

21 Juin 2024

Règlement de l'examen

Il est strictement interdit de consulter l'énoncé de l'examen avant le signal de début !
--

- Avant de commencer un exercice, lire attentivement tout l'énoncé. Certaines remarques, indications, et hypothèses importantes peuvent être à la fin de l'énoncé.
- Il y a cinq exercices. Les points attribués à chaque exercice sont indiqués sur l'énoncé.
- Les réponses doivent être rédigées dans le cahier de réponses. **Chaque question possède un espace de réponse dédié dans le cahier de réponses.** Si vous manquez de place pour répondre à une question, des espaces de secours sont disponibles à la fin du cahier de réponses, dans la section nommée "exercice 6". Indiquer que la réponse continue dans l'espace de secours et, dans l'espace de secours, indiquer à quelle question vous répondez.
- L'utilisation du crayon à papier et du stylo rouge est interdite sur les feuilles rendues pour correction.
- L'utilisation de téléphones portables, smartwatch, calculatrice, ou tout autre appareil électronique est strictement interdite.
- L'examen dure en tout 3h30min à partir du signal de début.
- Mettre votre carte CAMIPRO en évidence sur la table.
- Il n'est pas possible de quitter la salle avant 9h45, même si l'examen a été rendu. De manière générale, il n'est pas permis de quitter la salle sans autorisation.
- Un formulaire manuscrit d'une page A4 recto-verso ainsi que le formulaire du cours sont autorisés durant l'examen.

Bon travail !

Exercice 1 : Cloche de plongée (8 points)

Pour faire de la plongée, vous utilisez une cloche de plongée (une idée ancienne déjà connue au temps d'Aristote). Cette dernière est une cloche métallique, dans ce cas assimilée à un cylindre ouvert en bas et renfermant une certaine quantité d'air. En tant que plongeur, vous avez accès à ce réservoir d'air frais par un tuyau, permettant de respirer sous l'eau. La cloche de plongée est reliée à un flotteur cylindrique par une tige de longueur D et de diamètre négligeable.

- (a) Soit M la masse totale de cette installation (cloche de plongée, tige verticale, flotteur cylindrique, et air enfermé). Quelles sont les valeurs minimale et maximale de M telles que la cloche de plongée ne coule pas et ne remonte pas à la surface ? Vous pouvez négliger la force que le plongeur exerce sur cette installation via le tuyau et considérer h comme une constante. Exprimez votre réponse en fonction des données de l'exercice parmi $r_1, k_1, D, r_2, k_2, h, p_{atm}, g$, et ρ_0 .
- (b) Quelle est la pression de l'air à l'intérieur de la cloche de plongée si le flotteur cylindrique est à moitié dans l'eau ? Exprimez votre réponse en fonction des données de l'exercice parmi $r_1, k_1, D, r_2, k_2, h, p_{atm}, g$, et ρ_0 . Au-delà d'une possible accumulation de CO_2 dans le tube, pourquoi l'idée du plongeur de droite, où le tuyau monte directement à la surface de l'eau, ne fonctionnerait pas pour des profondeurs de quelques mètres ?

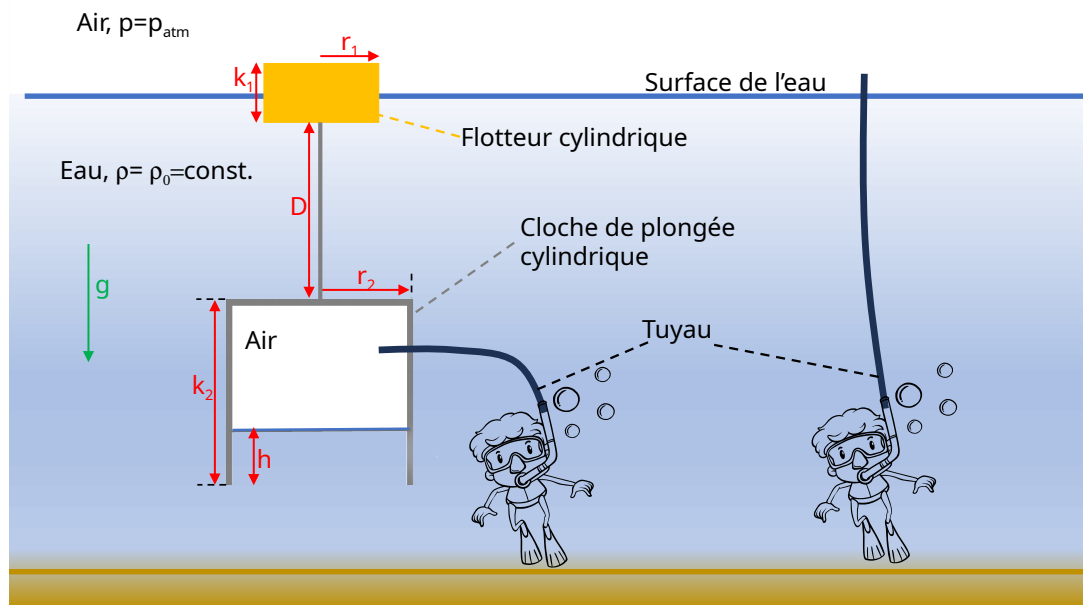


FIGURE 1 – Situation pour les questions (a) et (b)

- (c) Considérez maintenant que vous avez la taille d'une fourmi. À cette échelle, les effets de tension superficielle sont importants. Comme illustré sur la Figure 2, vous pouvez supposer que l'interface liquide-gaz est, en première approximation, sphérique. Est-ce que la situation de la Figure 2 correspond à une situation de bon mouillage ou de mauvais mouillage ? Exprimez la pression de l'air à l'intérieur de la cloche de plongée en fonction des données de l'exercice parmi $r_1, k_1, D, r_2, k_2, h, p_{atm}, g, \rho_0, \theta$ et γ , avec γ la tension superficielle liquide-gaz. Le flotteur cylindrique est à moitié dans l'eau.

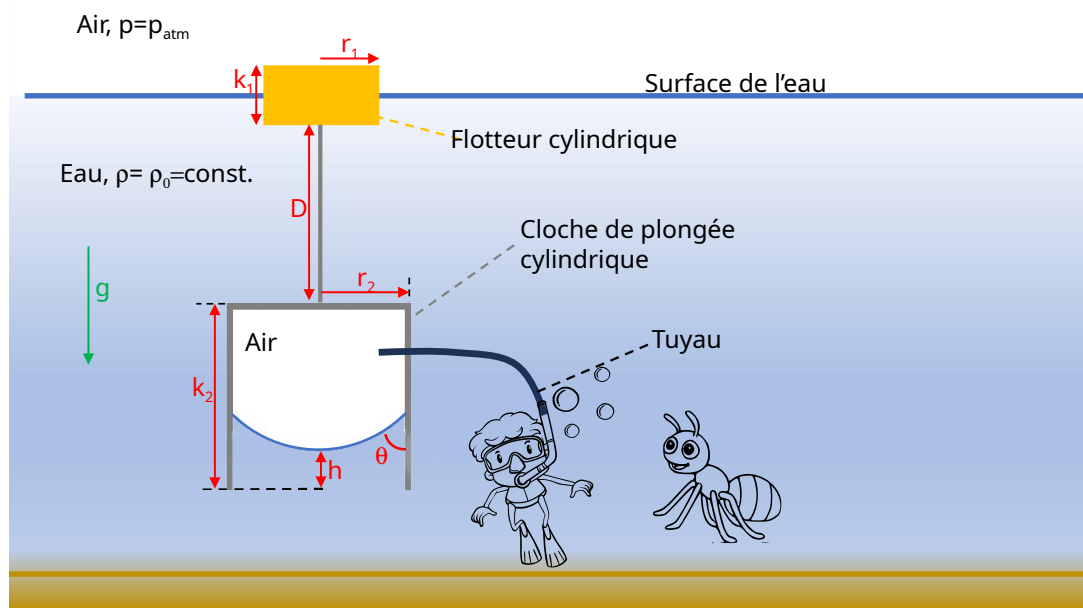


FIGURE 2 – Situation pour la question (c)

- (d) Vous décidez maintenant d'utiliser une cloche de plongée fermée, comme illustré sur la Figure 3 (initialement sans fuite). Vous maintenez une pression atmosphérique à l'intérieur de la cloche à l'aide du tuyau de droite et vous vous servez du tuyau de gauche qui remonte jusqu'à la surface pour respirer. Discuter si cette option peut fonctionner. Malheureusement, il y a maintenant une fuite qui s'ouvre, de section S et à une profondeur H sous la surface de l'eau. En utilisant la loi de Bernoulli, estimez le temps pour remplir le volume V de la cloche de plongée fermée. Vous pouvez supposer que la cloche de plongée reste à la même profondeur pendant tout ce temps. Cette hypothèse est-elle justifiée ?

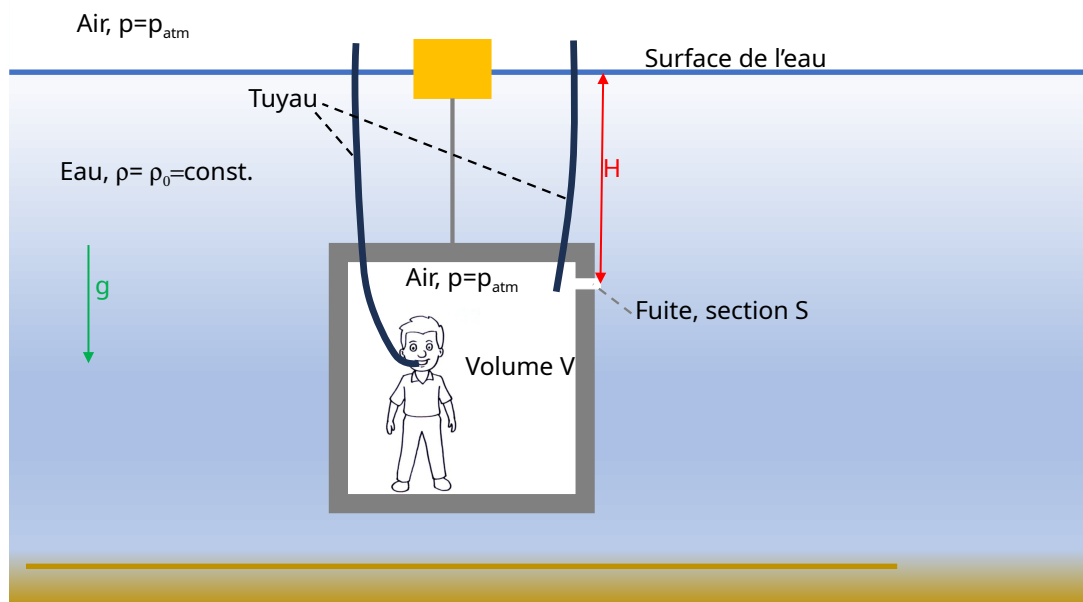


FIGURE 3 – Situation pour la question (d)

Solution :

(a) Les forces s'exerçant sur le système sont :

- Le poids $M\vec{g}$, orienté vers le bas
- La poussée d'Archimède $-\rho_0 V_{tot}\vec{g}$ (équivalent à la somme des forces de pression aux différentes profondeurs) orientée vers le haut.

Cependant, le volume immergé dans l'eau dépend du niveau d'immersion du flotteur, que l'on appelle $k_1 - Z$. Z est donc la hauteur non-immersée du flotteur. On peut re-écrire l'expression de la poussée d'Archimède comme :

$$F_{arch} = V_{tot}(Z)\rho_0 g \quad (1)$$

$$F_{arch} = [(k_1 - Z)\pi r_1^2 + (k_2 - h)\pi r_2^2]\rho_0 g \quad (2)$$

Dans une situation statique, c'est à dire où la cloche ne remonte pas à la surface et ne coule pas, la somme des forces est nulle. Nous pouvons donc égaliser les deux forces dans notre système, vu qu'elles sont dans des directions opposées (\vec{e}_z et $-\vec{e}_z$).

$$Mg = [(k_1 - Z)\pi r_1^2 + (k_2 - h)\pi r_2^2]\rho_0 g \quad (3)$$

La masse maximale du système correspond au moment où le flotteur est intégralement submergé. En effet, si la masse est plus grande que cela, la poussée d'Archimède ne peut plus augmenter pour compenser la masse et le système coule. En contrepartie, la masse minimale correspond à la situation où le flotteur est entièrement hors de l'eau, car si la masse diminue encore, le poids ne sera plus assez grand pour compenser la poussée d'Archimède et la cloche remonte à la surface.

Ainsi,

$$M_{min} = M(Z = k_1) = (k_2 - h)\pi r_2^2 \rho_0 \quad (4)$$

$$M_{max} = M(Z = 0) = [k_1 r_1^2 + (k_2 - h)r_2^2]\pi \rho_0 \quad (5)$$

(b) D'après la loi de l'hydrostatique la pression à l'intérieur de la cloche est égale à la pression de l'eau en contact avec l'air de la cloche. La pression dans la cloche est donc :

$$p = \left(\frac{k_1}{2} + D + k_2 - h\right)\rho_0 g + p_{atm} \quad (6)$$

L'idée du plongeur de droite ne marchera pas au-delà de quelques mètres car la pression de l'eau sur ses poumons sera trop grande. En effet si la pression est trop grande, il n'arrivera pas à gonfler ses poumons suffisamment pour inspirer l'air de la surface. C'est pour cela que les plongeurs sous-marin utilisent un mélange d'air comprimé en bouteille à une plus grande pression que l'air atmosphérique pour surmonter la pression de l'eau environnante.

(c) En utilisant la forme de la surface air-eau donné dans l'énoncé, il s'agit en effet d'une situation de bon mouillage car l'angle formé entre la surface air-eau et le bord de la cloche est inférieur à 90° .

Maintenant que la tension de surface est importante, il y a une différence de pression non-négligeable à l'interface air-eau. Cette différence de pression est proportionnelle à la tension de surface γ :

$$p - p' = \frac{2\gamma \cos(\theta)}{r_2} \quad (7)$$

Où p est la pression dans la cloche et p' est la pression dans l'eau au niveau de l'interface air-eau. En négligeant la variation de hauteur le long de la surface air-eau, on peut donc

exprimer p comme :

$$p = \frac{2\gamma \cos(\theta)}{r_2} + p' \quad (8)$$

$$p = \frac{2\gamma \cos(\theta)}{r_2} + \left(\frac{k_1}{2} + D + k_2 - h\right)\rho_0 g + p_{atm} \quad (9)$$

- (d) Cette option peut fonctionner, car contrairement au plongeur de droite dans la question a), la pression autour du 'plongeur' est la pression atmosphérique donc il n'aura pas de difficultés à gonfler ses poumons pour inspirer l'air de la surface. Il y a tout de même des soucis importants avec cette situation avec l'alimentation d'air frais.

On utilise la loi de Bernoulli d'une façon similaire à l'exercice 2 de la série 6, en choisissant un point A à la surface de l'eau et un point B sur la même ligne de courant au niveau de l'entrée d'eau dans la fuite. La loi de Bernoulli nous dit que

$$\frac{1}{2}\rho v_A^2 + \rho g H + p_{atm} = \frac{1}{2}\rho v_B^2 + 0 + p_{atm} \quad (10)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\rho v_A^2 + \rho g H = \frac{1}{2}\rho v_B^2 \quad (11)$$

Or, d'après la conservation du flux, $v_A S_A = v_B S_B \Rightarrow v_A = v_B \frac{S_2}{S_1} \approx 0$ car la surface de l'eau est beaucoup plus grande que l'ouverture dans la cloche.

On a donc :

$$v_B = \sqrt{2gH} \quad (12)$$

Pour trouver le temps nécessaire pour remplir le volume V , on calcul l'augmentation du volume d'eau de dV dans la cloche pendant un temps dt :

$$dV = S v_B dt \quad (13)$$

en intégrant d'un temps $t_0 = 0$ à un temps t_{fin} ,

$$\int_0^V dV = \int_0^{t_{fin}} S v_B dt = S v_B t_{fin} \quad (14)$$

$$\Rightarrow t_{fin} = \frac{V}{S v_B} = \frac{V}{S \sqrt{2gH}} \quad (15)$$

On note que l'hypothèse que H reste constant dans ce processus n'est pas vraiment justifié ici. Avec l'accumulation de l'eau dans la cloche fermée, celle-ci va commencer à couler.

Exercice 2 : Champ de vitesse (8 points)

On considère l'écoulement d'un fluide parfait et incompressible ($\rho = \rho_0 = \text{const.}$) avec le champ de vitesse suivant :

$$\vec{u}(\vec{r}, t) = \frac{1}{\tau}(x\vec{e}_x - y\vec{e}_y)$$

où $\tau > 0$ est une constante donnée.

(a) Indiquez, dans le plan xy , le vecteur \vec{u} aux points suivants :

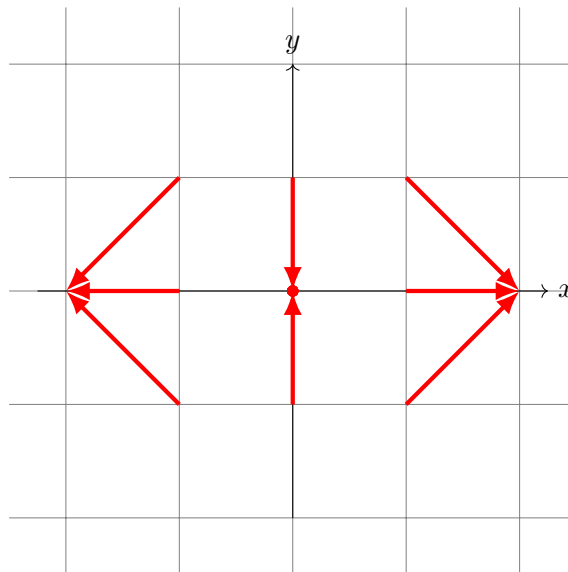
$(x, y) = (-1, 1);$	$(x, y) = (0, 1);$	$(x, y) = (1, 1);$
$(x, y) = (-1, 0);$	$(x, y) = (0, 0);$	$(x, y) = (1, 0);$
$(x, y) = (-1, -1);$	$(x, y) = (0, -1);$	$(x, y) = (1, -1);$

Pour les représentations graphiques, prenez $\tau = 1\text{s}$.

- (b) Démontrez que ce champ de vitesse satisfait l'équation de continuité.
- (c) Déterminez l'accélération d'un élément de fluide en un point (x, y) arbitraire. Tracez qualitativement la forme de la ligne de courant proche du point $(1, 1)$ et passant par ce dernier. Justifiez votre réponse.
- (d) Utilisez l'équation d'Euler pour déterminer l'expression du champ scalaire de pression $p(\vec{r}, t)$ sachant que $p(\vec{r} = \vec{0}, t) = p_0$. Négligez la force de gravité dans l'équation d'Euler.
- (e) Pourquoi ce champ de vitesse ne peut-il pas décrire l'écoulement en tout point de l'espace ? En considérant le résultat de (d), trouvez la valeur maximale de $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ telle que l'expression de $\vec{u}(\vec{r}, t)$ reste valable en tout point.

Solution :

- (a) La représentation du vecteur vitesse aux points demandés et avec $\tau = 1\text{s}$ est visible sur la figure ci dessous.



- (b) Le fluide étant incompressible, sa densité volumique est constante et on a $\rho = \rho_0$. L'équation de continuité s'écrit :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{u}) = \underbrace{\frac{\partial \rho}{\partial t}}_{=0} + \rho \underbrace{\vec{\nabla} \cdot \vec{u}}_{=0} + \underbrace{\vec{u} \cdot \vec{\nabla} \rho}_{=0}$$

Il s'agit donc de s'assurer que $\rho \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0$, ce qui est bien le cas :

$$\begin{aligned} \rho \vec{\nabla} \cdot \vec{u} &= \rho \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) \\ &= \rho \left(\frac{1}{\tau} - \frac{1}{\tau} \right) \\ &= 0 \end{aligned} \tag{16}$$

L'équation de continuité est donc bien satisfaite !

(c) L'accélération d'un élément de fluide est donnée par la formule

$$\begin{aligned}\vec{a} &= \frac{D\vec{u}}{Dt} \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{u} \\ &= \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \left(\vec{u} \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{u}\end{aligned}\tag{17}$$

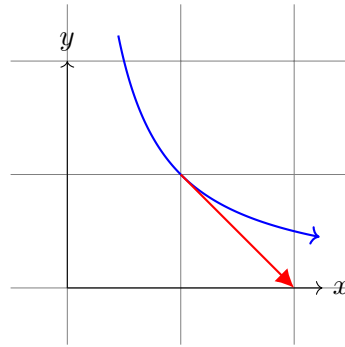
L'écoulement étant caractérisé par un champ de vitesse ne dépendant pas du temps, l'écoulement peut être considéré comme stationnaire. On a donc $\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = 0$ et l'équation (17) nous donne

$$\begin{aligned}\vec{a} &= \left(\vec{u} \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{u} \\ &= \left(u_x \frac{\partial}{\partial x} + u_y \frac{\partial}{\partial y} \right) \vec{u} \\ &= \begin{pmatrix} u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} \\ u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{x}{\tau^2} \\ \frac{y}{\tau^2} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

L'accélération d'un élément de fluide est donc donnée par

$$\vec{a} = \frac{1}{\tau^2} (x\vec{e}_x + y\vec{e}_y)\tag{18}$$

La ligne de courant passant par le point (1,1) est représentée dans la figure ci-dessous.



On peut justifier ça de plusieurs façons.

La plus simple est de dessiner le vecteur \vec{u} à plusieurs points autour du point (1,1) et dessiner la ligne de courant à partir de ça.

On peut alternativement remarquer à partir de l'équation (18) que, au point (1,1), on a $\vec{u} \perp \vec{a}$. Localement, l'accélération est donc purement centripète et on s'attend à observer une courbe qui, proche du point (1,1), se comporte comme celle dans la figure ci-dessus (localement, très proche du point (1,1), la trajectoire peut être considérée un arc de cercle). Il y a aussi une troisième alternative : on peut résoudre l'équation du mouvement et obtenir la trajectoire d'une particule de fluide passant par le point (1,1) au temps $t = 0$ s. En faisant ça on peut montrer qu'on obtient la trajectoire $\vec{r}(t) = (\exp(t/\tau), \exp(-t/\tau))$. On obtient donc que, dans le plan xy , la ligne de courant cherchée est donnée par la courbe représentée dans la figure ci-dessus. Cette courbe est l'hyperbole $xy = 1$, comme on a que $r_x(t)r_y(t) = 1$ pour l'expression trouvée pour $\vec{r}(t)$. Ce dernier raisonnement peut être

appliqué à cet exercice car, dans le cas d'un écoulement stationnaire, les lignes de courant coïncident avec les trajectoires des éléments de fluide.

- (d) Le fluide étant parfait, il n'y pas d'effets liés à la viscosité. En négligeant la gravité, l'équation d'Euler nous donne

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} \right) = -\vec{\nabla} p$$

Donc, l'écoulement étant stationnaire ($\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = \vec{0}$), on a

$$\rho (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} = -\vec{\nabla} p$$

Le membre de gauche $\rho (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}$ a déjà été calculé dans la question (c) de cet exercice.

Projetons maintenant l'équation d'Euler selon les directions \vec{e}_x et \vec{e}_y :

— selon \vec{e}_x : $\frac{1}{\tau^2} \rho x = -\frac{\partial p}{\partial x}$

— selon \vec{e}_y : $\frac{1}{\tau^2} \rho y = -\frac{\partial p}{\partial y}$

Par intégration de la relation selon \vec{e}_x , on conclut que :

$$p(x, y) = -\frac{1}{2} \rho \frac{x^2}{\tau^2} + c_1(y),$$

avec $c_1(y)$ une fonction arbitraire qui ne dépend pas de x .

Par intégration de la relation selon \vec{e}_y , on déduit :

$$p(x, y) = -\frac{1}{2} \rho \frac{y^2}{\tau^2} + c_2(x),$$

avec $c_2(x)$ une fonction indépendante de y .

On a donc que :

$$p(x, y) = -\frac{1}{2} \rho \frac{x^2}{\tau^2} - \frac{1}{2} \rho \frac{y^2}{\tau^2} + c_3,$$

avec c_3 une constante qui ne dépend ni de x ni de y .

En utilisant la condition $p(0, 0) = p_0$, on en déduit finalement que :

$$p(x, y) = -\frac{1}{2\tau^2} \rho (x^2 + y^2) + p_0$$

- (e) Ce champ de vitesse ne peut pas décrire l'écoulement partout dans l'espace car pour $x, y \rightarrow \pm\infty$ on a $|u| \rightarrow \infty$, ce qui n'est pas un écoulement physique. De plus, vu que la pression diminue en s'éloignant de $(0, 0)$, on obtiendrait une valeur négative de pression lorsque le terme négatif de l'équation (d) devient plus grand que p_0 .

Or, on peut écrire la fonction $p(x, y)$ en fonction de $r = \sqrt{x^2 + y^2}$:

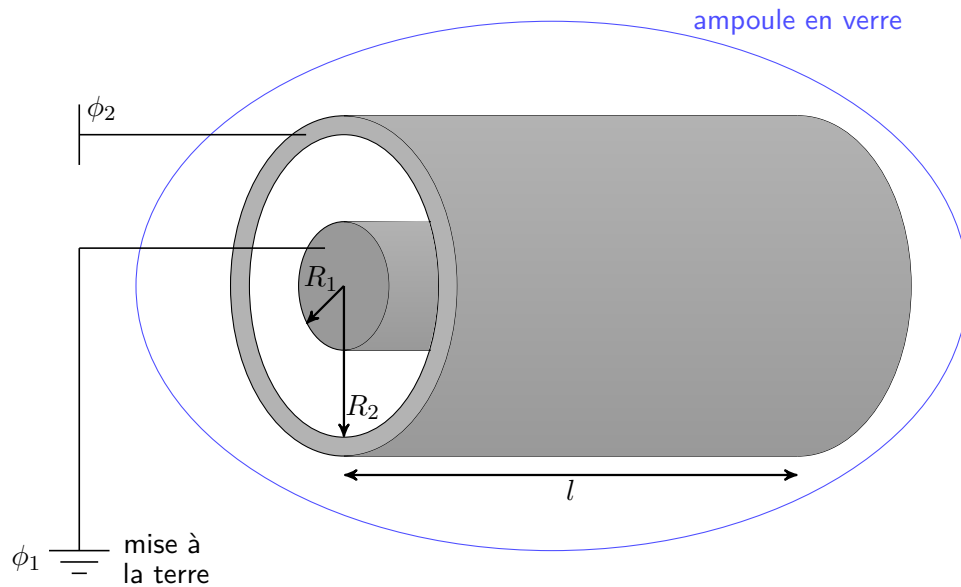
$$p(r) = -\frac{1}{2\tau^2} \rho r^2 + p_0 \quad (19)$$

La pression devient négative si on considère des valeurs de r plus grandes que une valeur maximale r_{max} , correspondant à la valeur de r telle que $p(r) = 0$. On obtient donc r_{max} en imposant $p(r) = 0$

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2\tau^2} \rho r^2 + p_0 &= 0 \\ \Rightarrow r_{max} &= \sqrt{\frac{2\tau^2 p_0}{\rho}} \end{aligned}$$

Exercice 3 : Diode à vide (6 points)

On considère une diode à vide constituée de deux conducteurs métalliques montrés sur la figure ci-dessous, caractérisés par les rayons R_1 et R_2 . Ils ont une longueur $l \gg R_2$ et ils se trouvent à l'intérieur d'une ampoule en verre dans laquelle on a fait le vide. Le conducteur interne est maintenu à un potentiel électrostatique $\phi_1 = \text{const.} = 0$. Le potentiel du conducteur externe ϕ_2 est variable. Le conducteur interne est chauffé à une température suffisamment élevée pour qu'une émission thermoélectronique ait lieu (des électrons sont éjectés de la surface du conducteur interne vers le volume entre les deux conducteurs). Le nombre d'électrons éjectés par le conducteur interne par unité de temps est donnée par k et est indépendant de ϕ_2 . Dans cet exercice, vous pouvez négliger l'effet de la gravité. En plus, vous pouvez supposer que les électrons sont éjectés radialement, c'est-à-dire avec vitesse initiale perpendiculaire à la surface du conducteur interne.



- Pour $\phi_2 > 0$, quel est le courant circulant entre le conducteur interne et externe ? Et quelle est la norme et la direction de la densité de courant juste en dehors du conducteur interne ?
- La vitesse maximale des électrons éjectés est donnée par v_0 . Trouvez l'expression du potentiel $\phi_{2,crit}$ du conducteur externe à partir duquel aucun de ces électrons n'atteint le conducteur externe. Puis, tracer qualitativement le courant I entre le conducteur interne et externe en fonction de ϕ_2 (on considérera des valeurs positives et négatives de ϕ_2 pour tracer le graphe de la fonction $I(\phi_2)$).

Solution :

- Si le conducteur externe est à un potentiel $\phi_2 > 0$, il y aura un champ électrique allant du conducteur externe au conducteur interne ($\vec{E} = -\nabla\phi$). Donc, tous les électrons éjectés du conducteur interne seront accélérés et atteindront le conducteur externe. Comme k électrons, chacun de charge $-e$, sont éjectés par unité de temps, le courant circulant entre le conducteur interne et externe est donné par

$$I = -k e \quad (20)$$

qui est bien un courant comme k et e ont respectivement des unités de s^{-1} et C . Le courant est négatif comme on nous demande le courant qui circule entre conducteur interne et externe.

Or, on sait que l'aire de la surface extérieure du conducteur interne vaut $S_1 = 2\pi R_1 l$. Donc, avec l'expression de I dérivée en (20), la norme de la densité de courant \vec{j}_1 juste en dehors

du conducteur interne vaut

$$\begin{aligned} j_1 &= \frac{|I|}{S_1} \\ &= \frac{ke}{2\pi R_1 l} \end{aligned}$$

La direction de la densité de courant sera radiale ; de plus, elle sera orientée vers l'intérieur, comme le courant est négatif. Finalement, la densité de courant est donc donnée par

$$\vec{j}_1 = -\frac{ke}{2\pi R_1 l} \vec{e}_r$$

- (b) On peut décrire qualitativement la situation comme suit. Si le conducteur externe est à un potentiel $\phi_2 > 0$, tous les électrons éjectés seront accélérés et atteindront ce conducteur indépendamment de leur vitesse d'éjection. Si par contre $\phi_2 < 0$, les électrons seront décélérés ; ceux qui sont éjectés avec une vitesse plus élevée qu'une valeur minimale atteindront le conducteur externe, les autres seront réfléchis et retomberont sur le conducteur interne. En plus, il y aura une valeur critique $\phi_{2,crit} < 0$ telle que si $\phi_2 < \phi_{2,crit}$ aucun électron n'atteindra le conducteur externe.

Ceci peut être compris en utilisant la conservation de l'énergie totale pour les électrons éjectés. On peut appliquer ce principe comme il n'y a aucune force non conservative. Pour un électron de masse m_e , de charge $-e$ et de vitesse v sous l'effet d'un champ de potentiel électrostatique ϕ , cette énergie peut être exprimée comme

$$\begin{aligned} E_{tot} &= \frac{1}{2}m_e v^2 + q\phi + m_e gh \\ &= \frac{1}{2}m_e v^2 - e\phi \end{aligned}$$

où on a négligé la contribution de l'énergie potentielle gravitationnelle. Considérons un électron éjecté de la surface du conducteur interne à la vitesse maximale v_0 . Comme $\phi_1 = 0$, son énergie initiale au moment de l'éjection vaut donc

$$E_{in} = \frac{1}{2}m_e v_0^2 \quad (21)$$

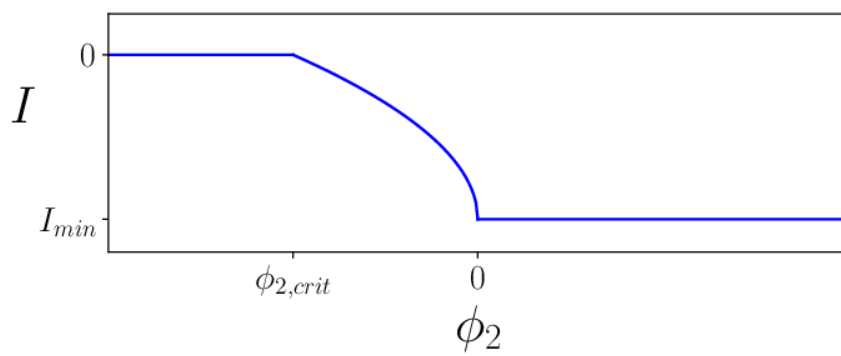
Or, on veut trouver $\phi_{2,crit}$ tel que seulement les électrons éjectés avec vitesse v_0 atteignent le conducteur externe. Dans ce cas limite un tel électron atteindra le conducteur externe avec vitesse nulle, avec énergie finale

$$E_f = 0 - e\phi_{2,crit} = -e\phi_{2,crit} \quad (22)$$

pendant que tous les électrons éjectés avec vitesse plus petite que v_0 seront réfléchis. Comme par conservation de l'énergie totale on a $E_{in} = E_f$, à partir des équations (21) et (22) on obtient

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}m_e v_0^2 &= -e\phi_{2,crit} \\ \implies \phi_{2,crit} &= -\frac{m_e v_0^2}{2e} \end{aligned} \quad (23)$$

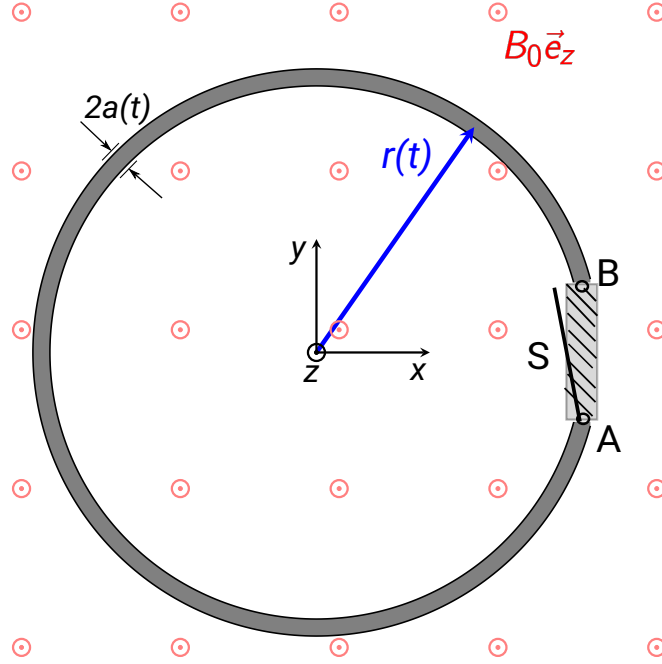
On dessine qualitativement le courant entre les deux conducteurs en fonction de ϕ_2 dans la figure ci-dessous.



Exercice 4 : Induction dans un fil élastique (6 points)

On considère la situation montrée dans la figure suivante. Une boucle de conducteur élastique de section circulaire est tenue en forme de cercle. Entre les points **A** et **B** (qui sont reliés par un isolant de longueur négligeable), il y a un interrupteur **S**. Le tout est plongé dans un champ magnétique constant $\vec{B} = B_0 \vec{e}_z$.

À un instant $t_0 > 0$ donné, le fil formant la boucle est lâché. Par conséquent, il se comprime en gardant à tout moment une forme de cercle dans le plan xy . Dans l'intervalle de temps $[t_0, t_1]$ pendant cette compression, le rayon du cercle varie comme $r(t) = ct^{-\alpha}$, avec c et α des constantes positives, et le rayon du fil $a(t)$ satisfait $a(t) \ll r(t)$.



- On suppose d'abord que l'interrupteur **S** est ouvert, de telle sorte qu'aucun courant ne peut circuler dans le fil. Quelle est la tension induite dans la boucle pour $t \in [t_0, t_1]$? Exprimez le résultat en fonction des quantités données.
- Pour le reste de l'exercice, l'interrupteur **S** est fermé. Donnez la direction du courant circulant dans le fil. Est-ce que la force de Lorentz ressentie par le fil tend à accélérer ou ralentir la compression du fil? Justifiez votre réponse.
- Exprimez la résistance de ce fil en fonction des quantités données. Supposez que le volume total du fil reste constant au cours du temps et est donné par V_0 . Le fil a une conductivité σ_c qui ne varie pas en fonction de la longueur du fil. Finalement, déterminez le courant $I(t)$ qui circule dans la boucle, en négligeant les effets d'auto-inductance ainsi que la résistance de l'interrupteur **S**.

Solution :

- Du fait du champ magnétique, il existe un flux magnétique à travers la surface $\Sigma(t)$ définie par le cercle de rayon $r(t)$. Si l'on oriente, comme le système de coordonnées, donné $d\vec{\Sigma} = d\Sigma \vec{e}_z$, alors ce flux s'exprime

$$\phi_{B_0}(t) = \iint_{\Sigma(t)} \vec{B} \cdot d\vec{\Sigma} = B_0 \Sigma(t) = B_0 \pi (ct^{-\alpha})^2$$

La variation temporelle de la surface $\Sigma(t)$ génère une variation du flux dans le temps, ce

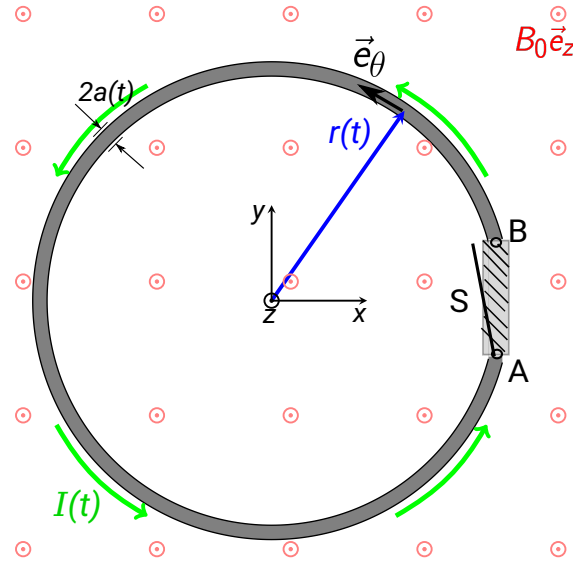
qui induit l'apparition d'une force électromotrice dans le fil. D'après la loi de Faraday, la force électromotrice induite s'écrit

$$\varepsilon_{\text{ind}} = -\frac{d\phi_{B_0}}{dt} = -\frac{d}{dt}(B_0\pi(ct^{-\alpha})^2)$$

D'où

$$\varepsilon_{\text{ind}} = 2\alpha B_0\pi c^2 t^{-(2\alpha+1)}$$

- (b) Avec l'orientation choisie pour $d\vec{\Sigma}$, le sens conventionnel du courant (selon lequel $I > 0$) respectera la règle de la main droite et sera selon \vec{e}_θ . En accord avec la règle de Lenz, le courant induit I dans la boucle crée un champ magnétique induit B_{ind} qui s'oppose au changement du flux magnétique qui crée le courant induit. Puisque le flux magnétique diminue avec le temps, B_{ind} sera le long de \vec{e}_z et, compte tenu de la règle de la main droite, la direction du courant doit être \vec{e}_θ (comme indiqué en vert sur le schéma).



Autrement, on peut aussi argumenter de la manière suivante. En considérant uniquement la résistance électrique du fil R ainsi que la force électromotrice induite, la loi des mailles donne

$$-RI + \varepsilon_{\text{ind}} = 0$$

et donc

$$RI = 2\alpha B_0\pi c^2 t^{-(2\alpha+1)}$$

Étant donné que $\alpha > 0$, on a $I > 0$ et donc la circulation du courant se fait effectivement selon l'orientation du schéma.

Comme un courant passe par le fil, il est sujet à la force de Lorentz, qui a l'expression $d\vec{F} = Id\vec{l} \times \vec{B}$. Comme $d\vec{l} = r(t)d\theta\vec{e}_\theta$, il y a

$$d\vec{F} = Id\vec{l} \times \vec{B} = Ir(t)B_0d\theta(\vec{e}_\theta \times \vec{e}_z) = Ir(t)d\theta B_0\vec{e}_r$$

La force est orientée selon la direction positive de \vec{e}_r , donc elle tend à ralentir la compression du fil.

- (c) Tout d'abord, on calcule la résistance du fil R . Puisque le volume du fil est constant au cours du temps, il y aura, pour $t \in [t_0, t_1]$

$$V_0 = 2\pi r(t)\pi a^2(t)$$

d'où

$$a^2(t) = \frac{V_0}{2\pi^2 r(t)} = \frac{V_0}{2\pi^2 c} t^\alpha$$

Par conséquent, l'expression de la résistance, considérant la conductivité $\sigma_c = 1/\rho_c$, est

$$R(t) = \rho_c \frac{2\pi r(t)}{\pi a^2(t)} = \frac{4\pi^2}{\sigma_c V_0} r^2(t) = \frac{4\pi^2 c^2}{\sigma_c V_0} t^{-2\alpha}$$

En remplaçant l'expression de R dans la formule pour I trouvée à la question précédente, on obtient

$$I(t) = \frac{\varepsilon_{\text{ind}}(t)}{R(t)} = \frac{2\alpha B_0 \pi c^2 t^{-(2\alpha+1)}}{\frac{4\pi^2 c^2}{\sigma_c V_0} t^{-2\alpha}} = \frac{\sigma_c B_0 V_0}{2\pi} \frac{\alpha}{t}$$

L'augmentation de la section du fil et la réduction de sa longueur compensent en partie la diminution de ε_{ind} avec le temps et le courant diminue avec le temps seulement comme t^{-1} .

Exercice 5 : Cage de Faraday : cas statique et non-statique (10 points)

Dans cet exercice, on se propose d'étudier le phénomène d'écrantage d'une cage de Faraday pour le champ électromagnétique généré par une particule ponctuelle de charge $q < 0$.

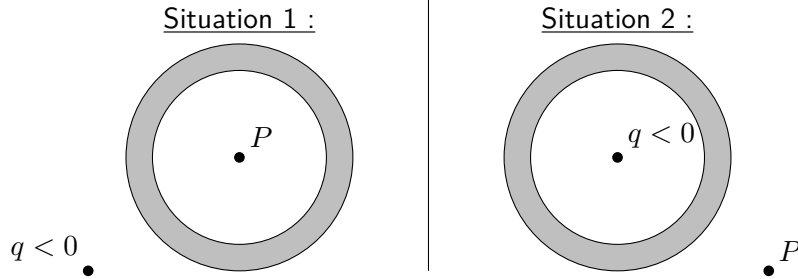
La cage de Faraday en question est assimilable à un conducteur homogène globalement neutre, de conductivité électrique σ_c et de forme assimilable à une boule creuse.

Pour commencer, on étudie le cas où la particule chargée ne bouge pas.

- (a) Dans chacune des situations illustrées sur la figure ci-dessous, indiquer qualitativement (sans calculs) :

- le champ électrique \vec{E} à la position P .
- la distribution des charges électriques dans/sur le conducteur.

Commenter la différence entre les deux situations.



On étudie maintenant le cas dynamique où, la particule chargée étant mobile, elle génère une onde électromagnétique se propageant dans l'espace. On cherche à comprendre la propagation de cette onde à l'intérieur du conducteur. On fera l'hypothèse que la longueur d'onde de l'onde est beaucoup plus petite que les dimensions du conducteur, qui peut alors être assimilé à un volume infini. On négligera aussi les effets de bord en considérant que le conducteur porte une densité volumique de charge nulle en tout point.

- (b) Montrer que dans ce cas, l'équation d'onde généralisée pour le champ électrique \vec{E} prend la forme suivante

$$\Delta \vec{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} + \mu_0 \sigma_c \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (24)$$

Rappels :

- la loi d'Ohm locale s'écrit $\vec{j} = \sigma_c \vec{E}$, avec \vec{j} la densité de courant.
- pour tout champ vectoriel \vec{A} , on a l'égalité $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \Delta \vec{A}$.

- (c) Déterminer l'expression de l'équation d'onde généralisée pour le champ magnétique \vec{B} .
 (d) On considère une onde plane sinusoïdale de la forme suivante

$$\vec{E}(z, t) = E_0 \exp^{i(\omega t - kz)} \vec{e}_x \quad (25)$$

où $\omega \in \mathbb{R}^+$, $E_0 \in \mathbb{R}^+$ et $k = k_r + ik_i$ avec $k_r \in \mathbb{R}^+$ et $k_i \in \mathbb{R}$. Dans la limite où $\sigma_c \gg \frac{\omega}{c^2 \mu_0}$, montrer que pour satisfaire l'équation généralisée pour le champ électrique \vec{E} , on doit avoir $k_i = \pm \sqrt{\frac{\omega \mu_0 \sigma_c}{2}}$.

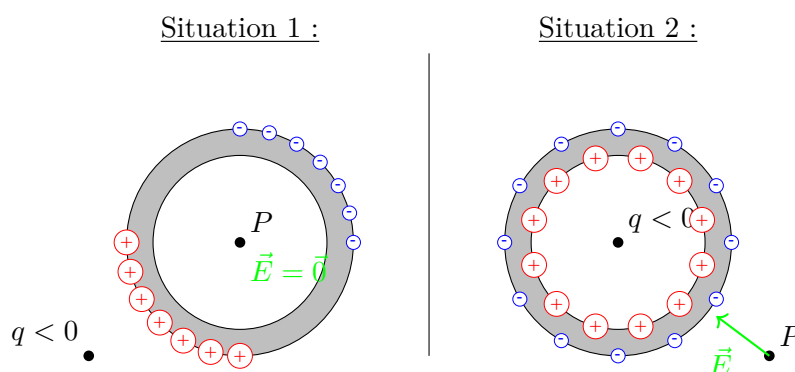
- (e) Décrire le comportement de l'onde se propageant dans le conducteur pour les deux valeurs de k_i trouvées précédemment. Pourquoi l'une des deux solutions n'est-elle pas physiquement acceptable ?
 (f) On suppose que la solution ayant un sens physique trouvé précédemment reste valable pour la cage de Faraday d'épaisseur finie. Sous quelle condition la cage de Faraday arrive-t-elle à écranter l'onde électromagnétique générée par la charge mobile ? L'écrantage de cette onde fonctionne-t-il aussi bien lorsque la particule chargée se trouve à l'intérieur et à l'extérieur de la cage de Faraday ?

Solution :

- (a) Dans chacune des situations, le champ électrique statique généré par la particule chargée va induire un réagencement des charges au sein du conducteur afin de maintenir un champ électrique nul à l'intérieur du conducteur. Cependant, du fait de la différence de géométrie, le phénomène d'écrantage sera différent pour chacune des situations :

- Situation 1 : La source de champ électrique se trouve ici à l'extérieur de la cage de Faraday. La redistribution des charges à la surface extérieure du conducteur permettra de garantir un champ électrique nul à l'intérieur de ce dernier. La charge n'étant ici pas centrée par rapport à la cage, un surplus de charges positives apparaîtra à sa surface sur le côté à proximité de la charge $q < 0$ (champ électrique externe plus intense), tandis qu'une charge opposée s'accumulera à sa surface sur le côté le plus éloigné (champ électrique externe plus faible). Le champ électrique étant nul au sein du conducteur de la cage de Faraday, et la surface intérieure ne portant pas de charge, le champ électrique sera également nul en tout point du volume encapsulé à l'intérieur de la cage de Faraday, donc $\vec{E}(P) = \vec{0}$.
- Situation 2 : La source de champ électrique se trouve ici à l'intérieur de la cage de Faraday. Afin d'écranter parfaitement le champ électrique généré par la particule chargée et puisque le conducteur est parfait, une charge positive $-q$ doit apparaître distribuée sur la surface interne de la cage de Faraday. La charge étant centrée, la distribution de charge positive se fera de manière uniforme. Puisque le conducteur est globalement neutre, une charge q doit apparaître distribuée à la surface extérieure de la cage. Un observateur placé en P percevra un champ électrique égal à celui d'une charge ponctuelle de charge $q < 0$, donc $\vec{E}(P) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^3}$, avec \vec{r} le vecteur allant de la charge q au point P et r sa norme.

On remarque donc que la cage de Faraday est efficace pour écranter le volume qu'elle contient des champs électriques statiques externes, mais n'a aucun effet pour la situation opposée.



- (b) Pour rappel, les expressions générales des équations de Maxwell sont les suivantes

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} & \text{(Gauss)} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 & \text{(Gauss pour } \vec{B} \text{)} \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & \text{(Faraday)} \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} & \text{(Maxwell-Ampère)} \end{cases} \quad (26)$$

où \vec{E} est le champ électrique, \vec{B} est le champ magnétique, \vec{J} est la densité de courant, ρ est la densité de charge, ϵ_0 est la permittivité du vide et μ_0 est la perméabilité du vide.

De plus, à l'intérieur du conducteur électrique, la loi d'Ohm locale nous donne que

$$\vec{J} = \sigma_c \vec{E} \quad (27)$$

où σ_c est la conductivité électrique du matériau.

En considérant l'absence de charge libre en tout point et en injectant l'information issue de la loi d'Ohm locale dans l'équation de Maxwell-Ampère, les équations de Maxwell deviennent

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= 0 \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} &= \mu_0 \sigma_c \vec{E} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{cases}$$

En prenant le rotationnel de l'équation de Faraday, on obtient

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = -\vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Pour le terme de gauche, on peut utiliser la propriété vectorielle rappelée dans l'énoncé pour faire apparaître le terme de gauche de la loi de Gauss et le Laplacien du champ électrique. Pour le terme de droite, on peut utiliser le fait que le champ électrique étant différentiable en tout temps et en tout point de l'espace, la dérivée temporelle et le rotationnel peuvent être permutés pour faire apparaître le terme de gauche de l'équation de Maxwell-Ampère. Ainsi, on obtient

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}(\underbrace{\vec{\nabla} \cdot \vec{E}}_{=0}) - \Delta \vec{E} &= -\frac{\partial}{\partial t} \underbrace{\vec{\nabla} \times \vec{B}}_{=\mu_0 \sigma_c \vec{E} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}} \\ \Leftrightarrow -\Delta \vec{E} &= -\mu_0 \sigma_c \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \end{aligned}$$

Sachant que $\mu_0 \varepsilon_0 = \frac{1}{c^2}$, on obtient en effet l'expression de l'énoncé pour l'équation généralisée pour le champ électrique

$$\boxed{\Delta \vec{E} = \mu_0 \sigma_c \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}} \quad (28)$$

- (c) Pour trouver l'expression de l'équation d'onde généralisée pour le champ magnétique, le raisonnement est similaire à celui de la question (b) mais il faut partir avec le rotationnel de l'équation de Maxwell-Ampère. En procédant ainsi, on obtient

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = \mu_0 \sigma_c \vec{\nabla} \times \vec{E} + \mu_0 \varepsilon_0 \vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Pour les mêmes raisons que pour la question précédente, l'équation précédente peut également se mettre sous la forme suivante où l'on fait apparaître les termes de gauche de l'équation de la loi de Gauss pour \vec{B} et de Faraday

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}(\underbrace{\vec{\nabla} \cdot \vec{B}}_{=0}) - \Delta \vec{B} &= \mu_0 \sigma_c \underbrace{\vec{\nabla} \times \vec{E}}_{=-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \underbrace{\vec{\nabla} \times \vec{E}}_{=-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}} \\ \Leftrightarrow -\Delta \vec{B} &= -\mu_0 \sigma_c \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} \end{aligned}$$

Et donc pour l'équation d'onde généralisée pour le champ magnétique, on obtient

$$\boxed{\Delta \vec{B} = \mu_0 \sigma_c \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}} \quad (29)$$

(d) En considérant la solution proposée dans l'énoncé de la forme

$$\vec{\tilde{E}}(z, t) = E_0 \exp^{i(\omega t - kz)} \vec{e}_x$$

Alors pour le dérivé première en temps, on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{\tilde{E}}(z, t)}{\partial t} &= i\omega E_0 \exp^{i(\omega t - kz)} \vec{e}_x \\ &= i\omega \vec{\tilde{E}}(z, t) \end{aligned}$$

Pour la dérivée seconde

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \vec{\tilde{E}}(z, t)}{\partial t^2} &= -\omega^2 E_0 \exp^{i(\omega t - kz)} \vec{e}_x \\ &= -\omega^2 \vec{\tilde{E}}(z, t) \end{aligned}$$

Et effet pour le Laplacien

$$\begin{aligned} \Delta \vec{\tilde{E}}(z, t) &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} \vec{\tilde{E}}(z, t) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \vec{\tilde{E}}(z, t) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \vec{\tilde{E}}(z, t) \\ &= \frac{\partial^2}{\partial z^2} \vec{\tilde{E}}(z, t) \\ &= -k^2 E_0 \exp^{i(\omega t - kz)} \vec{e}_x \\ &= -k^2 \vec{\tilde{E}}(z, t) \end{aligned}$$

En injectant les résultats intermédiaires précédent dans l'équation (28), on obtient

$$\begin{aligned} -k^2 \vec{\tilde{E}}(z, t) &= -\frac{\omega^2}{c^2} \vec{\tilde{E}}(z, t) + i\omega\mu_0\sigma_c \vec{\tilde{E}}(z, t) \\ \Leftrightarrow k^2 &= \frac{\omega^2}{c^2} - i\omega\mu_0\sigma_c \end{aligned}$$

Il s'agit donc de trouver la racine carré d'un nombre complexe k qui peut s'écrire sous la forme $k = k_r + ik_i$. On a donc deux expressions pour le carré de ce nombre complexe

$$\begin{cases} k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - i\omega\mu_0\sigma_c \\ k^2 = k_r^2 - k_i^2 + 2ik_i k_r \end{cases}$$

Deux nombres complexe étant égaux si et seulement si leurs parties réelles et imaginaires sont égales, on a donc

$$\begin{cases} k_r^2 - k_i^2 &= \frac{\omega^2}{c^2} \\ 2k_i k_r &= -\omega\mu_0\sigma_c \rightarrow k_r = -\frac{\omega\mu_0\sigma_c}{2k_i} \end{cases}$$

En injectant l'expression de k_r de la deuxième dans la première équation, on obtient

$$\frac{\omega^2\mu_0^2\sigma_c^2}{4k_i^2} - k_i^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$$

En posant $X = k_i^2$, on reconnaît l'équation d'un polynôme du second degré de la forme suivante

$$X^2 + \frac{\omega^2}{c^2} X - \frac{\omega^2\mu_0^2\sigma_c^2}{4k_i^2} = 0$$

Le discriminant de ce polynôme donne

$$\Delta = \left(\frac{\omega}{c}\right)^4 + (\omega\mu_0\sigma_c)^2$$

Le discriminant étant positif, les solution X_{\pm} sont de la forme

$$\begin{aligned} X_{\pm} &= \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \pm \sqrt{\left(\frac{\omega}{c}\right)^4 + (\omega\mu_0\sigma_c)^2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \left(1 \pm \sqrt{1 + \left(\frac{c^2\mu_0\sigma_c}{\omega}\right)^2} \right) \end{aligned}$$

Puisque l'énoncé spécifie que $\sigma_c \gg \frac{\omega}{c^2\mu_0}$ le terme de droite dans la racine ci-dessus est dominant sur les autre et on a simplement

$$X_{\pm} = \pm \frac{\omega\mu_0\sigma_c}{2}$$

k_i étant par définition positif, le terme négatif ne nous intéresse pas et puisque $X = k_i^2$, on a, en passant à la racine, le résultat escompté

$$\boxed{k_i = \pm \sqrt{\frac{\omega\mu_0\sigma_c}{2}}} \quad (30)$$

NB : Il était possible d'utiliser une autre méthode passant par la racine d'une exponentielle complexe de module et phase identique à k .

- (e) Si on distingue le comportement de l'onde de manière séparé pour les deux solutions possibles, on a :

— Lorsque $k_i = \sqrt{\omega\mu_0\sigma_c/2}$: L'onde peut s'écrire sous la forme

$$\tilde{\vec{E}}(z, t) = E_0 \exp^{z\sqrt{\frac{\omega\mu_0\sigma_c}{2}}} \exp^{i(\omega t - k_r z)} \vec{e}_x$$

Donc on a une onde se propageant dans le matériaux avec une pulsation ω et une longueur d'onde $2\pi/k_r$, mais dont l'amplitude augmente de manière exponentielle avec la distance.

— Lorsque $k_i = -\sqrt{\omega\mu_0\sigma_c/2}$: Cette fois ci on a

$$\tilde{\vec{E}}(z, t) = E_0 \exp^{-z\sqrt{\frac{\omega\mu_0\sigma_c}{2}}} \exp^{i(\omega t - k_r z)} \vec{e}_x$$

Donc le même terme lié à la propagation de l'onde du cas précédent, mais cette fois-ci l'amplitude diminue de manière exponentielle. La distance caractéristique δ de cette décroissance s'exprime $\delta = (\omega\mu_0\sigma_c/2)^{-1/2}$.

Dans notre cas la solution où $k_i > 0$ n'a pas de sens physique puisque cela impliquera une augmentation exponentielle de l'amplitude de l'onde et donc de son énergie qui divergerait.

NB : En pratique, la solution où $k_i > 0$ correspondrait à la solution physiquement acceptable pour une onde se propageant vers les z négatif, c'est à dire avec $k_r < 0$.

- (f) En considérant la solution trouvé précédemment où l'onde électromagnétique décroît exponentiellement avec une distance caractéristique δ dans le conducteur, on en déduit que pour pouvoir écranter cette onde le conducteur doit être plus épais que δ . Si on note l l'épaisseur

caractéristique de la cage, alors cela se traduit par l'inégalité $l \cdot \delta \gg 1$. Le phénomène d'atténuation étant indépendant de la direction de propagation de l'onde, l'écrantage se fait aussi bien pour des ondes allant de l'intérieur vers l'extérieur de la cage que de l'extérieur vers l'intérieur. En pratique δ est appelé épaisseur de peau, on remarque que cette grandeur dépend de deux grandeurs pour lesquelles on peut s'intéresser aux cas limites :

- *La pulsation de l'onde* : Plus l'onde aura une pulsation/fréquence élevée, plus l'épaisseur de peau sera fine et donc la cage de Faraday sera efficace. A faible fréquence par contre, l'atténuation de l'onde sera moindre. Dans le cas statique δ est infini mais le phénomène d'écrantage se fera principalement du fait de l'apparition de charge en surface du conducteur (charge que l'on a négligé au début de l'étude du cas dynamique).
- *La conductivité électrique du conducteur* : Pour une pulsation donnée, la cage de Faraday sera d'autant plus efficace que la conductivité électrique du matériau utilisé sera élevée. Inversement, une cage de Faraday constitué d'un matériau isolant sera très peu efficace.