \infty$ .

L'évolution du courant en fonction du temps est représentée dans la figure 8.12. Les graphiques de la figure 8.13 montrent les évolutions de  $V_R$  et  $V_L$  en fonction du temps.

### 8.5.3 Energie magnétique

Rappelons que lorsqu'un courant  $I$  traverse la fém  $\varepsilon$ , cette dernière fournit une puissance  $P = I\varepsilon$ . Dans le cas de notre circuit de la figure 8.10, à chaque instant  $t$  nous avons

$$I\varepsilon = RI^2 + LI \frac{dI}{dt}$$

Nous trouvons deux termes :

- $RI^2$  qui représente la puissance thermique perdue dans la résistance,
- $LI \frac{dI}{dt}$  qui est la puissance stockée dans la self.

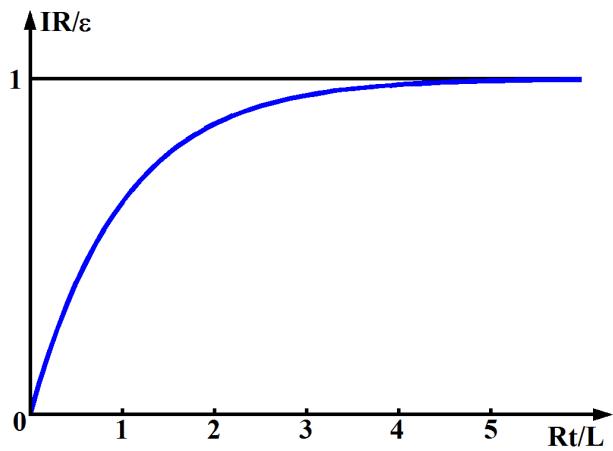
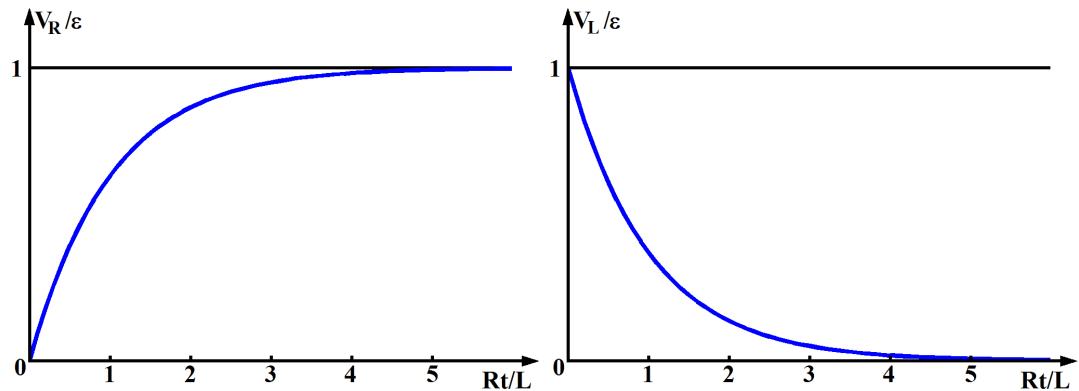


FIGURE 8.12 – Evolution du courant dans un circuit avec une self

FIGURE 8.13 – Evolutions de  $V_R$  et  $V_L$  en fonction du temps

## 8.5. CIRCUIT ÉLECTRIQUE EN PRÉSENCE DE PHÉNOMÈNES D'INDUCTION

En effet, si la fém  $\varepsilon$  fournit une puissance, par conservation de l'énergie, cette puissance est transférée et stockée dans la self. L'énergie totale stockée dans la self lorsqu'un courant  $I_0$  la traverse est :

$$W_{self} = \int I \varepsilon dt = \int_0^{I_0} LIdI = \frac{1}{2}LI_0^2$$

Une self traversée par une courant  $I_0$  stocke donc une énergie

$$W_{self} = \frac{1}{2}LI_0^2$$

Récrivons  $W_{self}$  avec la valeur de  $L$  pour un solénoïde de longueur  $l$  :

$$W_{self} = \frac{1}{2}\mu_0 n^2 l S I_0^2 = \frac{(n^2 I_0^2 \mu_0^2)}{2\mu_0} l S$$

Or le champ  $B$  dans le solénoïde (considéré comme idéal) avec un courant  $I_0$  vaut :

$$B = \mu_0 n I_0$$

D'où

$$W_{self} = \frac{B^2}{2\mu_0} l S$$

Du point de vue dimensionnel,  $B^2/2\mu_0$  a la dimension de  $\text{Jm}^{-3}$ , et est donc une densité d'énergie appelée **densité d'énergie magnétique**. A un champ magnétique de valeur  $B$  correspond une densité d'énergie  $u_B$  :

$$u_B = \frac{B^2}{2\mu_0} \text{ Jm}^{-3}$$

Notez que lors de l'étude de l'hydrodynamique, nous avons remarqué que la pression  $p$  a aussi une dimension de  $\text{Jm}^{-3}$  :

$$[p] = \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = \frac{\text{Nm}}{\text{m}^3} = \frac{\text{J}}{\text{m}^3}$$

La quantité  $B^2/\mu_0$  a donc la même dimension qu'une pression  $p$ . C'est pour cela que  $B^2/\mu_0$  est aussi appelée pression magnétique. Vous la sentez lorsque vous rapprochez deux aimants permanents de même polarité.

### Exemple de calcul de l'énergie magnétique

Considérons un système formé par deux conducteurs cylindriques concentriques, comme sur la figure 8.14.

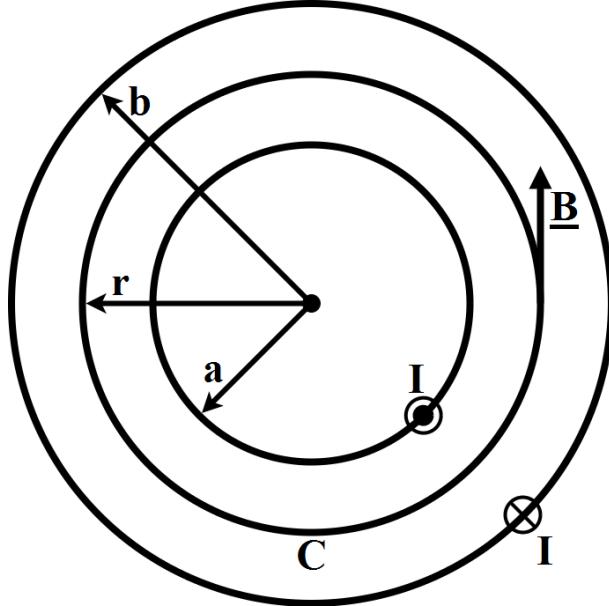


FIGURE 8.14 – Deux conducteurs cylindriques concentriques

Le conducteur interne porte un courant  $I$  pointant vers l'extérieur de la feuille. Le courant dans le conducteur externe vaut  $I$  et pointe dans la feuille. Nous nous proposons de calculer l'énergie magnétique  $U_B$  dans la zone entre les deux cylindres sur une longueur  $l$ .

Appliquons la loi d'Ampère sur un cercle  $C$  de rayon  $r$  :

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

Localement, la densité d'énergie  $u_B$  est donc

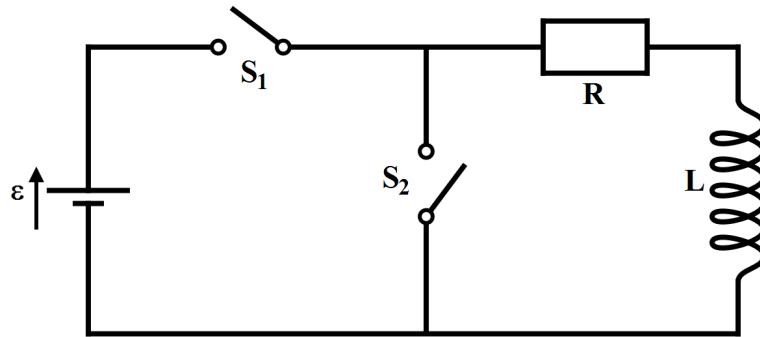
$$u_B = \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2 r^2}$$

$u_B$  dépend donc de  $r$ . L'énergie magnétique  $U_B$  vaut donc :

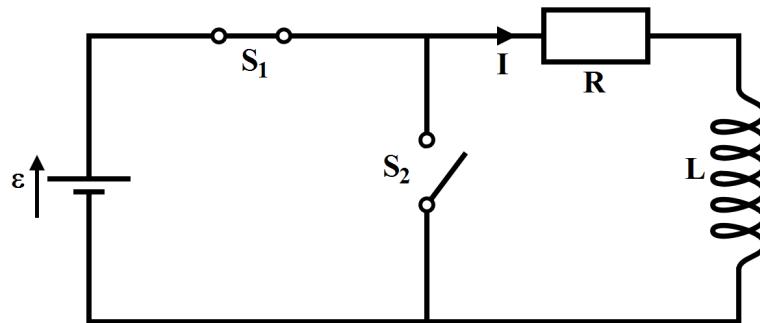
$$U_B = l \int_a^b u_B 2\pi r dr = \frac{l\mu_0 I^2}{4\pi} \int_a^b \frac{r}{r^2} dr = \frac{l\mu_0 I^2}{4\pi} \ln \left( \frac{b}{a} \right)$$

#### 8.5.4 Décharge d'une self

Supposons que nous avons le circuit suivant :



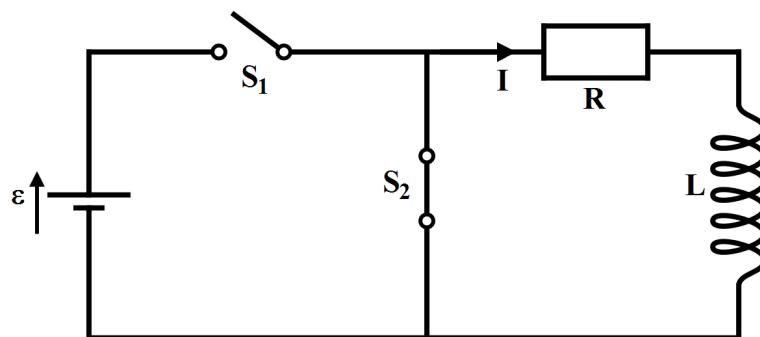
Dans un premier temps,  $S_1$  est fermé et  $S_2$  ouvert :



Nous sommes donc dans le cas étudié précédemment, et le courant  $I(t)$  vaut

$$I(t) = \frac{\epsilon}{R} \left[ 1 - \exp \left\{ -\frac{Rt}{L} \right\} \right]$$

Au bout de plusieurs dizaines de temps  $L/R$ ,  $I(t)$  atteint sa valeur asymptotique  $\epsilon/R$ .  
A cet instant  $t = t'$ , nous ouvrons  $S_1$  et fermons simultanément  $S_2$  :



L'équation du circuit est simplement :

$$RI + L \frac{dI}{dt} = 0$$

avec  $I = \frac{\varepsilon}{R}$  à l'instant  $t'$ . Le courant décroît avec la même constante de temps  $L/R$ , et finit par disparaître. Du point de vue énergétique, la self portait en  $t'$  une énergie

$$W_{self} = \frac{1}{2}LI^2 = \frac{1}{2}L \frac{\varepsilon^2}{R^2}$$

A la fin de l'expérience,  $I$  est nul, donc  $W_{self} = 0$ . L'énergie

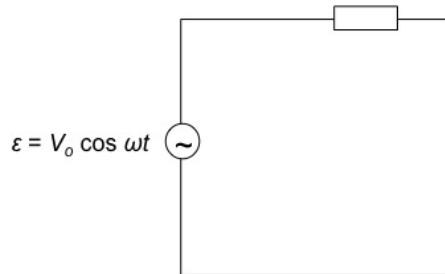
$$\frac{1}{2}L \frac{\varepsilon^2}{R^2}$$

a été dissipée sous forme d'énergie thermique dans la résistance.

## 8.6 Circuit avec une fém $\varepsilon = V_o \cos \omega t$

Nous considérons maintenant une fém  $\varepsilon$  qui varie avec le temps. Si  $\varepsilon = \varepsilon(t)$  alors  $I = I(t)$ .

### 8.6.1 Circuit avec R



On a

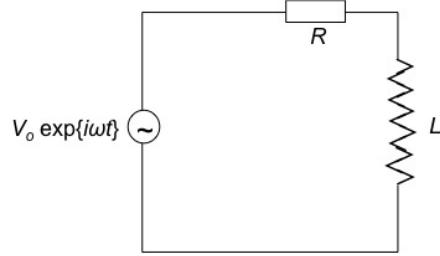
$$\begin{aligned} RI(t) &= V_o \cos \omega t \\ I(t) &= \frac{V_o}{R} \cos \omega t \end{aligned}$$

Utilisons la notation complexe  $\varepsilon(t) = V_o \exp\{i\omega t\}$  (voir 3.2.2)

$$\begin{aligned} RI(t) &= V_o \exp\{i\omega t\} \\ I(t) &= \frac{V_o}{R} \exp\{i\omega t\} \end{aligned}$$

Le courant  $I(t)$  est en phase avec la tension  $\varepsilon(t)$ .

## 8.6.2 Circuit avec L et R



L'équation du circuit est

$$-RI(t) - L \frac{dI(t)}{dt} + \varepsilon(t) = 0$$

$$\varepsilon(t) = RI + L \frac{dI}{dt}$$

Nous écrivons

$$V_o \exp\{i\omega t\} = RI(t) + L \frac{dI}{dt} \quad \forall t$$

Le courant  $I(t)$  doit donc avoir la même dépendance  $\exp\{i\omega t\}$ . Nous écrivons

$$I(t) = I_o \exp\{i\omega t\}$$

avec  $I_o$  = nombre complexe. Nous avons pris  $V_o$  comme nombre réel. Nous avons donc

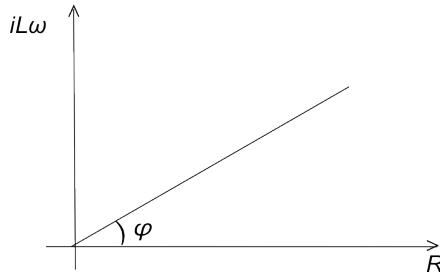
$$V_o \exp\{i\omega t\} = RI_o \exp\{i\omega t\} + LI_o i\omega \exp\{i\omega t\} \quad (8.7)$$

D'où

$$\begin{aligned} I_o &= \frac{V_o}{R+iL\omega} = \frac{V_o(R-iL\omega)}{R^2+L^2\omega^2} \\ &= ||I_o|| \exp\{-i\varphi\} \end{aligned}$$

avec

$$||I_o|| = \frac{V_o}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}}$$



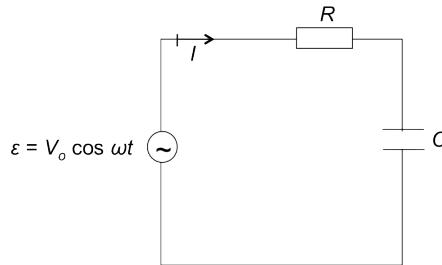
Donc

$$I(t) = |I_o| \exp\{-i\varphi\} \exp\{i\omega t\}$$

$$I(t) = |I_o| \exp\{i(\omega t - \varphi)\}$$

Le courant  $I(t)$  est déphasé par  $\varphi$  par rapport à la tension.

### 8.6.3 Circuit R et C



L'équation du circuit est

$$-RI(t) - \frac{q(t)}{C} + \varepsilon(t) = 0$$

$$\varepsilon(t) = RI(t) + \frac{q(t)}{C}$$

$$\varepsilon(t) = RI(t) + \frac{1}{C} \int I(t) dt$$

Si  $\varepsilon(t) = V_o \exp\{i\omega t\}$  alors  $I(t)$  a la même dépendance

$$I(t) = I'_o \exp\{i\omega t\} \quad \text{avec} \quad I'_o = \text{Nombre complexe}$$

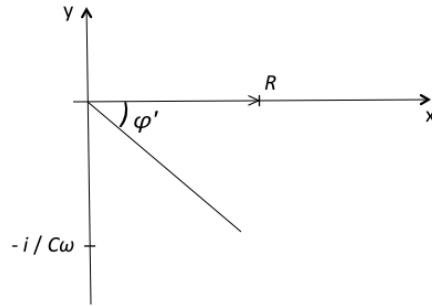
D'où l'équation du circuit

$$V_o \exp\{i\omega t\} = RI'_o \exp\{i\omega t\} + \frac{1}{iC\omega} I'_o \exp\{i\omega t\} \quad (8.8)$$

D'où

$$\begin{aligned} I'_o &= \frac{V_o}{R - \frac{i}{C\omega}} = \frac{V_o}{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}} \left( R + \frac{i}{C\omega} \right) \\ &= ||I'_o|| \exp\{i\varphi'\} \end{aligned}$$

avec  $||I'_o|| = \frac{V_o}{\left( R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2} \right)^{1/2}}$



#### 8.6.4 Notion d'impédance

Reprendons les 3 équations de circuit

$$RI_o \exp\{i\omega t\} = V_o \exp\{i\omega t\}$$

$$RI_o \exp\{i\omega t\} + iL\omega I_o \exp\{i\omega t\} = V_0 \exp\{i\omega t\} \quad \text{Equation 8.7}$$

$$RI_o \exp\{i\omega t\} + \frac{1}{i\omega C} I'_o \exp\{i\omega t\} = V_o \exp\{i\omega t\} \quad \text{Equation 8.8}$$

Faisons d'abord une analyse dimensionnelle

$$[R] = \frac{\text{Volt}}{\text{Ampère}} = \frac{V}{A} = \Omega$$

$$[L] = \frac{\text{Volt}}{\text{Ampère}} \times s$$

$$[L\omega] = \frac{\text{Volt}}{\text{Ampère}} = \Omega$$

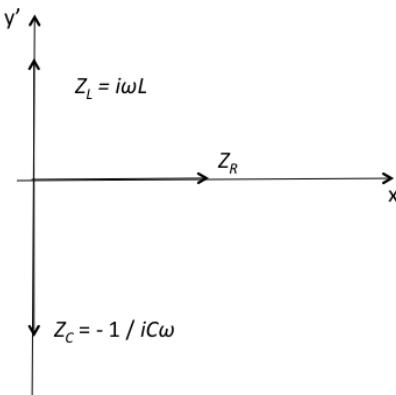
$$[C] = \frac{\text{Coulomb}}{\text{Volt}} = \frac{A \cdot s}{V}$$

$$\left[\frac{1}{C\omega}\right] = \frac{\text{Volt} \cdot s}{A \cdot s} = \frac{\text{Volt}}{\text{Ampère}} = \Omega$$

Les trois quantités  $R$ ,  $i\omega L$  et  $\frac{1}{i\omega C}$  ont la même dimension, Volt/Ampère soit Ohm. Elles diffèrent seulement par le fait que la résistance  $R$  est une quantité purement réelle, alors que  $(i\omega L)$  et  $[1/(i\omega C)]$  sont des quantités purement imaginaires. On appelle impédances  $Z$  des éléments de circuit R, L et C ces quantités :

Elément de circuit	Impédance
$R$	$Z_R = R$
$L$	$Z_L = i\omega L$
$C$	$Z_C = \frac{1}{i\omega C}$

Dans le plan complexe  $Z = x + iy$ , les impédances sont représentées par les vecteurs  $Z_L$ ,  $Z_R$  et  $Z_C$ .



Par définition des impédances, si on vous donne un courant  $I = \tilde{I} \exp\{i\omega t\}$  avec  $\tilde{I}$  = nombre réel, la relation entre la tension et le courant est

- Pour  $R$        $V_R = R\tilde{I} \exp\{i\omega t\}$
- Pour  $L$        $V_L = Z_L \tilde{I} \exp\{i\omega t\}$
- Pour  $C$        $V_C = Z_C \tilde{I} \exp\{i\omega t\}$

### Importance de la notion d'impédance pour un circuit oscillant.

On peut calculer l'impédance équivalente d'un circuit comprenant  $R$ ,  $L$  et  $C$  en appliquant les mêmes règles que pour un circuit avec des résistances.

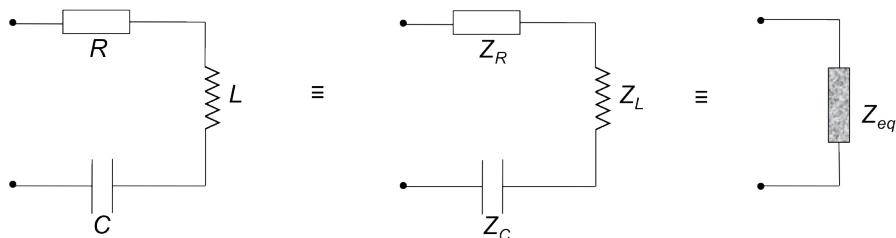
Soit n impédances  $Z_i$  en série

$$Z_{eq} = \sum_{i=1}^n Z_i$$

Soit n impédances  $Z_i$  en parallèle

$$\frac{1}{Z_{eq}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{Z_i}$$

Par exemple, calculons l'impédance équivalente du circuit suivant



C'est un circuit ayant  $Z_R$ ,  $Z_L$  et  $Z_C$  en série

$$Z_{eq} = R + i \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right)$$

Nous avons

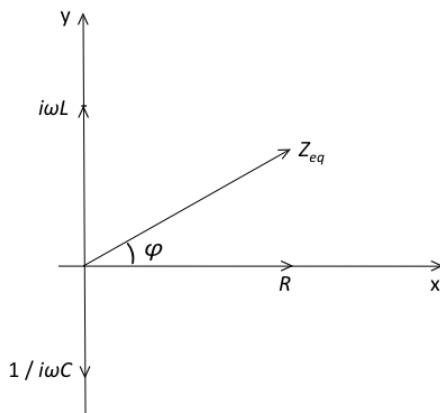
$$||Z_{eq}|| = \left[ R^2 + \omega^2 L^2 \left( 1 - \frac{1}{\omega^2 LC} \right)^2 \right]^{1/2}$$

$||Z_{eq}||$  a un minimum pour

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

et ce minimum vaut  $Z_{eq})_{min} = R$

Dans le plan complexe des impédances nous avons :

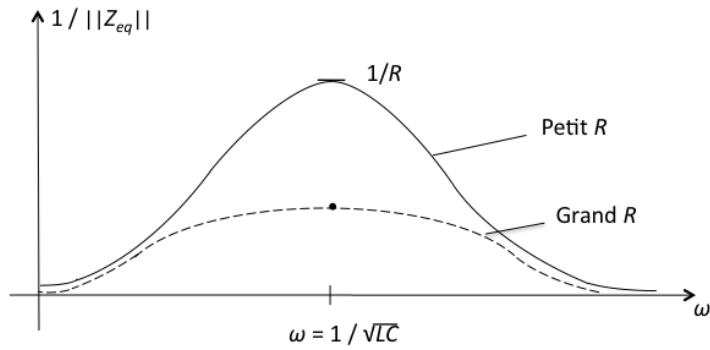


Avec  $\omega = 1/\sqrt{LC}$  ,  $|Z_L| = |Z_C|$  et  $Z_{eq} = R$

Pour  $\omega \rightarrow \infty$        $Z_C \rightarrow 0$  et  $Z_L \rightarrow \infty$  sur l'axe imaginaire

Pour  $\omega \rightarrow 0$        $Z_C \rightarrow \infty$  et  $Z_L \rightarrow 0$  sur l'axe imaginaire

Dans ces 2 derniers cas  $Z_{eq} \rightarrow \infty$  et le courant est nul. La fréquence  $\omega = 1/\sqrt{LC}$  est la fréquence de résonance du courant. Si on trace  $1/|Z_{eq}|$  en fonction de  $\omega$  on a



La phase  $\varphi$  de  $Z_{eq}$  par rapport à  $R$  est de  $\pi/2$  pour  $\omega \rightarrow 0$  et de  $\pi/2$  pour  $\omega \rightarrow \infty$ .  $\varphi$  est 0 pour  $\omega = 1/\sqrt{LC}$ .



# Chapitre 9

## Equations de Maxwell

### 9.1 Introduction

De notre étude sur les phénomènes électriques et magnétiques, nous avons obtenu l'ensemble des lois suivantes :

- Equation de Gauss

$$\varepsilon_0 \int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \text{somme des charges dans } V = \int_V \rho_{el} d^3r$$

•

$$\int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

Dans ces deux cas,  $S$  est une surface fermée qui entoure le volume  $V$ .  $\rho_{el}$  est la densité de charges électriques.

- Equation de Faraday

$$\begin{aligned} \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} &= -\frac{d\Phi}{dt} \\ \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} &= - \int_{S'} \frac{d\mathbf{B}}{dt} \cdot d\mathbf{S} \end{aligned}$$

- Equation d'Ampère

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 [\text{somme des courants qui traversent } S'] = \mu_0 \int_{S'} \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S}$$

$C$  est une contour fermé entourant la surface  $S'$ .  $\mathbf{j}$  est la densité de courant, et  $\Phi$  le flux magnétique à travers  $S'$ .

Les formes locales de ces quatre équations sont :

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{\rho_{el}}{\varepsilon_0} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \wedge \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \wedge \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{j}\end{aligned}$$

## 9.2 Critique de l'équation $\nabla \wedge \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$

### 9.2.1 Rappel : Equation de continuité

Faisons un parallèle avec la dynamique des fluides. En supposant que la masse  $M$  est conservée, nous avons abouti à l'équation de continuité

$$\frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j}_m = 0$$

où  $\rho_m$  est la densité de masse et  $\mathbf{j}_m = \rho_m \mathbf{u}$  la densité de flux de masse.

Pour les phénomènes électriques, nous avons également la conservation de la charge électrique (en négligeant les phénomènes de recombinaison entre un ion positif et un électron négatif). Par les mêmes méthodes que pour l'hydrodynamique, nous avons donc

$$\frac{\partial \rho_{el}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0$$

où  $\rho_{el}$  est la densité de charge électrique et  $\mathbf{j} = \rho_{el} \mathbf{u}$  la densité de courant électrique. Il est "normal" que nous ayons cette équation de continuité (identique formellement à l'équation 2.5) car la charge est conservée.

Nous supposons que  $\rho_{el} = \rho_{el}(\mathbf{r}, t)$  et  $\mathbf{j} = \mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$ .

L'équation

$$\frac{\partial \rho_{el}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0$$

est l'équation de continuité pour les phénomènes électriques. Cette équation est une équation locale, satisfaite en tout point  $\mathbf{r}$  de l'espace et en tout temps  $t$ .

### 9.2.2 Intermède mathématique

Soit un champ vectoriel  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ . Nous pouvons facilement montrer que

$$\nabla \cdot (\nabla \wedge \mathbf{A}) = 0$$

Un moyen mnémotechnique est de se rappeler qu'avec notre notation le rotationnel est le produit vectoriel entre l'opérateur vectoriel  $\nabla$  et le vecteur  $\mathbf{A}$ , et la divergence d'un vecteur  $\mathbf{C}$  est le produit scalaire entre  $\nabla$  et  $\mathbf{C}$ .

Par application de

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) = 0$$

car  $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$  est perpendiculaire à  $\mathbf{a}$ , on se rappelle que

$$\nabla \cdot (\nabla \wedge \mathbf{A}) = 0$$

### 9.2.3 Critique de l'équation $\nabla \wedge \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$

Ce fut le coup de génie de Maxwell de noter cette critique et de proposer une solution.

Supposons que  $\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$  et  $\mathbf{j} = \mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$ . Nous avons donc

$$\nabla \cdot (\nabla \wedge \mathbf{B}) = 0 = \mu_0 \nabla \cdot \mathbf{j}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = 0$$

Pour des phénomènes variables dans le temps, nous ne pouvons donc pas satisfaire l'équation de continuité

$$\frac{\partial \rho_{el}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0$$

si nous considérons l'équation

$$\nabla \wedge \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$$

## 9.3 La quatrième équation selon Maxwell

Maxwell **postule** un nouveau terme dans l'équation avec  $\nabla \wedge \mathbf{B}$  :

$$\nabla \wedge \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mu_0 \left[ \mathbf{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right]$$

La quantité  $\varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$  a la dimension d'une densité de courant, et est appelée **densité de courant de déplacement**<sup>1</sup>. Son existence est indépendante d'un milieu, car il est généré par  $\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$  : le courant de déplacement peut même exister dans le vide.  $\mathbf{j}$  est la densité de courant de conduction.

Quelle est l'amplitude relative de  $\mathbf{j}$  et  $\varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$  ?

---

1.  $\left[ \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right] = \left( \frac{A^2 s^4}{kgm^2} \right) \cdot \left( \frac{kgm^2}{s^2} \cdot \frac{1}{Asm} \right) \cdot \frac{1}{s} = \frac{A}{m^2}$

Prenons comme exemple un fil parcouru par un courant alternatif à 50 Hz. Le fil a une section de  $4 \text{ mm}^2$  et porte un courant de 4 A.

$$\mathbf{j} = \frac{4 \text{ A}}{4 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2} = 10^6 \text{ Am}^{-2}$$

Prenons  $E = 1 \text{ Vm}^{-1}$ . La période à 50 Hz est 20 ms.

$$\varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \approx 8.8 \cdot 10^{-12} \text{ AsV}^{-1} \text{ m}^{-1} \cdot \frac{1 \text{ Vm}^{-1}}{20 \cdot 10^{-3} \text{ s}} \approx 4.4 \cdot 10^{-10} \text{ Am}^{-2}$$

Donc

$$\varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \ll \mathbf{j}$$

Ceci explique la difficulté d'observer le courant de déplacement par des mesures simples ! Est-ce que l'introduction du courant de déplacement permet de satisfaire l'équation de continuité ?

Calculons  $\nabla \cdot (\nabla \wedge \mathbf{B})$  :

$$\nabla \cdot (\nabla \wedge \mathbf{B}) = 0 = \mu_0 \left[ \nabla \cdot \mathbf{j} + \varepsilon_0 \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right]$$

Nous pouvons intervertir l'opérateur  $\nabla$  et  $\frac{\partial}{\partial t}$  :

$$0 = \nabla \cdot \mathbf{j} + \varepsilon_0 \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \nabla \cdot \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E})$$

En utilisant l'équation de Poisson

$$\varepsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E} = \rho_{el}$$

nous avons

$$\nabla \cdot \mathbf{j} + \frac{\partial \rho_{el}}{\partial t} = 0$$

qui n'est autre que l'équation de continuité !

## 9.4 Les équations de Maxwell

Les quatre équations de Maxwell sont (formes locales) :

$$\nabla \wedge \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \tag{9.1a}$$

$$\nabla \wedge \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \tag{9.1b}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho_{el}}{\varepsilon_0} \tag{9.1c}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \tag{9.1d}$$

Les formes intégrales correspondantes sont :

Loi de Faraday

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \quad (9.2a)$$

Loi d'Ampère-Maxwell (Maxwell à cause du courant de déplacement)

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \int_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} + \varepsilon_0 \mu_0 \int_S \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \quad (9.2b)$$

Notez que

$$\int_S \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} = \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{d}{dt} \text{ (Flux de } \mathbf{E} \text{ à travers } S)$$

Loi de Gauss pour le champ E

$$\int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho_{el} dV \quad (9.2c)$$

Loi de Gauss pour le champ B

$$\int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (9.2d)$$

Notez que formellement par rapport à l'introduction 9.1, les différences sont :

- ces équations sont dépendantes du temps,
- la loi d'Ampère est modifiée par le terme

$$\varepsilon_0 \mu_0 \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$$

introduit par Maxwell.

Notons que pour résoudre ces équations, nous avons besoin de connaître la densité de charge  $\rho_{el}(\mathbf{r}, t)$  et la densité de courant  $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$ . Il est important de rappeler que le problème est plus compliqué qu'il n'y paraît, car l'évolution de  $\rho_{el}(\mathbf{r}, t)$  et  $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$  dépend des champs  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{B}$  à travers les équations du mouvement et la force  $\mathbf{F}$  exercée sur les charges par  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{B}$  :

$$\mathbf{F} = q [\mathbf{E} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}]$$

Nous n'aborderons pas ce chapitre qui appartient à la branche de la physique appelée **électrodynamique**.

#### 9.4.1 Les quatre équations de Maxwell sont-elles indépendantes ?

Notez que nous avons deux groupes d'équations :

- deux équations avec l'opérateur rotationnel,
- deux équations avec l'opérateur divergence.

Montrons que les deux équations avec l'opérateur divergence sont des conditions initiales des deux équations avec l'opérateur rotationnel.

Calculons

$$\nabla \cdot (\nabla \wedge \mathbf{E}) = 0 = -\nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \mathbf{B})$$

En intégrant par rapport au temps, nous avons

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \text{constante} = \text{Valeur à } t = 0$$

L'équation de Maxwell  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$  est simplement la détermination de la constante à 0 au temps  $t = 0$ .

De même :

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\nabla \wedge \mathbf{B}) = 0 &= \mu_0 \left[ \nabla \cdot \mathbf{j} + \varepsilon_0 \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right] \\ 0 &= \mu_0 \left[ \nabla \cdot \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E}) \right] \end{aligned}$$

Notons qu'une équation du type

$$\varepsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E} = \rho_{el} + \text{constante initiale}$$

satisfait cette équation. L'équation de Poisson

$$\varepsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E} = \rho_{el}$$

signifie simplement que la constante initiale vaut 0.

En résumé, les deux équations en divergence

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho_{el}}{\varepsilon_0}$$

sont des conditions initiales d'équations dérivées des équations en rotationnel.

#### 9.4.2 Les équations de Maxwell à l'état stationnaire

A l'état stationnaire :

$$\nabla \wedge \mathbf{E} = 0 \tag{9.3a}$$

$$\nabla \wedge \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} \tag{9.3b}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho_{el}/\varepsilon_0 \tag{9.3c}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \tag{9.3d}$$

Nous notons que seules les équations (9.3b), respectivement (9.3c), nous fournissent une relation entre  $\mathbf{B}$  (resp.  $\mathbf{E}$ ) et  $\mathbf{j}$  (resp.  $\rho_{el}$ ). Ce sont en effet celles que nous avons utilisées en magnétostatique et en électrostatique.

## 9.5 Les équations de Maxwell et la lumière dans le vide

### 9.5.1 Intermède mathématique : définition de $\nabla \wedge (\nabla \wedge \mathbf{A})$

Soit un champ vectoriel  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ . Il est assez simple de montrer que

$$\nabla \wedge (\nabla \wedge \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$$

Rappelons que

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$\nabla^2 \mathbf{A} = (\nabla^2 A_x, \nabla^2 A_y, \nabla^2 A_z)$$

Donc

$$\begin{aligned} \nabla \wedge (\nabla \wedge \mathbf{A}) &= \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) - \nabla^2 A_x, \right. \\ &\quad \left. \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) - \nabla^2 A_y, \right. \\ &\quad \left. \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) - \nabla^2 A_z \right] \end{aligned}$$

### 9.5.2 Les équations de Maxwell dans le vide

Dans le vide,  $\rho_{el} = \mathbf{j} = 0$ . Les équations de Maxwell deviennent :

$$\nabla \wedge \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (9.4a)$$

$$\nabla \wedge \mathbf{B} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (9.4b)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (9.4c)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (9.4d)$$

Laissons de côté les deux équations en divergence, au moins pour le moment, pour nous concentrer sur les deux équations en rotationnel. Nous pouvons considérer que la "source" de  $\mathbf{E}$ , resp.  $\mathbf{B}$ , selon l'équation (9.4a), resp. (9.4b), est  $-\partial \mathbf{B} / \partial t$ , resp.  $\mu_0 \varepsilon_0 \partial \mathbf{E} / \partial t$ . Prenons le rotationnel de la première équation :

$$\nabla \wedge (\nabla \wedge \mathbf{E}) = -\nabla \wedge \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \wedge \mathbf{B})$$

En remplaçant  $\nabla \wedge \mathbf{B}$  par sa valeur selon l'équation (9.4b) :

$$\nabla \wedge (\nabla \wedge \mathbf{E}) = -\varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$$

Or  $\nabla \wedge (\nabla \wedge \mathbf{E}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E}$ , et dans le vide,  $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ .

$$\nabla \wedge (\nabla \wedge \mathbf{E}) = -\nabla^2 \mathbf{E}$$

Donc

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0$$

Par une démarche analogue avec l'équation (9.4b), nous avons :

$$\nabla^2 \mathbf{B} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = 0$$

Dans le vide, les champs  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{B}$  satisfont à la même équation différentielle :

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (9.5)$$

$$\nabla^2 \mathbf{B} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = 0$$

Pour résoudre cette équation, prenons l'*ansatz* d'une dépendance en  $\exp\{i(\omega t - kz)\}$ , c'est-à-dire en onde plane<sup>2</sup>, avec  $\mathbf{k} = (0, 0, k)$ , et en choisissant :

$$\mathbf{E} = [E_0 \exp\{i(\omega t - kz)\}, 0, 0] = (E_x, 0, 0) \quad (9.6)$$

$$\mathbf{B} = [0, B_0 \exp\{i(\omega t - kz)\}, 0] = (0, B_y, 0) \quad (9.7)$$

Montrons d'abord que, avec cet *ansatz*,  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{B}$  satisfont bien

$$\nabla \wedge \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

si les amplitudes  $E_0$  et  $B_0$  satisfont  $\frac{E_0}{B_0} = \frac{\omega}{k}$ . En effet,

$$\nabla \wedge \mathbf{E} = [0, -ikE_0 \exp\{i(\omega t - kz)\}, 0]$$

$$-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = [0, -i\omega B_0 \exp\{i(\omega t - kz)\}, 0]$$

2. Rappelons qu'une onde plane a une dépendance spatio-temporelle du type  $\cos(\omega t - kz)$ . Nous utilisons la notation complexe  $\exp\{i(\omega t - kz)\}$  pour décrire  $\cos(\omega t - kz)$  (voir le chapitre sur les ondes). Rappelons que  $\mathbf{k}$  est le vecteur d'onde et  $\omega$  la pulsation.  $[\mathbf{k}] = \text{m}^{-1}$ ,  $[\omega] = \text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$

$$\nabla \wedge \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \Leftrightarrow \frac{E_0}{B_0} = \frac{\omega}{k} = \text{vitesse de phase de l'onde}$$

La valeur de la vitesse de phase sera connue lorsque nous aurons dérivé la relation de dispersion. Notons aussi que

$$\left[ \frac{E}{B} \right] = \frac{\text{V}}{\text{mT}} = \frac{\text{kgm}^2}{\text{As}^3} \times \frac{1}{\text{m}} \times \frac{\text{As}^2}{\text{kg}} = \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

En substituant  $\mathbf{E}$  de (9.6) dans (9.5) :

$$\begin{aligned} E_0 \left[ \frac{\partial^2}{\partial z^2} \exp \{i(\omega t - kz)\} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \exp \{i(\omega t - kz)\} \right] = 0 \\ -E_0 [k^2 - \varepsilon_0 \mu_0 \omega^2] = 0 \end{aligned}$$

Pour éviter la solution triviale  $E_0 = 0$ , il faut que

$$\omega^2 = \frac{k^2}{\varepsilon_0 \mu_0} = k^2 c^2 \quad (9.8)$$

où  $c$  est la vitesse de phase.  $\left[ \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0} \right] = \frac{\text{kgm}^2 \text{m}}{\text{A}^2 \text{s}^4} \frac{\text{A}^2 \text{s}^2 \text{m}}{\text{kgm}^2} = \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}$  et numériquement vaut  $c^2$ .

Remarquez aussi que  $(\mu_0 / \varepsilon_0)^{1/2}$  a la dimension d'une résistance et vaut  $377 \Omega$ . On obtient cette valeur par  $E/(B/u_0)$ .  $377 \Omega$  est appelé "impédance" du vide.

La relation (9.8) indique que la relation de dispersion des ondes est linéaire :

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{k}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \\ c &= \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \end{aligned}$$

Ces ondes sont donc non dispersives. Les quantités perturbées sont les champs électrique  $\mathbf{E}$  et magnétique  $\mathbf{B}$ .

$$\mathbf{E} = (E_0, 0, 0) \exp \{i(\omega t - kz)\}$$

$$\mathbf{B} = (0, B_0, 0) \exp \{i(\omega t - kz)\}$$

$$\mathbf{k} = (0, 0, k)$$

avec

$$\frac{E_0}{B_0} = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = c$$

Dans le vide et avec le système SI, l'amplitude du champ magnétique  $B_0$  est donnée par

$$B_0 \text{ [T]} = \frac{E_0 \text{ [V/m]}}{c \text{ [m/s]}}$$

avec  $c = 299\,792\,458 \text{ m/s}$ .

Ces ondes sont appelées **ondes électromagnétiques**. Les champs  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{B}$  sont en phase. Nous pouvons représenter, à un instant donné, les quantités  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{k}$  (figure 9.1).

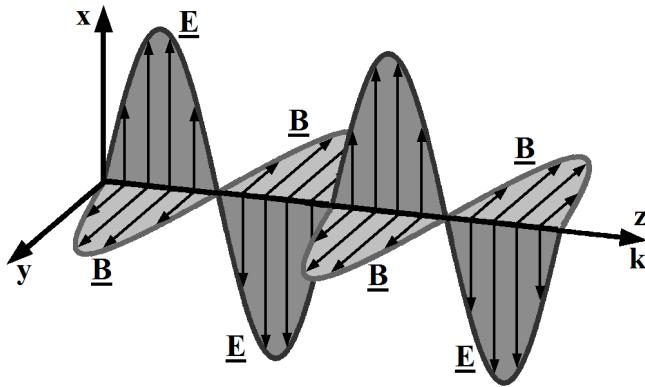


FIGURE 9.1 – Onde électromagnétique dans le vide, avec propagation selon  $z$ . Nous avons supposé que  $\mathbf{E}$  est selon  $\mathbf{e}_x$  et  $\mathbf{B}$  selon  $\mathbf{e}_y$ .

Les champs  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{B}$  étant perpendiculaires à  $\mathbf{k}$ , **l'onde électromagnétique est une onde transverse**.

Nous avons utilisé, pour dériver la relation de dispersion, seulement les équations en rotationnel. Il est aisément de calculer les expressions des équations en divergence.

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \text{ car } E_z = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0 \text{ car } B_z = 0$$

Ces deux équations sont donc aussi satisfaites.

Remarquons que la relation de dispersion des ondes électromagnétiques dans le vide fait intervenir seulement  $\varepsilon_0$  et  $\mu_0$ , constantes qui interviennent dans d'autres expressions comme la force de Coulomb entre deux charges (pour  $\varepsilon_0$ ) ou la loi de Biot et Savart (pour  $\mu_0$ ). Elles peuvent donc être déterminées en dehors du cadre des ondes électromagnétiques (cf. 9.5.3.).

### 9.5.3 Ondes électromagnétiques et lumière

Ce fut le mérite de Maxwell de proclamer que les ondes électromagnétiques qu'il a dérivées à partir des équations de Maxwell décrivent la lumière !

Comment a-t-il raisonné ? Il a d'abord remarqué que la vitesse de phase  $\omega/k$  pouvait être déterminée à partir des constantes  $\varepsilon_0$  et  $\mu_0$  (avec nos notations modernes). A l'époque (vers 1860), les meilleures mesures (Weber et Kohlrausch) donnaient

$$\frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = 310\,740\,000 \text{ ms}^{-1}$$

D'autre part, la mesure de la vitesse de la lumière par Fizeau donnait

$$c = 314\,858\,000 \text{ ms}^{-1}$$

Citons Maxwell :

*The velocity of light in air, as determined by M. Fizeau, is 70 843 leagues per second (25 leagues to a degree) which gives*

$$\begin{aligned} V &= 314\,858\,000\,000 \text{ millimetres per second} \text{ (c'est-à-dire } c) \\ &= 195\,647 \text{ miles per second} \end{aligned}$$

*The velocity of transverse undulations in our hypothetical medium (c'est-à-dire les ondes électromagnétiques), calculated from the electro-magnetic experiments of MM. Kohlrausch and Weber, agrees so exactly with the velocity of light calculated from the optical experiments of M. Fizeau, that we can scarcely avoid the inference that light consists in the transverse undulations of the same medium which is the cause of electric and magnetic phenomena.*

L'accord entre les deux valeurs

$$\frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$$

et  $c$  est de 1.3%. Notez et admirez la hardiesse du rapprochement : *we can scarcely avoid the inference...*

Notez aussi qu'avec cette remarque, Maxwell présente une vue unifiée de toutes les radiations connues à son époque (c'est-à-dire la lumière), mais aussi de celles découvertes plus tard dans tout le spectre de fréquence, depuis les fréquences extrêmement basses (comme les phénomènes à 50 Hz) jusqu'aux rayons X,  $\gamma$ , etc.

Ce fut en 1888 que Hertz génera et détecta les ondes électromagnétiques avec des appareils de laboratoire, et confirma la théorie de Maxwell<sup>3</sup>.

En guise de conclusion, citons<sup>4</sup> Hertz :

*What is Maxwell's theory ? I know no shorter or more definite answer than the following : Maxwell's theory is Maxwell's system of equations.*

3. Pour une description de l'expérience de Hertz, voir p. ex. *An introduction to Classical Electromagnetic radiation* par G. S. Smith, éd. Cambridge, p. 161.

4. Cité dans D. M. Siegel, *Innovation in Maxwell's Electromagnetic Theory*.

Citons également cette remarque conclusive du même ouvrage de Siegel, remarque qui nous semble très intéressante pour la Section de Mathématiques, et qui est sous-jacente à tout ce cours de physique :

*Ultimately, then, Maxwell's electromagnetic theory comes to play a central role in... the transition to a twentieth century **emphasis on the "system of equations" as the essence of physical theory.***

Notez finalement que la vitesse de la lumière dans le vide a été choisie comme étalon (avec la seconde) pour définir le mètre.

Le mètre est la distance parcourue par la lumière dans le vide pendant un intervalle de temps de 1/299 792 458 s.

Dit autrement,  $c$  est 299 792 458 m/s. Les valeurs de  $\mu_0$  et  $\varepsilon_0$  sont :

$$\begin{aligned}\mu_0 &= 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H/m} \\ \varepsilon_0 &= 1/c^2 \mu_0 = 8.854\ 187\ 817 \cdot 10^{-12} \text{ F/m}\end{aligned}$$

#### 9.5.4 Polarisation

Dans l'exemple de la section 9.5.2, nous avons arbitrairement choisi la direction du champ  $\mathbf{E}$  selon la direction  $\mathbf{e}_x$  par rapport à la direction du vecteur d'onde  $\mathbf{k}$  qui, lui, est fixé selon  $\mathbf{e}_z$ .  $\mathbf{B}$  est alors selon  $\mathbf{e}_y$  (voir figure 9.2).  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{k}$  forment un trièdre droit.

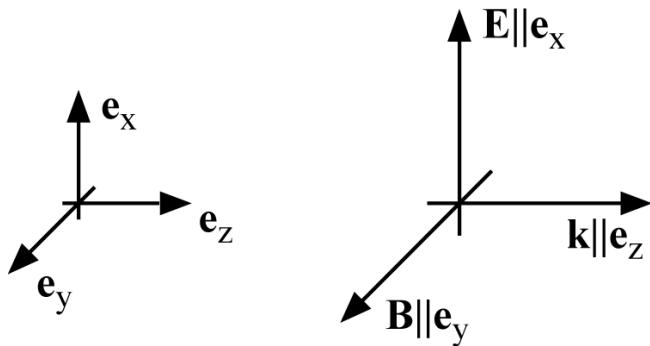


FIGURE 9.2 –  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{k}$  : trièdre droit

Nous disons dans ce cas que l'onde électromagnétique est **linéairement polarisée** avec le champ électrique selon  $\mathbf{e}_x$  :

$$\mathbf{E} = \mathbf{e}_x E_0 \cos(\omega t - kz)$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{e}_y B_0 \cos(\omega t - kz)$$

Nous pouvons aussi choisir  $\mathbf{E}$  selon  $\mathbf{e}_y$  :

$$\mathbf{E} = \mathbf{e}_y E_0 \cos(\omega t - kz)$$

Dans ce cas,  $\mathbf{B}$  doit être tel que le trièdre  $(\mathbf{E}, \mathbf{B}, \mathbf{k})$  est un trièdre droit. Donc

$$\mathbf{B} = -\mathbf{e}_x B_0 \cos(\omega t - kz)$$

On dit alors que l'onde est linéairement polarisée avec son vecteur  $\mathbf{E}$  selon  $\mathbf{e}_y$ .

Notez que, d'une manière générale, la lumière ( $\equiv$  onde électromagnétique dont la longueur d'onde  $\lambda$  est dans le domaine d'environ 300-600 nm) n'est pas polarisée.

Vous pouvez aussi avoir le cas où le champ électrique  $\mathbf{E}$  tourne dans le plan  $(O\mathbf{e}_x\mathbf{e}_y)$

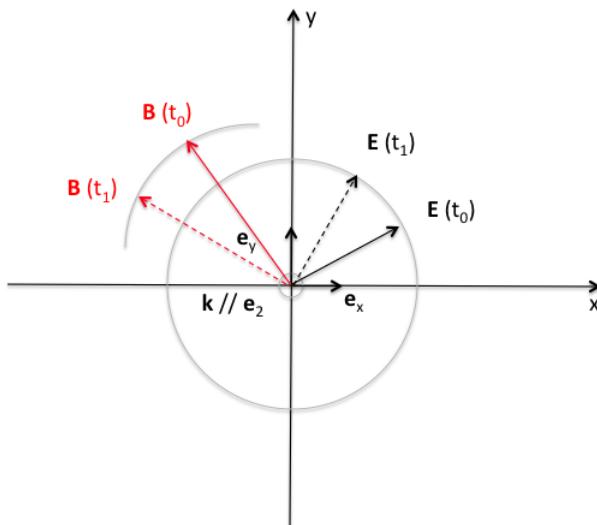


FIGURE 9.3 – Champs  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{B}$  dans le cas d'une polarisation circulaire.

Le vecteur  $\mathbf{E}(t)$  à une position  $Z$  donné peut décrire

- a) un cercle dans le sens trigonométrique
- b) un cercle dans le sens des aiguilles d'une montre
- c) une ellipse dans le sens trigonométrique
- d) une ellipse dans le sens des aiguilles d'une montre

Le cas a) est appelé "Polarisation circulaire gauche", b) "Polarisation circulaire droite", c) "Polarisation elliptique gauche" et d) "Polarisation elliptique droite".

Le vecteur champ magnétique  $\mathbf{B}$  est perpendiculaire à  $\mathbf{E}$  de sorte que  $(\mathbf{E} \times \mathbf{B})$  est parallèle à  $\mathbf{k}$ .

Notez que la lumière naturelle n'est pas polarisée. C'est en la passant à travers un "polariseur" qu'elle devient polarisée.

### 9.5.5 Vecteur de Poynting et transport d'énergie

Considérons les ondes électromagnétiques émises depuis le soleil jusqu'à nous. Notre expérience nous dit que ces ondes transportent de l'énergie. Les exemples scientifiques sont les effets photovoltaïques, le chauffage, et moins scientifiquement le bronzage !

La puissance transportée par unité de surface par une onde électromagnétique est donnée par le vecteur de Poynting  $\mathbf{S}$  :

$$\mathbf{S} = \frac{\mathbf{E} \wedge \mathbf{B}}{\mu_0} \quad (9.9)$$

Du point de vue dimensionnel,

$$\begin{aligned} [S] &= \frac{\text{VTA}}{\text{mTm}} = \frac{\text{VA}}{\text{m}^2} \\ &= \frac{\text{k} \cdot \text{g} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{A}}{\text{A} \cdot \text{s}^3 \cdot \text{m}^2} = \frac{\text{k} \cdot \text{g} \cdot \text{m}^2}{\text{s}^2} \frac{1}{\text{m}^2} \\ &= \frac{\text{Nm}}{\text{s}} \times \frac{1}{\text{Surface}} \\ [S] &= \frac{\text{Puissance}}{\text{Surface}} \end{aligned}$$

$\mathbf{S}$  est un flux de puissance lié aux champs  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{B}$ .

Pour une onde électromagnétique plane avec  $\mathbf{k} = (0, 0, k)$ , le vecteur de Poynting  $\mathbf{S}$  est dirigé selon  $\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{E}$  selon  $\mathbf{e}_x$  et  $\mathbf{B}$  selon  $\mathbf{e}_y$ .

Quelle est la signification du vecteur de Poynting ? Calculons l'intégrale suivante :

$$\frac{d}{dt} \int_V \left[ \frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0} \right] dV$$

où  $V$  est un volume fixe.  $\epsilon_0 E^2/2$  et  $B^2/2\mu_0$  ont la dimension d'une densité d'énergie et sont respectivement les densités d'énergie électrique et magnétique.

$$\frac{d}{dt} \int_V \left[ \frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0} \right] dV = \int_V \left[ \epsilon_0 \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right] dV$$

Rappelons que, dans le vide ( $\mathbf{j} = 0$ ),

$$\nabla \wedge \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \wedge \mathbf{B} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

$$\frac{d}{dt} \int_V \left[ \frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0} \right] dV = \int_V \left[ \frac{\mathbf{E}}{\mu_0} \cdot (\nabla \wedge \mathbf{B}) - \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} \cdot (\nabla \wedge \mathbf{E}) \right] dV \quad (9.10)$$

Rappelons l'identité

$$\nabla \cdot (\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \wedge \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \wedge \mathbf{B})$$

Le membre de droite de l'équation (9.10) est donc

$$- \int_V \nabla \cdot \left( \frac{\mathbf{E} \wedge \mathbf{B}}{\mu_0} \right) dV$$

et l'équation (9.10) devient

$$\frac{d}{dt} \int_V \left[ \frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0} \right] dV = - \int_V \nabla \cdot \left( \frac{\mathbf{E} \wedge \mathbf{B}}{\mu_0} \right) dV \quad (9.11)$$

$\frac{\epsilon_0 E^2}{2}$  et  $\frac{B^2}{2\mu_0}$  sont les densités d'énergie électrique et magnétique vues dans les chapitres 5.6.4 et 8.5.3.

Soit  $S$  la surface qui entoure  $V$ . Le théorème de la divergence nous permet de transformer le membre de droite de (9.11) en

$$- \int_S \frac{\mathbf{E} \wedge \mathbf{B}}{\mu_0} \cdot \mathbf{dS}$$

On a donc l'équation

$$\frac{d}{dt} \int_V \left[ \frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0} \right] dV = - \int_S \frac{\mathbf{E} \wedge \mathbf{B}}{\mu_0} \cdot \mathbf{dS} \quad (9.12)$$

La variation temporelle de la somme des énergies électrique et magnétique dans un volume  $V$  est égale à l'opposé du flux du vecteur de Poynting à travers la surface  $S$  qui entoure le volume  $V$ . Le signe  $-$  est lié à la direction de  $\mathbf{dS}$  qui pointe vers l'extérieur. L'équation 9.12 décrit en fait la conservation de l'énergie électromagnétique

$$\int_V \left[ \frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0} \right] dV$$

### 9.5.6 Vecteur de Poynting dans quelques cas particuliers

#### a) Conducteur coaxial

Considérons un conducteur coaxial de géométrie cylindrique (figure 9.4).

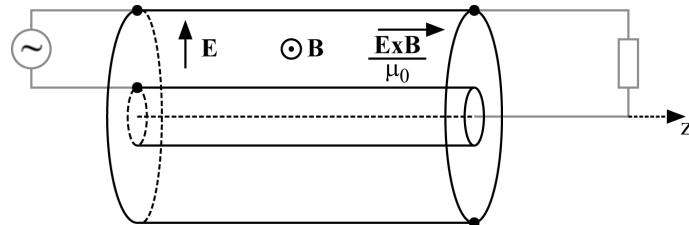


FIGURE 9.4 – Conducteur coaxial

Le champ  $\mathbf{E}$  est radial,  $\mathbf{B}$  est azimuthal<sup>5</sup> et  $\mathbf{S} = \frac{\mathbf{E} \wedge \mathbf{B}}{\mu_0}$  est selon  $\mathbf{e}_z$ .

#### b) Conducteur à 2 fils

Considérons le cas des deux fils électriques dans la distribution de puissance électrique classique (figure 9.5).

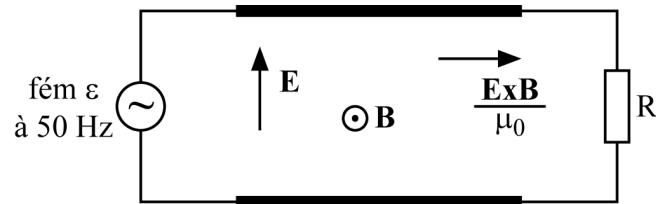


FIGURE 9.5 – Deux fils parallèles

Là encore, la puissance électrique est portée par le vecteur de Poynting dans la région entre les deux fils. En dehors de cette région, les champs  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{B}$  sont faibles et on peut négliger le vecteur de Poynting.

Ce dernier exemple nous montre que l'on peut aborder les phénomènes électromagnétiques de deux points de vue :

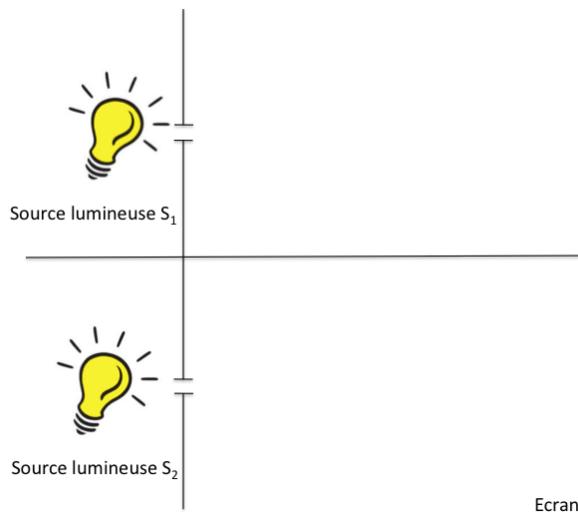
- du point de vue des circuits électriques : la puissance dissipée dans  $R$  est amenée à travers le courant  $I$  et la fém  $\epsilon$ ,
- du point de vue de Maxwell : la puissance est amenée par le champ électromagnétique ( $\mathbf{E}, \mathbf{B}$ ) et est décrite par le vecteur de Poynting  $\mathbf{S} = \frac{\mathbf{E} \wedge \mathbf{B}}{\mu_0}$ .

5.  $\mathbf{B}$  est azimuthal selon la loi d'Ampère car le courant dans le conducteur central est selon  $\mathbf{e}_z$ .

Cette deuxième approche nous permet de résoudre le petit problème suivant. La vitesse des électrons dans le fil de Cu est de l'ordre de 2 mm/h. Mais dès que vous avez appuyé sur l'interrupteur, la lumière s'allume. En fait, l'énergie est transportée par les champs électromagnétiques ( $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$ ), qui se propagent à la vitesse  $c$ .

### 9.5.7 Retour sur les phénomènes d'interférence

Nous avons vu au Chapitre 3.3 le phénomène d'interférence. Si la lumière est une onde de lumière, pourquoi l'expérience suivante ne nous donne pas des figures d'interférence ?



Fixons-nous les idées. Prenons une source lumineuse à une longueur d'onde  $\lambda = 500 \text{ nm}$ . L'œil est sensible au domaine de longueur d'onde entre  $500 \text{ nm}$  et  $700 \text{ nm}$ . La fréquence  $\nu$  qui lui est associée est donnée par

$$\nu = c/\lambda = 6 \times 10^{14} \text{ Hz} \quad \text{ou}$$

$$\omega = 2\pi\nu = 3.77 \times 10^{15} \text{ radian/s}$$

Notons que nous avons deux sources lumineuses en  $S_1$  et  $S_2$  à la même longueur d'onde  $\lambda$ . Les champs électriques émis sont donc

$$\mathbf{E}_1 = \tilde{E} \cos(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_1)$$

$$\mathbf{E}_2 = \tilde{E} \cos(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_2 + \varphi)$$

où  $\varphi$  est un déphasage arbitraire entre les sources  $S_1$  et  $S_2$ .

Donc sur l'écran, en appliquant (3.6) du chapitre 3.3

$$\mathbf{E} = 2\tilde{E} \cos\left(\frac{1}{2}kd \sin \theta - \frac{\varphi}{2}\right) \cos(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_1 - \frac{1}{2}kd \sin \theta + \frac{\varphi}{2})$$

La seule différence formelle avec la formule (3.6) est que l'amplitude  $2\tilde{E} \cos(\frac{1}{2}kd \sin \theta)$  est remplacée par  $2\tilde{E} \cos(\frac{1}{2}kd \sin \theta - \frac{\varphi}{2})$ .

A ce stade, nous devons faire plusieurs remarques, liées à la physique des phénomènes en cours :

1. le déphasage  $\varphi$  varie avec le temps :  $\varphi = \varphi(t)$  entre  $[0$  et  $2\pi]$ . Cette variation est beaucoup plus rapide que la période  $2\pi/\omega$ . La condition

$$\frac{1}{2}kd \sin \theta - \frac{\varphi(t)}{2} = n\frac{\pi}{2}$$

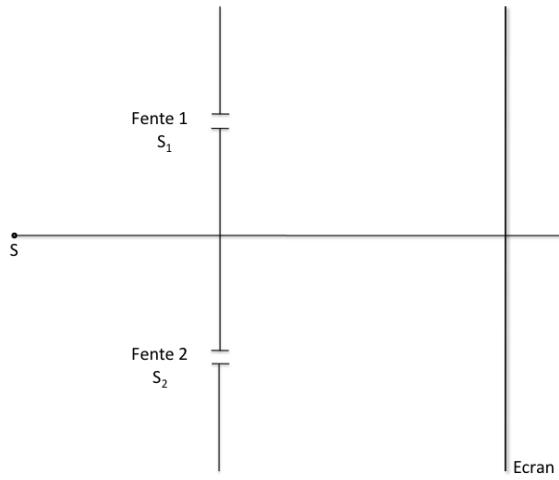
devient

$$\frac{1}{2}kd \sin \theta = n\frac{\pi}{2} + \varphi(t)$$

2. l'oeil (tout comme tout autre appareil) est sensible au vecteur de Poynting  $S \times |E|^2$  et intègre le signal sur une intervalle de temps  $T_{int} \gg 2\pi/\omega$ .

En conséquence, à cause de la remarque 1), on ne peut pas voir les figures d'interférence : la condition décrite sous 1. n'est pas remplie que pour un temps  $t$  donné dans l'intervalle  $0 < t < T_{int}$ . Les zones de maximum et de minimum bougent tout le temps !

Pour voir les figures d'interférence, on doit faire l'arrangement suivant (expérience de Young)



Les champs en  $S_1$  et  $S_2$  ont tous les deux le même déphasage  $\varphi(t)$  en tout temps. La propriété que deux sources lumineuses, même exactement à la même fréquence  $\nu$ , sont déphasées par  $\varphi(t)$  est appelée non cohérence. La phase d'une source non cohérente à un point fixe change d'une manière aléatoire. Seule la lumière d'un laser est cohérente.

A cette étape, nous avons encore

$$I \times 4|E_0|^2 \cos^2 \left( \frac{kd \sin \theta}{2} \right)$$

et l'on a toujours des interférences !

## 9.6 Interprétation des différents termes dans les équations de Maxwell

### 9.6.1 Introduction du problème

Si les équations de Maxwell sont particulièrement simples dans le vide ( $\rho = 0, \mathbf{j} = 0$ ), nous devons bien comprendre la signification de  $\rho_{el}$  et  $\mathbf{j}$  lorsque nous nous trouvons dans la matière. Prenons les deux équations où nous avons  $\rho$  et  $\mathbf{j}$  :

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho_{el}}{\varepsilon_0} \text{ (Equation de Poisson)}$$

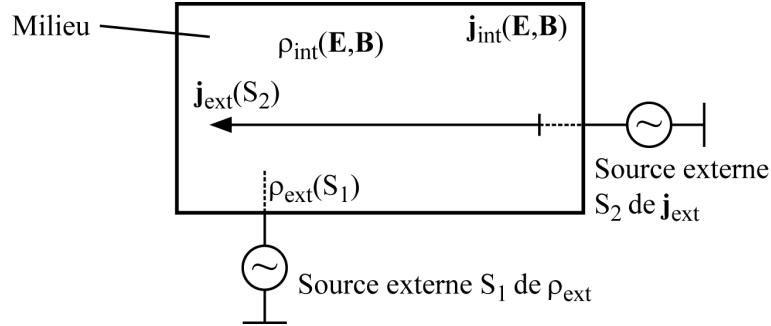
$$\nabla \wedge \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

Dans un milieu porteur de charge, en chaque point, il existe une densité de charge  $\rho$  et une densité de courant  $\mathbf{j}$ . La densité de charge  $\rho_{el}$  a deux contributions : la densité de charge  $\rho_{int}$  produite par les charges du milieu et une densité de charge  $\rho_{ext}$  introduite par l'expérimentateur. Les charges du milieu sont sensibles aux champs  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{B}$  donnés par les équations de Maxwell, donc  $\rho_{int}$  dépend de  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{B}$ . Par contre,  $\rho_{ext}$  est introduite par l'expérimentateur et est donc contrôlée par un appareillage externe au milieu et insensible à  $\mathbf{E}$  ou  $\mathbf{B}$ .

De même, nous devons distinguer  $\mathbf{j}_{int}$ , causé par le mouvement des charges  $\rho_{int}$  et donc influencé par  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{B}$ , de  $\mathbf{j}_{ext}$ , créé par un appareillage externe au milieu et insensible à  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{B}$ .

Nous avons donc comme équations de Maxwell

$$\begin{aligned} \nabla \wedge \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \wedge \mathbf{B} &= \mu_0 (\mathbf{j}_{int} + \mathbf{j}_{ext}) + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \varepsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E} &= (\rho_{int} + \rho_{ext}) \end{aligned}$$



### 9.6.2 Interprétation physique de $\rho_{ext}$ et $\mathbf{j}_{ext}$

Reprendons le cas souvent évoqué du système WiFi dans la salle de classe et identifions les  $\rho_{int}$ ,  $\mathbf{j}_{int}$ ,  $\rho_{ext}$  et  $\mathbf{j}_{ext}$ . On assimile l'air au vide en ce qui concerne les propriétés électromagnétiques :

$$\rho_{int} = \mathbf{j}_{int} = 0$$

Nous notons au fond de la salle l'antenne WiFi. Dans cette antenne, il circule un courant oscillant caractérisé par une densité de courant  $\mathbf{j}_{ext}$  dans la région de l'espace où se trouve l'antenne.

$$\mathbf{j}_{ext} \begin{cases} \neq 0 \text{ là où se trouve l'antenne} \\ = 0 \text{ ailleurs} \end{cases}$$

Du point de vue mathématique, nous avons les équations de Maxwell suivantes :

$$\begin{aligned} \nabla \wedge \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \wedge \mathbf{B} &= \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mu_0 \mathbf{j}_{ext} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{E} &= 0 \end{aligned}$$

avec

$$\mathbf{j}_{ext} = \begin{cases} \mathbf{j}_{ext}(\mathbf{r}, t) \text{ dans la région de l'antenne} \\ = 0 \text{ ailleurs} \end{cases}$$

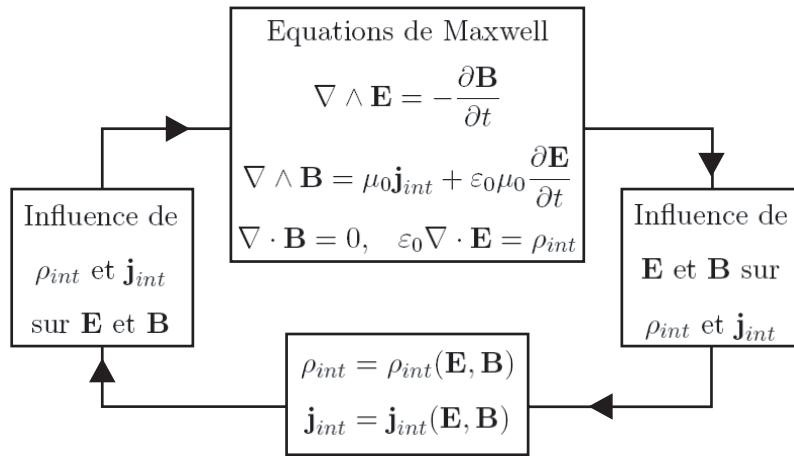
$\mathbf{j}_{ext}$  est la source qui crée les ondes électromagnétiques dans la région de l'antenne : elle fixe l'amplitude et la fréquence de l'onde dans cette région. Cette onde se propage depuis cette région dans tout le reste de la salle, pour être éventuellement captée par l'antenne de votre ordinateur.

### 9.6.3 Equations de Maxwell dans un milieu diélectrique

Nous considérons d'abord un milieu où  $\rho_{ext} = \mathbf{j}_{ext} = 0$  et où il y a simplement  $\rho_{int}$  et  $\mathbf{j}_{int}$ . La densité de charge  $\rho_{int}$  et la densité de courant  $\mathbf{j}_{int}$  dépendent de  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{B}$  à travers la force de Lorentz :

$$\mathbf{F} = q [\mathbf{E} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}]$$

Dans la pratique, calculer la relation entre  $\rho_{int}$  et  $\mathbf{j}_{int}$  et  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{B}$  n'est pas simple. Schématiquement, nous avons le schéma suivant :



La partie la plus complexe du problème est de calculer la relation  $\rho_{int} = \rho_{int}(\mathbf{E}, \mathbf{B})$  et  $\mathbf{j}_{int} = \mathbf{j}_{int}(\mathbf{E}, \mathbf{B})$ . Diverses méthodes existent, comme les théories fluides ou les théories cinétiques. Nous ne les discuterons pas ici.

Comme nous ne savons pas décrire  $\rho_{int}$  et  $\mathbf{j}_{int}$  en fonction de  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{B}$ , nous faisons une approche plus phénoménologique. Une telle approche a déjà été discutée lorsque nous avons montré l'influence d'un diélectrique sur la capacité d'un condensateur. Rappelons qu'un condensateur rempli d'un diélectrique a une capacité donnée par

$$C_{diel} = \epsilon C_{vide}$$

où  $C_{diel}$  est la capacité du condensateur rempli de diélectrique,  $C_{vide}$  la capacité du condensateur sans le diélectrique et  $\epsilon$  la constante diélectrique relative caractéristique du diélectrique considéré.

Sans donner une démonstration, les équations de Maxwell dans un milieu diélectrique sont :

$$\begin{aligned} \nabla \wedge \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \wedge \mathbf{B} &= \epsilon_0 \epsilon \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \epsilon_0 \epsilon \nabla \cdot \mathbf{E} &= 0 \end{aligned}$$

Notez que l'introduction de  $\varepsilon$  n'a fait que déplacer le problème de la théorie (calculer  $\rho_{int} = \rho_{int}(\mathbf{E}, \mathbf{B})$ ,  $\mathbf{j}_{int} = \mathbf{j}_{int}(\mathbf{E}, \mathbf{B})$ ) à la détermination de  $\varepsilon$  ! Souvent on introduit

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \mathbf{E}$$

**D** est appelé **vecteur déplacement électrique**. Les équations de Maxwell sont donc

$$\begin{aligned}\nabla \wedge \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \wedge \mathbf{B} &= \mu_0 \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{D} &= 0\end{aligned}$$

si  $\varepsilon$  ne dépend ni de  $t$  ni de  $\mathbf{r}$ .

En remplaçant **D** par  $\varepsilon_0 \varepsilon \mathbf{E}$ , on obtient

$$\begin{aligned}\nabla \wedge \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \wedge \mathbf{B} &= \varepsilon_0 \varepsilon \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\end{aligned}$$

On voit que par rapport au vide, ce sont les mêmes équations si on remplace  $\varepsilon_0$  par  $\varepsilon_0 \varepsilon$ . Par conséquent, la relation de dispersion des ondes électromagnétiques planes dans un diélectrique possédant une constante diélectrique relative  $\varepsilon$  est

$$\frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} \sqrt{\varepsilon}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}}$$

L'indice de réfraction  $n$  est défini comme

$$n = \frac{kc}{\omega} = \sqrt{\varepsilon}$$

$\varepsilon$  étant plus grand que 1, l'indice de réfraction est supérieur à 1. Dans un diélectrique, la vitesse de phase de l'onde est inférieure à  $c$ .

Si nous avons des charges et courants externes alors

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{B} &= \mu_0 \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mu_0 \mathbf{j}_{ext} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{D} &= \rho_{ext} \\ \mathbf{D} &= \varepsilon_0 \varepsilon \mathbf{E}\end{aligned}$$

A l'interface entre deux diélectriques, la composante normale de  $\mathbf{D}$  est discontinue s'il y a une charge externe de surface  $\sigma_{ext}$ . Si  $\sigma_{ext} = 0$ , alors la composante normale de  $\mathbf{D}$  est continue :

$$[D_{\perp}]_1^2 = 0 = \varepsilon_2 E_{\perp}^{(2)} - \varepsilon_1 E_{\perp}^{(1)}$$

## 9.7 Transformation des champs $\mathbf{E}$ et $\mathbf{B}$

### 9.7.1 Introduction

La question que nous posons est la suivante : dans un certain référentiel  $\mathcal{R}$ , nous avons un champ  $\mathbf{E}$  et un champ  $\mathbf{B}$ . Comment se transforment-ils lorsque nous les observons dans un référentiel  $\mathcal{R}'$  en mouvement uniforme par rapport à  $\mathcal{R}$ ? Dans le cadre de cette introduction, nous ne pourrons malheureusement pas démontrer les formules de transformation. Contentons-nous de dire que les formules de transformation satisfont toutes les exigences de la théorie de relativité restreinte. En particulier, les lois de la physique sont invariantes lors d'une transformation d'un référentiel à un autre référentiel qui se meut à une vitesse linéaire uniforme.

Nous supposons que le référentiel  $\mathcal{R}'$  bouge par rapport à  $\mathcal{R}$  avec une vitesse  $\mathbf{v} = (0, 0, v)$  uniforme avec  $v < c$ . Nous définissons  $\beta = v/c$  où  $c$  est la vitesse de la lumière.

### 9.7.2 Formules de transformation

Soient  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{B}$  les champs électrique et magnétique dans le référentiel  $\mathcal{R}$ .  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{B}$  satisfont les équations de Maxwell. Soient  $\mathbf{E}'$  et  $\mathbf{B}'$  les transformés de ces champs dans le référentiel  $\mathcal{R}'$ . Nous exigeons aussi que  $\mathbf{E}'$  et  $\mathbf{B}'$  satisfassent les équations de Maxwell dans le référentiel  $\mathcal{R}'$  où les coordonnées d'espace sont  $(x', y', z')$  et le temps  $t'$ .

Rappelons tout d'abord que  $(x', y', z', t')$  dans  $\mathcal{R}'$  sont liés à  $(x, y, z, t)$  dans  $\mathcal{R}$  par la transformation de Lorentz :

$$\begin{aligned} x' &= x \\ y' &= y \\ z' &= \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}(z - vt) \\ t' &= \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \left( t - \frac{v}{c^2}z \right) \end{aligned}$$

Sans démonstration, nous donnons la transformation des champs  $(\mathbf{E}, \mathbf{B})$  en  $(\mathbf{E}', \mathbf{B}')$  :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} B'_x & = & \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} (B_x + \frac{v}{c^2} E_y) \\ B'_y & = & \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} (B_y - \frac{v}{c^2} E_x) \\ B'_z & = & B_z \\ E'_x & = & \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} (E_x + v B_y) \\ E'_y & = & \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} (E_y - v B_x) \\ E'_z & = & E_z \end{array} \right.$$

Ces relations donnent un résultat étonnant : les champs électrique et magnétique n'ont pas d'existence indépendante comme des entités séparées. Prenons par exemple le cas d'un champ  $\mathbf{B}$  créé par des aimants permanents et observé dans le référentiel  $\mathcal{R}$ . Dans  $\mathcal{R}$ , nous avons donc seulement  $\mathbf{B}$ , et  $\mathbf{E} = 0$ . Les formules de transformation nous donnent :

$$\left\{ \begin{array}{l} B'_x = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} B_x \\ B'_y = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} B_y \\ B'_z = B_z \end{array} \right.$$

Le champ  $\mathbf{B}'$  est modifié par rapport à  $\mathbf{B}$  : les composantes  $x$  et  $y$  sont augmentées par le facteur  $(1 - \beta^2)^{-1/2}$ . Mais le fait important est l'apparition du champ électrique  $\mathbf{E}'$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} E'_x = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} (-v B_y) \\ E'_y = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} (v B_x) \\ E'_z = 0 \end{array} \right.$$

Nous notons que le vecteur  $(E'_x, E'_y, 0)$  n'est autre que

$$\mathbf{E}' = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} (\mathbf{v} \wedge \mathbf{B})$$

car

$$(\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}) = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ 0 & 0 & v \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

$$(\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}) = \mathbf{e}_x (-v B_y) + \mathbf{e}_y (v B_x)$$

Dans  $\mathcal{R}'$ , outre le champ magnétostatique  $\mathbf{B}'$ , nous avons aussi un champ électrostatique  $\mathbf{E} = (1 - \beta^2)^{-1/2} (\mathbf{v} \wedge \mathbf{B})$ . Pour de faibles vitesses  $v/c \ll 1$ ,  $(1 - \beta^2)^{-1/2} \approx 1$ . Alors :  $\mathbf{E}' = \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}$ .

Prenons le cas inverse. Dans  $\mathcal{R}$ , nous avons une charge fixe et le champ qu'elle génère est un champ électrostatique  $\mathbf{E}$ . Il n'y a pas de champ magnétostatique  $\mathbf{B}$  :  $\mathbf{B} = 0$ . De

nouveau, dans  $\mathcal{R}'$ , nous pouvons calculer le champ  $\mathbf{E}'$  :

$$\begin{cases} E'_x = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} E_x \\ E'_y = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} E_y \\ E'_z = E_z \end{cases}$$

En plus, dans  $\mathcal{R}'$ , nous avons un champ magnétostatique  $\mathbf{B}'$  :

$$\begin{cases} B'_x = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \left( \frac{v}{c^2} E_y \right) = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{v}{c} \frac{E_y}{c} \\ B'_y = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \left( -\frac{v}{c^2} E_x \right) = -\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{v}{c} \frac{E_x}{c} \\ B'_z = B_z \end{cases}$$

Donc

$$\mathbf{B}' = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \left( \frac{\mathbf{E}}{c} \wedge \frac{\mathbf{v}}{c} \right)$$

Pour l'observateur dans  $\mathcal{R}'$ , outre le champ électrostatique  $\mathbf{E}'$ , il existe aussi un champ  $\mathbf{B}'$ . Comme nous savons que les lois de physique sont valables aussi dans  $\mathcal{R}'$ , on peut dire que  $\mathbf{B}'$  doit être généré par un courant. D'où vient ce courant ? Dans  $\mathcal{R}'$ , la charge immobile dans  $\mathcal{R}$  est en mouvement : toute charge en mouvement correspond à un courant et c'est ce courant qui crée  $\mathbf{B}'$ .

Ce petit calcul montre que les champs  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{B}$  sont intimement liés. On peut trouver un référentiel où seul un champ existe et dans un autre où  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{B}$  existent.

## 9.8 Loi de l'optique géométrique et équations de Maxwell

Nous nous proposons de retrouver, au moins pour le cas le plus simple, la loi de la réflexion sur une surface métallique plane à partir des équations de Maxwell.

Hypothèse :

Nous considérons une onde électromagnétique plane incidente sur une surface métallique plane. La géométrie est donnée sur la figure 9.6.

Le plan d'incidence est défini par le vecteur d'onde  $\mathbf{k}_i$  de l'onde incidente et la normale  $\mathbf{n}$  ( $\|\mathbf{n}\| = 1$ ) à la surface métallique. Sur la figure 9.6, c'est le plan de la feuille.

Les champs électriques  $\mathbf{E}_i$  et magnétique  $\mathbf{B}_i$  sont indiqués sur la figure. ( $\mathbf{E}_i$ ,  $\mathbf{B}_i$  et  $\mathbf{k}_i$ ) forment un trièdre direct. La dépendance de  $\mathbf{E}_i$  et  $\mathbf{B}_i$  sont

$$\mathbf{E}_i = \mathbf{E}_{oi} \exp\{i(\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r} - \omega t)\}$$

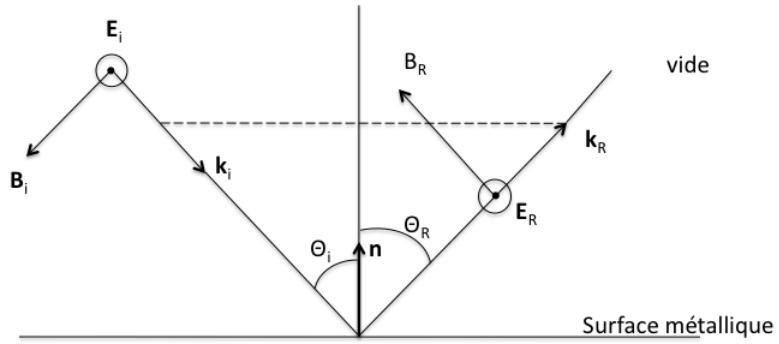


FIGURE 9.6 – Réflexion sur surface métallique plane

$$\mathbf{B}_i = \mathbf{B}_{oi} \exp\{i(\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r} - \omega t)\}$$

avec

$$\frac{\omega}{k_i} = c = \text{vitesse de la lumière}$$

$$\frac{||\mathbf{E}_{oi}||}{||\mathbf{B}_{oi}||} = c$$

Les champs réfléchis sont notés avec l'indice R

$$\mathbf{E}_R = \mathbf{E}_{0R} \exp\{i(\mathbf{k}_R \cdot \mathbf{r} - \omega t)\}$$

$$\mathbf{B}_R = \mathbf{B}_{0R} \exp\{i(\mathbf{k}_R \cdot \mathbf{r} - \omega t)\}$$

L'onde réfléchie se propageant également dans le vide nous avons

$$\frac{\omega}{k_R} = c \quad \text{et} \quad \frac{||\mathbf{E}_{0R}||}{||\mathbf{B}_{0R}||} = c$$

Montrons que  $\Theta = \Theta_R$  c'est-à-dire que l'angle d'incidence est égal à l'angle de réflexion.

À la surface métallique définie par  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} = 0$  nous avons

$$\mathbf{E}_{0i} \exp\{i\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}\} + \mathbf{E}_{0R} \exp\{i\mathbf{k}_R \cdot \mathbf{r}\} = 0 \quad \forall \mathbf{n} \cdot \mathbf{r} = 0 \quad (9.13)$$

par suite de deux considérations physiques :

- a) dans le métal le champ  $\mathbf{E}$  est nul
- b) le champ  $\mathbf{E}$  est continu à l'interface car il est tangentiel

Faisons maintenant quelques manipulations vectorielles. Nous avons  $\forall \mathbf{r}$  dans l'espace

$$\mathbf{r} = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{r})\mathbf{n} - \mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{r})$$

Donc sur l'interface  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} = 0$ ,  $\mathbf{r}$  est donné par

$$\mathbf{r} = -\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{r})$$

La condition (9.13) étant vraie pour tout  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} = 0$  nous devons avoir

$$\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r} = \mathbf{k}_R \cdot \mathbf{r} \quad (\forall \mathbf{n} \cdot \mathbf{r} = 0 \Leftrightarrow \forall \mathbf{r} = -\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{r}))$$

$$\mathbf{k}_i \cdot (\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{r})) = \mathbf{k}_R \cdot (\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{r}))$$

or

$$\mathbf{k}_i \cdot (\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{r})) = (\mathbf{k}_i \times \mathbf{n}) \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{r})$$

$$\mathbf{k}_R \cdot (\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{r})) = (\mathbf{k}_R \times \mathbf{n}) \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{r})$$

Donc

$$[(\mathbf{k}_i \times \mathbf{n}) - (\mathbf{k}_R \times \mathbf{n})] \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{r}) = 0 \quad \forall \mathbf{r} \text{ tel que } \mathbf{n} \cdot \mathbf{r} = 0$$

$$\Rightarrow (\mathbf{k}_i \times \mathbf{n}) = (\mathbf{k}_R \times \mathbf{n}) \Rightarrow \|\mathbf{k}_i \times \mathbf{n}\| = \|\mathbf{k}_R \times \mathbf{n}\|$$

De plus  $\|\mathbf{n}\| = 1$  et  $\|\mathbf{k}_i\| = \|\mathbf{k}_R\| = \frac{c}{\omega}$ .

On doit donc avoir

$$\sin \Theta_R = \sin(\pi - \Theta_i) = \sin \Theta_i$$

C'est la loi de la réflexion bien connue.

Les directions de  $\mathbf{E}_i$  et de  $\mathbf{E}_R$  sont indiquées sur la figure.

D'une manière générale, on peut retrouver les autres lors de l'opération géométrique à partir des équations de Maxwell. [cf. p. ex. Electromagnetic theory par J. D. Stratton p. 490 et suivantes]

## 9.9 Appendice - Potentiels

### 9.9.1 Potentiels vecteur $\mathbf{A}$ et scalaire $\Phi$

Reprendons les équations de Maxwell :

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (9.14)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (9.15)$$

A partir de la première équation 9.14, nous pouvons définir  $\mathbf{B}$  par :

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (9.16)$$

car

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$$

L'équation 9.15 devient :

$$\nabla \times \left( \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right)$$

soit

$$\begin{aligned} \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} &= -\nabla \Phi \\ \mathbf{E} &= -\nabla \Phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \end{aligned} \quad (9.17)$$

On voit donc que  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{B}$  peuvent être exprimés par les potentiels vectoriel  $\mathbf{A}$  et scalaire  $\Phi$ . Pour exprimer  $\mathbf{A}$  et  $\Phi$ , nous utilisons les deux dernières équations de Maxwell :

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (9.18)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (9.19)$$

où  $\rho$  et  $\mathbf{J}$  sont respectivement les densités de charge et de courant. En remplaçant 9.16 et 9.17, on a :

$$+\nabla^2 \Phi + \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{A} = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (9.20)$$

$$\begin{aligned}\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) + \frac{1}{c^2} \nabla \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} &= \mu_0 \mathbf{J} \\ \nabla^2 \mathbf{A} - \nabla \left( \nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} &= \mu_0 \mathbf{J} \end{aligned}\quad (9.21)$$

Plusieurs remarques importantes doivent être notées :

- les quatres équations de Maxwell sont réduites aux deux équations couplées 9.20 et 9.21 pour les potentiels  $\mathbf{A}$  et  $\Phi$  et à la définition des champs  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{B}$  9.16 et 9.17
- les quantités physiques sont les champs  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{B}$ . Ce sont  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{B}$  que l'on mesure.
- les potentiels  $\mathbf{A}$  et  $\Phi$  ne sont pas déterminés univoquement. Par exemple, on peut rajouter à  $\Phi$  une constante sans pour cela changer  $\mathbf{E}$ .

Soient deux couples de potentiels ( $\mathbf{A}$  et  $\Phi$ ) et ( $\mathbf{A}'$  et  $\Phi'$ ). Cherchons la condition qui laisse  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{B}$  invariants. Comme  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ , on voit immédiatement que

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla f$$

ne change pas  $\mathbf{B}$ .

$$\nabla \times \mathbf{A}' = \nabla \times \mathbf{A} + \nabla \times (\nabla f) = \nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}$$

$\mathbf{E}$  doit rester invariant lorsque l'on transforme  $\mathbf{A}$  en  $\mathbf{A}'$  :

$$\mathbf{E} = -\nabla \Phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla \Phi - \frac{\partial \mathbf{A}'}{\partial t} + \nabla \frac{\partial f}{\partial t} = -\nabla \Phi' - \frac{\partial \mathbf{A}'}{\partial t}$$

On doit également transformer  $\Phi$  en  $\Phi'$ .

$$\Phi' = \Phi - \frac{\partial f}{\partial t}$$

Les transformations

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla f \quad (9.22)$$

$$\Phi' = \Phi - \frac{\partial f}{\partial t} \quad (9.23)$$

laissent les champs  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{B}$  invariants. On les appelle transformations de jauge et les champs  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{B}$  sont invariants par transformation de jauge. Notons de nouveau que les transformations de jauge et nous laissent encore une liberté de choisir une condition auxiliaire car la fonction scalaire  $f$  est arbitraire. On peut, par exemple, trouver une jauge où

$$\Phi' = 0$$

mais par contre il est impossible de trouver  $\mathbf{A}' = 0$  car ceci implique trois conditions.

### 9.9.2 Jauge de Lorentz

On note que les équations 9.20 et 9.21 couplent  $\mathbf{A}$  et  $\Phi$ . Utilisons le fait que nous pouvons encore imposer une condition scalaire que nous choisissons comme :

$$\nabla \cdot \mathbf{A}_L + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \Phi_L}{\partial t} = 0 \quad (9.24)$$

Ce choix particulier d'une relation entre  $\mathbf{A}_L$  et  $\Phi_L$  est appelé jauge de Lorentz. L'indice  $L$  est mis pour Lorentz. Les équations 9.20 et 9.21 deviennent :

$$\nabla^2 \mathbf{A}_L - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}_L}{\partial t^2} = -\mu_0 \mathbf{J} \quad (9.25)$$

$$\nabla^2 \Phi_L - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi_L}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (9.26)$$

Par la méthode de transformée de Fourier on trouve :

$$\tilde{\mathbf{A}}_L(\omega, k) = \frac{\mu_0 \tilde{\mathbf{J}}}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} \quad (9.27)$$

$$\tilde{\Phi}_L(\omega, k) = \frac{\tilde{\rho}}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} \quad (9.28)$$

Vérifions que  $\tilde{\mathbf{A}}_L$  et  $\tilde{\Phi}_L$  satisfont à la condition 9.24 :

$$-\mu_0 \mathbf{k} \cdot \tilde{\mathbf{J}} + \frac{1}{c^2 \epsilon_0} \omega \tilde{\rho} = \mu_0 \left( -\mathbf{k} \cdot \tilde{\mathbf{J}} + \omega \tilde{\rho} \right) = 0$$

car ce n'est autre que la transformée de Fourier de l'équation de continuité :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0$$

Exprimons maintenant  $\mathbf{A}_L$  et  $\Phi_L$  comme fonction de  $\mathbf{r}$  et  $t$ .

$$\begin{aligned}
\Phi_L(\mathbf{r}, t) &= \int d^3k d\omega \exp[i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})] \\
&= \frac{1}{\epsilon_0} \int d\omega \int k^3 \frac{\tilde{\rho}(\mathbf{k}, \omega)}{k^2 - \omega^2/c^2} \exp[i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})]
\end{aligned} \tag{9.29}$$

Rappelons que nous avons montré que

$$\frac{1}{(2\pi)^3} \int k^3 \frac{\exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}{k^2 - \omega^2/c^2} = \frac{\exp[-i(\omega r/c)]}{4\pi r}$$

d'où par transformation inverse de Fourier

$$\frac{1}{k^2 - \omega^2/c^2} = \int d^3r_0 \frac{\exp(+i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_0) \exp(-i\frac{\omega}{c}\mathbf{r}_0)}{4\pi r_0} \tag{9.30}$$

En insérant 9.30 dans 9.29 on obtient :

$$\begin{aligned}
\Phi_L(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{\epsilon_0} \int d\omega \int d^3k \int d^3r_0 \tilde{\rho}(\mathbf{k}, \omega) \frac{\exp[i\omega t - i\mathbf{k}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) - i\omega r_0/c]}{4\pi r_0} \\
&= \frac{1}{\epsilon_0} \int d\omega \int d^3r_0 \tilde{\rho}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \frac{\exp[i\omega(t - \frac{r_0}{c})]}{4\pi r_0} \\
&= \frac{1}{\epsilon_0} \int d^3r_0 \frac{\rho(t - \frac{r_0}{c}; \mathbf{r} - \mathbf{r}_0)}{4\pi\epsilon_0\mathbf{r}_0}
\end{aligned}$$

En écrivant  $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ , on obtient alors :

$$\Phi_L(\mathbf{r}, t) = \int d^3r_1 \frac{\rho\left(t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|}{c}; \mathbf{r}_1\right)}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|} \tag{9.31}$$

De même

$$\mathbf{A}_L(\mathbf{r}, t) = \int d^3r_1 \frac{\mu_0 \mathbf{J}\left(t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|}{c}; \mathbf{r}_1\right)}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|} \tag{9.32}$$

Il est important de noter que dans l'intégrale, le temps  $t' = t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|}{c}$  n'est pas une constante. Pour un point d'observation donné  $\mathbf{r}$ , et pour un moment d'observation  $t$  donné,  $t'$  doit tenir compte du temps de propagation  $\frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|}{c}$  depuis la source  $\mathbf{r}_1$  jusqu'au point  $\mathbf{r}$

Illustrons ce point en calculant les potentiels  $\Phi$  et  $\mathbf{A}$  produits par une charge en mouvement :

$$\begin{aligned}\rho(\mathbf{r}, t) &= q \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t)) \\ \mathbf{J} &= q \mathbf{v}(t) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t))\end{aligned}$$

Le potentiel scalaire est alors :

$$\Phi_L(\mathbf{r}, t) = q \int d^3 r_1 \frac{\delta\left(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0\left(t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|}{c}\right)\right)}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|} \quad (9.33)$$

La simplicité formelle de l'expression 9.33 cache en fait plusieurs difficultés. Tout d'abord notons que la fonction de Dirac sélectionne un point  $\mathbf{r}_0$  de la trajectoire et un moment  $t_R$  :

$$t_R = t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|}{c}$$

qui donne une contribution au potentiel  $\Phi(t, \mathbf{r})$ . À un point d'observation donné  $\mathbf{r}$  et à un temps d'observation donné  $t$ ,  $t_R$  est constant et  $\mathbf{r}_1(t_R)$  est identique à  $\mathbf{r}_0(t_R)$  :

$$\Phi_L(\mathbf{r}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t_R)|} \int d^3 r_1 \delta\left(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0\left(t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|}{c}\right)\right) \quad (9.34)$$

La deuxième difficulté est liée à la fonction de Dirac dans l'équation 9.34. Formellement cette fonction de Dirac a pour argument une fonction  $f(r_1)$ . La règle dans ce cas est la suivante :

*Si on a  $\delta(f(x))$  et que  $f(x)$  a un zéro d'ordre 1 en  $x = x_1$ , alors autour de  $x_1$  on a :*

$$\delta(f(x)) = \frac{\delta(x - x_1)}{\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=x_1}} \quad (9.35)$$

En effet,  $\delta(f(x)) \simeq \delta\left(\left|(x - x_1) \frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=x_1}\right)$

Revenons à l'équation 9.34 et définissons :

$$\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t_R)$$

et choisissons un système d'axe de coordonnées avec la direction (1) selon  $\mathbf{R}$ . La direction  $\mathbf{R}$  est une direction privilégiée dans le problème : en effet lors de l'évaluation de 9.34,  $\mathbf{r}_0$  doit être évalué en  $t_R$ , c'est-à-dire pour :

$$t_R = t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t_R)|}{c} = t - \frac{|\mathbf{R}|}{c}$$

Autrement dit, le zéro de l'argument de la fonction de Dirac est égal à  $\mathbf{R}$ . En choisissant  $\mathbf{R}$  comme étant l'un des axes (1, par exemple) du système de coordonnées dans lequel nous travaillons, on ramène alors le problème à un problème unidimensionnel.

$$\int d^3r_1 \delta \left( \mathbf{r}_1 - \frac{\mathbf{r}_0(t_R)}{c} \right) = \frac{1}{1 - \frac{\mathbf{v}_0(t_R) \cdot \mathbf{R}}{c|\mathbf{R}|}}$$

où  $\mathbf{v}_0(t_R)$  est la vitesse de la particule en  $(t_R, \mathbf{r}_0)$ .  $\Phi_L$  est donc égal à :

$$\begin{aligned} \Phi_L &= \frac{\rho}{4\pi\epsilon_0 \left( R - \frac{\mathbf{v}_0(t_R) \cdot \mathbf{R}}{c} \right)} \\ \Phi_L(\mathbf{r}, t) &= \frac{\rho}{4\pi\epsilon_0 \left( |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t_R)| - \frac{\mathbf{v}_0(t_R) \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t_R))}{c} \right)} \end{aligned} \quad (9.36)$$

De même :

$$\mathbf{A}_L(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0 \rho}{4\pi} \frac{\mathbf{v}_0(t_R)}{\left( |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t_R)| - \frac{\mathbf{v}_0(t_R) \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t_R))}{c} \right)} \quad (9.37)$$

$$t_R = t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t_R)|}{c} \quad (9.38)$$

$\Phi_L$  et  $\mathbf{A}_L$  donnés par 9.36 et 9.37 sont les potentiels de Liennard-Wiechert retardés, c'est-à-dire que la position et la vitesse de particule doivent être prises sur la trajectoire au temps retardé  $t_R$  donné par 9.38.  $t_R$  dépend explicitement de la trajectoire de la particule, de  $\mathbf{r}$  et de  $t$ . Il est important de se rappeler ce point pour calculer  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{B}$ .

### 9.9.3 Jauge de Coulomb

Une autre manière de découpler les équations 9.20 et 9.21 est de choisir :

$$\nabla \cdot \mathbf{A}_C = 0$$

Ce choix de jauge est appelé jauge de Coulomb.

En effet, l'équation 9.20 devient :

$$\nabla^2 \Phi_C = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

soit

$$\tilde{\Phi}_C = \frac{\tilde{\rho}}{\epsilon_0 k^2} \quad (9.39)$$

$$\Phi_C(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3 r_0 \frac{\rho(\mathbf{r}_0, t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} \quad (9.40)$$

L'indice C est utilisé pour indiquer la jauge de Coulomb. Notons la forme de l'équation 9.40 qui est identique au potentiel coulombien de l'électrostatique.

Considérons maintenant l'équation pour  $\mathbf{A}_C$  :

$$\begin{aligned} \nabla^2 \mathbf{A}_C - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}_C}{\partial t^2} &= -\mu_0 \left( \mathbf{J} - \epsilon_0 \nabla \frac{\partial \Phi_C}{\partial t} \right) \\ \left( -k^2 + \frac{\omega^2}{c^2} \right) \tilde{\mathbf{A}}_C &= -\mu_0 \tilde{\mathbf{J}} + \frac{1}{c^2} \nabla i\omega \tilde{\Phi}_C \end{aligned} \quad (9.41)$$

Le membre de droite de 9.41 peut se simplifier en utilisant l'équation de continuité :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} &= 0 \\ i\omega \tilde{\rho} - i\mathbf{k} \cdot \tilde{\mathbf{J}} &= 0 \\ i\omega k^2 \tilde{\Phi}_C \epsilon_0 &= i\mathbf{k} \cdot \tilde{\mathbf{J}} \end{aligned}$$

$$\tilde{\mathbf{A}}_C = \mu_0 \frac{\tilde{\mathbf{J}} - \frac{\mathbf{k} \cdot \tilde{\mathbf{J}}}{k^2} \mathbf{k}}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} \quad (9.42)$$

On remarque que le potentiel vecteur  $\mathbf{A}_C$  dans la jauge de Coulomb est donné par la composante de  $\mathbf{J}$  transverse à  $\mathbf{k}$  (cf. Appendice suivante)

$$\tilde{\mathbf{J}}_T = \tilde{\mathbf{J}} - \frac{\mathbf{k} \cdot \tilde{\mathbf{J}}}{|k^2|} \mathbf{k} \quad (9.43)$$

$$\mathbf{k} \cdot \tilde{\tilde{\mathbf{J}}}_T = 0$$

$$\tilde{\tilde{\mathbf{A}}}_C = \mu_0 \frac{\tilde{\tilde{\mathbf{J}}}_T}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} \quad (9.44)$$

C'est pour cela que la jauge de Coulomb est aussi appelé jauge transverse. Dans l'espace direct le courant transverse  $\mathbf{J}_T(\mathbf{r}, t)$  est donné par :

$$\mathbf{J}_T(\mathbf{r}, t) = \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{4\pi} \nabla \int d^3 r_0 \frac{\frac{\partial \rho(\mathbf{r}_0, t)}{\partial t}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|}$$

Le courant transverse comporte également une composante qui en chaque point  $\mathbf{r}$  varie instantanément avec la densité de charge. De plus même si  $\mathbf{J}$  et  $\rho$  sont localisées dans l'espace,  $\mathbf{J}_T(\mathbf{r}, t)$  ne l'est pas.

Faisons maintenant quelques remarques sur la jauge de Coulomb. Tout d'abord l'expression explicite de  $\Phi_C(\mathbf{r}, t)$  montre que  $\Phi_C$  ne présente pas le retard : c'est un potentiel instantané. Ce fait illustre l'importance de faire une distinction entre les quantités physiques comme  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{B}$  et les potentiels. Le champ électrique total  $\mathbf{E}$  est formé de la composante électrostatique  $-\nabla \Phi_C(\mathbf{r}, t)$  et d'une composante électromagnétique  $-\frac{\partial \mathbf{A}_C}{\partial t}$ . Les composantes "instantanées" de ces deux champs se compensent de sorte que le champ électrique total est causal. Notons également qu'en relativité restreinte la relation  $\nabla \cdot \mathbf{A}_C = 0$  n'est pas invariante lors d'un changement de référentiel. Par contre la jauge de Lorentz :

$$\nabla \cdot \mathbf{A}_L + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \Phi_L}{\partial t} = 0$$

est invariante lors d'un changement de référentiel dans le cadre de la relativité restreinte. Calculons maintenant  $\mathbf{E}$  dans la jauge de Coulomb :

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= -\nabla \Phi_C - \frac{\partial \mathbf{A}_C}{\partial t} \\ \mathbf{E} &= \mathbf{E}_{es} + \mathbf{E}_{em} \\ \mathbf{E}_{es} &= -\nabla \Phi_C \end{aligned}$$

La composante  $\mathbf{E}_{es}$  est appelée électrostatique ou longitudinale car :

$$\nabla \times \mathbf{E}_{es} = -\nabla \times (\nabla \Phi_C) = 0$$

$\mathbf{E}_{es}$  est parallèle à  $\mathbf{k}$ . Bien entendu,  $\nabla \cdot \mathbf{E}_{es} = \rho/\epsilon_0$

Qu'en est-il de  $\mathbf{E}_{em} = -\frac{\partial \mathbf{A}_C}{\partial t}$ ? Rappelons que  $\mathbf{A}_C$  est généré par le courant transverse :

$$\begin{aligned}\mathbf{J}_T &= \mathbf{J} - \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \nabla \Phi = \mathbf{J} + \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}_{es} \\ \nabla \cdot \mathbf{J}_T &= 0 \Rightarrow \nabla \cdot \mathbf{E}_{em} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{E}_{em} &= -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{A}_C) = -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} \\ \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}_{em} &= -\mu_0 \mathbf{J}_T - \nabla^2 \mathbf{A}_C\end{aligned}$$

Or  $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}_C) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}_C) - \nabla^2 \mathbf{A}_C$ , donc :

$$\mu_0 \mathbf{J}_T + \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}_{em} = \nabla \times \mathbf{B}$$

Notons finalement une autre propriété du courant transverse  $\mathbf{J}_T$ . Prenons la transformée de Fourier inverse dans l'espace  $\mathbf{r}$  :

$$\tilde{\mathbf{J}}_T(\omega, \mathbf{r}) = \int d^3k e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \tilde{\mathbf{J}}_T(\omega, \mathbf{k})$$

En remplaçant  $\tilde{\mathbf{J}}_T$  par sa valeur :

$$\begin{aligned}\tilde{J}_T(\omega, \mathbf{k}) &= \int d^3k \tilde{\mathbf{J}}(\omega, \mathbf{k}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} - \int d^3k \frac{\mathbf{k} \cdot \tilde{\mathbf{J}}(\omega, \mathbf{k})}{|\mathbf{k}|^2} \mathbf{k} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \\ \tilde{\tilde{J}}_T(\omega, \mathbf{k}) &= \tilde{J}_T(\omega, \mathbf{k}) - \int d^3k \frac{\mathbf{k} \cdot \tilde{\mathbf{J}}(\omega, \mathbf{k})}{|\mathbf{k}|^2} \mathbf{k} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}\end{aligned}$$

Or  $\frac{\mathbf{k} \cdot \tilde{\mathbf{J}}(\omega, \mathbf{k})}{|\mathbf{k}|^2} \mathbf{k}$  est la transformée de Fourier de :

$$\tilde{J}_L(\omega, \mathbf{k}) = -\nabla \frac{1}{4\pi} \int d^3r' \frac{\nabla' \cdot \tilde{\mathbf{J}}(r', \omega)}{|r - r'|}$$

où  $\nabla' \cdot \tilde{\mathbf{J}}$  est la divergence de  $\tilde{\mathbf{J}}$  selon la variable  $r'$ .

En effet, calculons la transformée de Fourier de  $\tilde{J}_L(\omega, \mathbf{r})$  donnée par l'expression précédente :

$$\begin{aligned}
\tilde{\tilde{\mathbf{J}}}_L(\omega, \mathbf{k}) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3r \tilde{\mathbf{J}}_L(\omega, r) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \\
&= +i\mathbf{k} \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3r d^3r' \frac{\nabla' \cdot \tilde{\mathbf{J}}(r', \omega)}{|r - r'|} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \frac{1}{4\pi} \\
&= +i\mathbf{k} \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3r \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}}{4\pi|r - r'|} \int d^3r' \nabla' \cdot \tilde{\mathbf{J}}(r', \omega) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}'} \\
&= +i \frac{\mathbf{k}}{|k|^2} \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3r' \nabla' \cdot \tilde{\mathbf{J}}(r', \omega) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}'} \\
&= +\mathbf{k} \frac{\mathbf{k} \cdot \tilde{\tilde{\mathbf{J}}'}}{|k|^2}
\end{aligned}$$

On a donc :

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{J}}_T(\mathbf{r}, \omega) &= \tilde{\mathbf{J}}(\mathbf{r}, \omega) - \nabla \int d^3r' \frac{\nabla' \cdot \tilde{\mathbf{J}}(r', \omega)}{4\pi|r - r'|} \\
&= \tilde{\mathbf{J}}(\mathbf{r}, \omega) - \tilde{\mathbf{J}}_L(\mathbf{r}, \omega)
\end{aligned}$$

Même si le courant  $\mathbf{J}$  est localisé dans l'espace  $\mathbf{r}'$ , les courants longitudinal  $\tilde{\mathbf{J}}_L(\mathbf{r}, \omega)$  et transverse  $\tilde{\mathbf{J}}_T(\mathbf{r}, \omega)$  existent dans tout l'espace. Ceci a pour conséquence que, du point de vue pratique, il ne sera pas possible de considérer le développement en champ lointain pour évaluer  $\mathbf{A}_C$ .

Finalement montrons comment on peut passer de la jauge de Lorentz à la jauge de Coulomb. Les équations 9.9.1 et 9.9.1 appliquées au cas particulier de ces 2 jauge donnent :

$$\mathbf{A}_L = \mathbf{A}_C + \nabla f$$

$$\Phi_L = \Phi_C - \frac{\partial f}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A}_L + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \Phi_L}{\partial t} = 0 = \nabla \cdot \mathbf{A}_C + \nabla^2 f + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \Phi_C}{\partial t} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$$

$$\nabla^2 f - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \Phi_C}{\partial t}$$

Les indices  $C$  et  $L$  désignent respectivement les potentiels dans les jauge de Coulomb et de Lorentz.

A la fin de cette discussion sur la jauge de Coulomb, notons qu'elle est souvent utilisée lorsque  $\rho = 0$ . Dans ce cas  $\Phi = 0$  et

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{A}_C}{\partial t} \\ \mathbf{B} &= \nabla \times \mathbf{A}_C\end{aligned}$$

avec  $\mathbf{J}_T = \mathbf{J}$ .

## 9.10 Appendice - Champ transverse et champ longitudinal

Un champ vectoriel  $\mathbf{v}_L$  est dit longitudinal si

$$\nabla \times \mathbf{v}_L = 0 \quad \text{en tout point de l'espace}$$

Un champ vectoriel  $\mathbf{v}_T$  est dit transverse so

$$\nabla \cdot \mathbf{v}_T = 0 \quad \text{en tout point de l'espace}$$

En transformée de Fourier on a :

$$\mathbf{k} \times \tilde{\mathbf{v}}_L = 0$$

$$\mathbf{k} \cdot \tilde{\mathbf{v}}_T = 0$$

Un champ longitudinal dans l'espace  $\mathbf{k}$  est parallèle à  $\mathbf{k}$  tandis qu'un champ transverse est perpendiculaire à  $\mathbf{k}$ . Cette définition nous permet de décomposer tout vecteur  $\tilde{\mathbf{v}}$  en composantes longitudinale et transverse :

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{v}} &= \tilde{\mathbf{v}}_L + \tilde{\mathbf{v}}_T \\ \tilde{\mathbf{v}}_T &= \tilde{\mathbf{v}} - \frac{\mathbf{k}}{k} \left( \frac{\mathbf{k}}{k} \cdot \tilde{\mathbf{v}} \right) \\ \tilde{\mathbf{v}}_L &= \tilde{\mathbf{v}} - \tilde{\mathbf{v}}_T \\ \mathbf{v}_L &= \int d^3k e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \tilde{\mathbf{v}}_L \\ \mathbf{v}_T &= \int d^3k e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \tilde{\mathbf{v}}_T\end{aligned}$$

# Annexe

## Unités électrique et magnétique

Système SI :  $m, kg, s, A$

[Courant] = Ampère =  $A$

Coulomb =  $A \cdot s$

Champ électrique  $[E] = \frac{\text{Newton}}{\text{Coulomb}} = \frac{kgm}{s^2} \times \frac{1}{As} = \frac{kgm}{As^3}$

$[E] = \frac{\text{Volt}}{m} = \frac{V}{m}$  avec  $\text{Volt} = V = \frac{kgm^2}{As^3}$

Potentiel électrique :  $[\Phi] = \text{Volt}$

Capacité  $C$  d'un condensateur :  $q = CU$

$[C] = \frac{\text{Coulomb}}{\text{Volt}} = \text{Farad} = F$

$\text{Farad} = F = \frac{A \cdot s}{kgm^2/As^3}$

$[C] = \text{Farad} = F = \frac{A^2 s^4}{kgm^2}$

Unité de  $\epsilon_0$ , permittivité du vide

$[\epsilon_0] = \frac{A^2 s^4}{kgm^3} = \frac{F}{m} \quad \epsilon_0 = 8.8 \times 10^{-12} \frac{F}{m}$

Résistance  $R$

$$[R] = \frac{[\Phi]}{[I]} = \Omega = \frac{V}{A} = \frac{k g m^2}{A^2 s^3}$$

Impédance  $Z$

$$[Z] = \Omega$$

Champ magnétique  $B$

$$\text{Force } [F] = [I][m][B]$$

$$[B] = \text{Tesla} = T = \frac{[F]}{[I][m]} = \frac{\text{Newton}}{A \cdot m} = \frac{kg \cdot m/s^2}{A \cdot m} = \frac{kg \cdot m^2}{A^2 s^2}$$

Perméabilité du vide  $\mu_0$

$$[\mu_0] = \frac{T \cdot m}{A} = \frac{kg \cdot m}{A^2 s^2} = \frac{Henry}{m} = \frac{H}{m}$$

$$[H] = \frac{kg \cdot m^2}{A^2 s^2}$$

$$\mu_0 = 4\pi 10^{-7} \frac{H}{m}$$

Inductance  $[L] = Henry$

Relation importante :

$$\frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} = c^2 = \text{Carré de la vitesse de la lumière}$$