21 Juin 2024

Règlement de l'examen

Il est strictement interdit de consulter l'énoncé de l'examen avant le signal de début !

- Avant de commencer un exercice, lire attentivement tout l'énoncé. Certaines remarques, indications, et hypothèses importantes peuvent être à la fin de l'énoncé.
- Il y a cinq exercices. Les points attribués à chaque exercice sont indiqués sur l'énoncé.
- Les réponses doivent être rédigées dans la cahier de réponses. **Chaque question possède un espace de réponse dédié dans le cahier de réponses.** Si vous manquez de place pour répondre à une question, des espaces de secours sont disponibles à la fin du cahier de réponses, dans la section nommée *"exercice 6"*. Indiquer que la réponse continue dans l'espace de secours et, dans l'espace de secours, indiquer à quelle question vous répondez.
- L'utilisation du crayon à papier et du stylo rouge est interdite sur les feuilles rendues pour correction.
- L'utilisation de téléphones portables, smartwatch, calculatrice, ou tout autre appareil électronique est strictement interdite.
- L'examen dure en tout 3h30min à partir du signal de début.
- Mettre votre carte CAMIPRO en évidence sur la table.
- Il n'est pas possible de quitter la salle avant 9h45, même si l'examen a été rendu. De manière générale, il n'est pas permis de quitter la salle sans autorisation.
- Un formulaire manuscrit d'une page A4 recto-verso ainsi que le formulaire du cours sont autorisés durant l'examen.

Bon travail !

Exercice 1 : Cloche de plongée (8 points)

Pour faire de la plongée, vous utilisez une cloche de plongée (une idée ancienne déjà connue au temps d'Aristote). Cette dernière est une cloche métallique, dans ce cas assimilée à un cylindre ouvert en bas et renfermant une certaine quantité d'air. En tant que plongeur, vous avez accès à ce réservoir d'air frais par un tuyau, permettant de respirer sous l'eau. La cloche de plongée est reliée à un flotteur cylindrique par une tige de longueur D et de diamètre négligeable.

(a) Soit M la masse totale de cette installation (cloche de plongée, tige verticale, flotteur cylindrique, et air enfermé). Quelles sont les valeurs minimale et maximale de M telles que la cloche de plongée ne coule pas et ne remonte pas à la surface ? Vous pouvez négliger la force que le plongeur exerce sur cette installation via le tuyau et considérer h comme une constante. Exprimez votre réponse en fonction des données de l'exercice parmi $r_1, k_1, D, r_2, k_2, h, p_{atm}, g$, et ρ_0.

(b) Quelle est la pression de l'air à l'intérieur de la cloche de plongée si le flotteur cylindrique est à moitié dans l'eau ? Exprimez votre réponse en fonction des données de l'exercice parmi $r_1, k_1, D, r_2, k_2, h, p_{atm}, g$, et ρ_0. Au-delà d'une possible accumulation de CO_2 dans le tube, pourquoi l'idée du plongeur de droite, où le tuyau monte directement à la surface de l'eau, ne fonctionnerait pas pour des profondeurs de quelques mètres ?

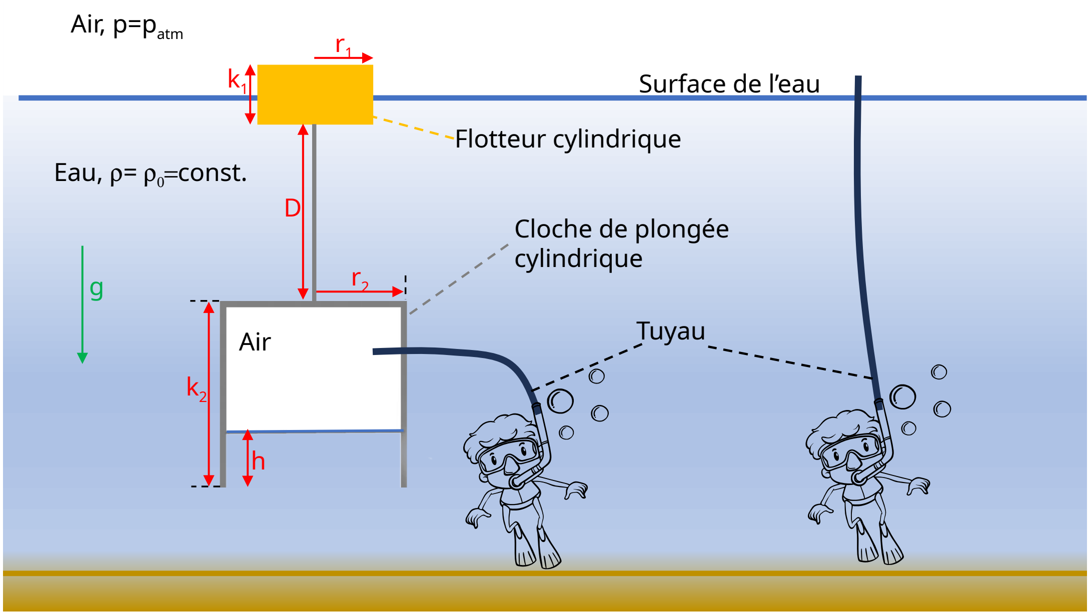


FIGURE 1 – Situation pour les questions (a) et (b)

(c) Considérez maintenant que vous avez la taille d'une fourmi. À cette échelle, les effets de tension superficielle sont importants. Comme illustré sur la Figure 2, vous pouvez supposer que l'interface liquide-gaz est, en première approximation, sphérique. Est-ce que la situation de la Figure 2 correspond à une situation de bon mouillage ou de mauvais mouillage ? Exprimez la pression de l'air à l'intérieur de la cloche de plongée en fonction des données de l'exercice parmi $r_1, k_1, D, r_2, k_2, h, p_{atm}, g, \rho_0, \theta$ et γ, avec γ la tension superficielle liquide-gaz. Le flotteur cylindrique est à moitié dans l'eau.

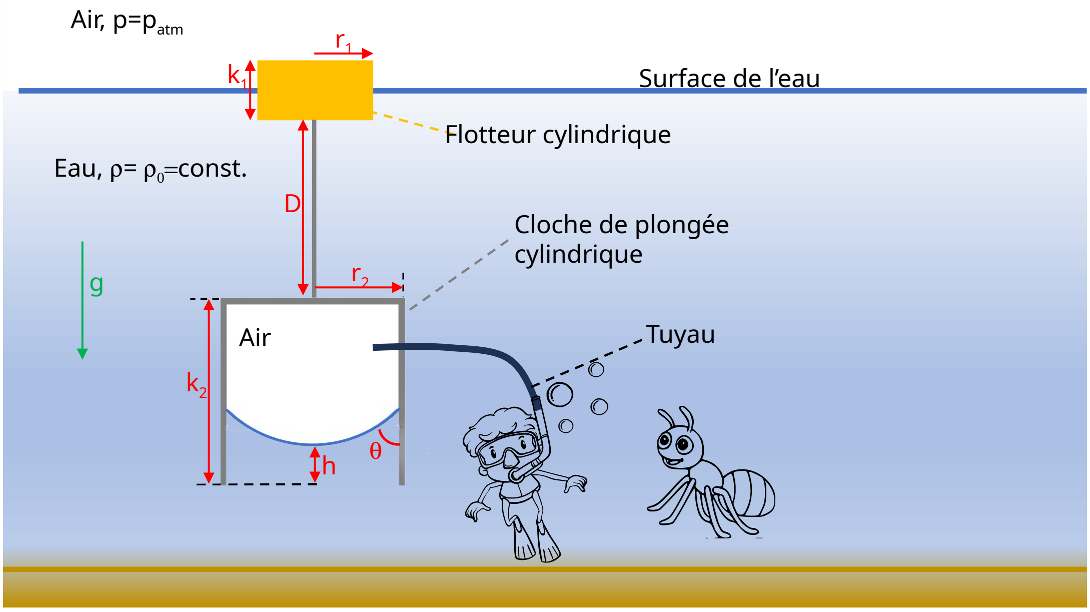


FIGURE 2 – Situation pour la question (c)

(d) Vous décidez maintenant d'utiliser une cloche de plongée fermée, comme illustré sur la Figure 3 (initialement sans fuite). Vous maintenez une pression atmosphérique à l'intérieur de la cloche à l'aide du tuyau de droite et vous vous servez du tuyau de gauche qui remonte jusqu'à la surface pour respirer. Discuter si cette option peut fonctionner. Malheureusement, il y a maintenant une fuite qui s'ouvre, de section S et à une profondeur H sous la surface de l'eau. En utilisant la loi de Bernoulli, estimez le temps pour remplir le volume V de la cloche de plongée fermée. Vous pouvez supposer que la cloche de plongée reste à la même profondeur pendant tout ce temps. Cette hypothèse est-elle justifiée ?

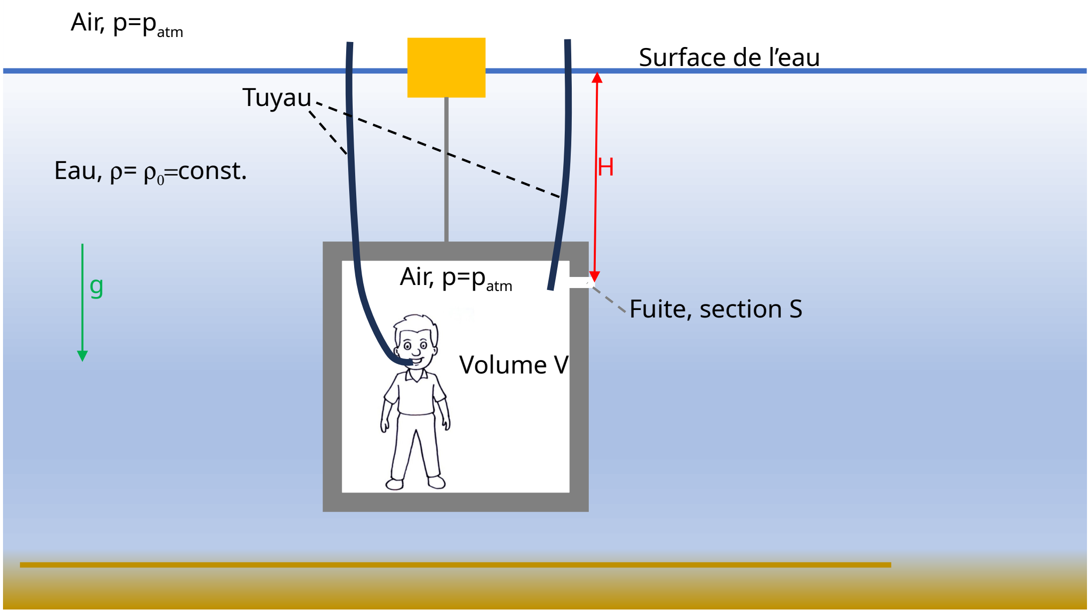


FIGURE 3 – Situation pour la question (d)

Exercice 2 : Champ de vitesse (8 points)

On considère l'écoulement d'un fluide parfait et incompressible ($\rho = \rho_0 = const.$) avec le champ de vitesse suivant :

$$\vec{u}(\vec{r}, t) = \frac{1}{\tau}(x\vec{e}_x - y\vec{e}_y)$$

où $\tau > 0$ est une constante donnée.

(a) Indiquez, dans le plan xy, le vecteur $\vec{u}$ aux points suivants :

$$\begin{array}{lll} (x,y) = (-1,1); & (x,y) = (0,1); & (x,y) = (1,1); \\ (x,y) = (-1,0); & (x,y) = (0,0); & (x,y) = (1,0); \\ (x,y) = (-1,-1); & (x,y) = (0,-1); & (x,y) = (1,-1); \end{array}$$

Pour les représentations graphiques, prenez $\tau = 1$s.

(b) Démontrez que ce champ de vitesse satisfait l'équation de continuité.

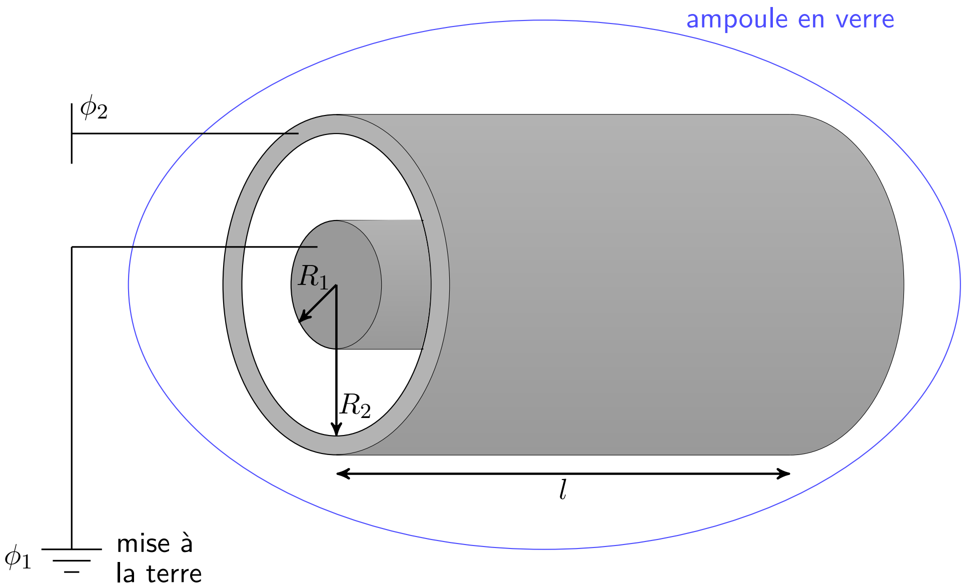
(c) Déterminez l'accélération d'un élément de fluide en un point (x, y) arbitraire. Tracez qualitativement la forme de la ligne de courant proche du point $(1, 1)$ et passant par ce dernier. Justifiez votre réponse.

(d) Utilisez l'équation d'Euler pour déterminer l'expression du champ scalaire de pression $p(\vec{r}, t)$ sachant que $p(\vec{r} = \vec{0}, t) = p_0$. Négligez la force de gravité dans l'équation d'Euler.

(e) Pourquoi ce champ de vitesse ne peut-il pas décrire l'écoulement en tout point de l'espace ? En considérant le résultat de (d), trouvez la valeur maximale de $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ telle que l'expression de $\vec{u}(\vec{r}, t)$ reste valable en tout point.

Exercice 3 : Diode à vide (6 points)

On considère une diode à vide constituée de deux conducteurs métalliques montrés sur la figure ci-dessous, caractérisés par les rayons R_1 et R_2. Ils ont une longueur $l \gg R_2$ et ils se trouvent à l'intérieur d'une ampoule en verre dans laquelle on a fait le vide. Le conducteur interne est maintenu à un potentiel électrostatique $\phi_1 = const. = 0$. Le potentiel du conducteur externe ϕ_2 est variable. Le conducteur interne est chauffé à une température suffisamment élevée pour qu'une émission thermoélectronique ait lieu (des électrons sont éjectés de la surface du conducteur interne vers le volume entre les deux conducteurs). Le nombre d'électrons éjectés par le conducteur interne par unité de temps est donnée par k et est indépendant de ϕ_2. Dans cet exercice, vous pouvez négliger l'effet de la gravité. En plus, vous pouvez supposer que les électrons sont éjectés radialement, c'est-à-dire avec vitesse initiale perpendiculaire à la surface du conducteur interne.



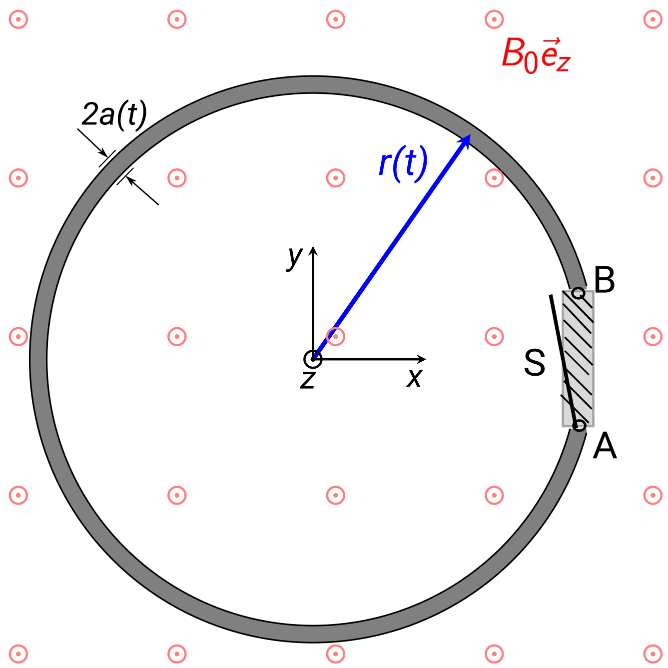
(a) Pour $\phi_2 > 0$, quel est le courant circulant entre le conducteur interne et externe ? Et quelle est la norme et la direction de la densité de courant juste en dehors du conducteur interne ?

(b) La vitesse maximale des électrons éjectés est donnée par v_0. Trouvez l'expression du potentiel $\phi_{2,crit}$ du conducteur externe à partir duquel aucun de ces électrons n'atteint le conducteur externe. Puis, tracer qualitativement le courant I entre le conducteur interne et externe en fonction de ϕ_2 (on considérera des valeurs positives et négatives de ϕ_2 pour tracer le graphe de la fonction $I(\phi_2)$).

Exercice 4 : Induction dans un fil élastique (6 points)

On considère la situation montrée dans la figure suivante. Une boucle de conducteur élastique de section circulaire est tenue en forme de cercle. Entre les points **A** et **B** (qui sont reliés par un isolant de longueur négligeable), il y a un interrupteur **S**. Le tout est plongé dans un champ magnétique constant $\vec{B} = B_0\vec{e}_z$.

À un instant $t_0 > 0$ donné, le fil formant la boucle est lâché. Par conséquent, il se comprime en gardant à tout moment une forme de cercle dans le plan xy. Dans l'intervalle de temps $[t_0,\ t_1]$ pendant cette compression, le rayon du cercle varie comme $r(t) = ct^{-\alpha}$, avec c et α des constantes positives, et le rayon du fil $a(t)$ satisfait $a(t) \ll r(t)$.



(a) On suppose d'abord que l'interrupteur **S** est ouvert, de telle sorte qu'aucun courant ne peut circuler dans le fil. Quelle est la tension induite dans la boucle pour $t \in [t_0,\ t_1]$? Exprimez le résultat en fonction des quantités données.

(b) Pour le reste de l'exercice, l'interrupteur **S** est fermé. Donnez la direction du courant circulant dans le fil. Est-ce que la force de Lorentz ressentie par le fil tend à accélérer ou ralentir la compression du fil ? Justifiez votre réponse.

(c) Exprimez la résistance de ce fil en fonction des quantités données. Supposez que le volume total du fil reste constant au cours du temps et est donné par V_0. Le fil a une conductivité σ_c qui ne varie pas en fonction de la longueur du fil. Finalement, déterminez le courant $I(t)$ qui circule dans la boucle, en négligeant les effets d'auto-inductance ainsi que la résistance de l'interrupteur **S**.

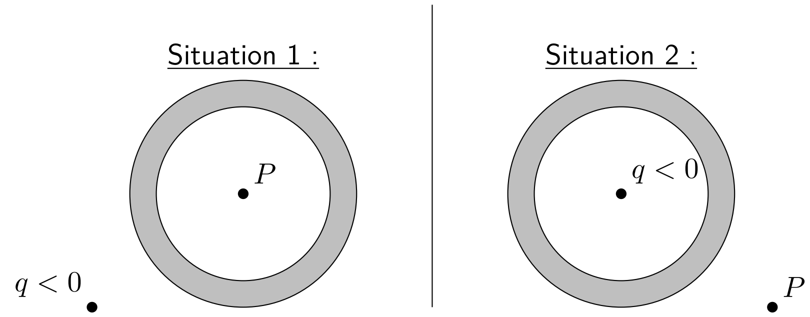
Exercice 5 : Cage de Faraday : cas statique et non-statique (10 points)

Dans cet exercice, on se propose d'étudier le phénomène d'écrantage d'une cage de Faraday pour le champ électromagnétique généré par une particule ponctuelle de charge $q < 0$.

La cage de Faraday en question est assimilable à un conducteur homogène globalement neutre, de conductivité électrique σ_c et de forme assimilable à une boule creuse.

Pour commencer, on étudie le cas où la particule chargée ne bouge pas.

(a) Dans chacune des situations illustrées sur la figure ci-dessous, indiquer qualitativement (sans calculs) :
— le champ électrique $\vec{E}$ à la position P.
— la distribution des charges électriques dans/sur le conducteur.
Commenter la différence entre les deux situations.



On étudie maintenant le cas dynamique où, la particule chargée étant mobile, elle génère une onde électromagnétique se propageant dans l'espace. On cherche à comprendre la propagation de cette onde à l'intérieur du conducteur. On fera l'hypothèse que la longueur d'onde de l'onde est beaucoup plus petite que les dimensions du conducteur, qui peut alors être assimilé à un volume infini. On négligera aussi les effets de bord en considérant que le conducteur porte une densité volumique de charge nulle en tout point.

(b) Montrer que dans ce cas, l'équation d'onde généralisée pour le champ électrique $\vec{E}$ prend la forme suivante :

$$\Delta\vec{E} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} + \mu_0\sigma_c\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \tag{24}$$

Rappels :
— la loi d'Ohm locale s'écrit $\vec{j} = \sigma_c\vec{E}$, avec $\vec{j}$ la densité de courant.
— pour tout champ vectoriel $\vec{A}$, on a l'égalité $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \Delta\vec{A}$.

(c) Déterminer l'expression de l'équation d'onde généralisée pour le champ magnétique $\vec{B}$.

(d) On considère une onde plane sinusoïdale de la forme suivante :

$$\tilde{\vec{E}}(z,t) = E_0 \exp^{i(\omega t - kz)}\,\vec{e}_x \tag{25}$$

où $\omega \in \mathbb{R}^+$, $E_0 \in \mathbb{R}^+$ et $k = k_r + ik_i$ avec $k_r \in \mathbb{R}^+$ et $k_i \in \mathbb{R}$. Dans la limite où $\sigma_c \gg \frac{\omega}{c^2\mu_0}$, montrer que pour satisfaire l'équation généralisée pour le champ électrique $\vec{E}$, on doit avoir $k_i = \pm\sqrt{\frac{\omega\mu_0\sigma_c}{2}}$.

(e) Décrire le comportement de l'onde se propageant dans le conducteur pour les deux valeurs de k_i trouvées précédemment. Pourquoi l'une des deux solutions n'est-elle pas physiquement acceptable ?

(f) On suppose que la solution ayant un sens physique trouvé précédemment reste valable pour la cage de Faraday d'épaisseur finie. Sous quelle condition la cage de Faraday arrive-t-elle à écranter l'onde électromagnétique générée par la charge mobile ? L'écrantage de cette onde fonctionne-t-il aussi bien lorsque la particule chargée se trouve à l'intérieur et à l'extérieur de la cage de Faraday ?