

## Règlement de l'examen

Il est strictement interdit de consulter l'énoncé de l'examen avant le signal de début !
--

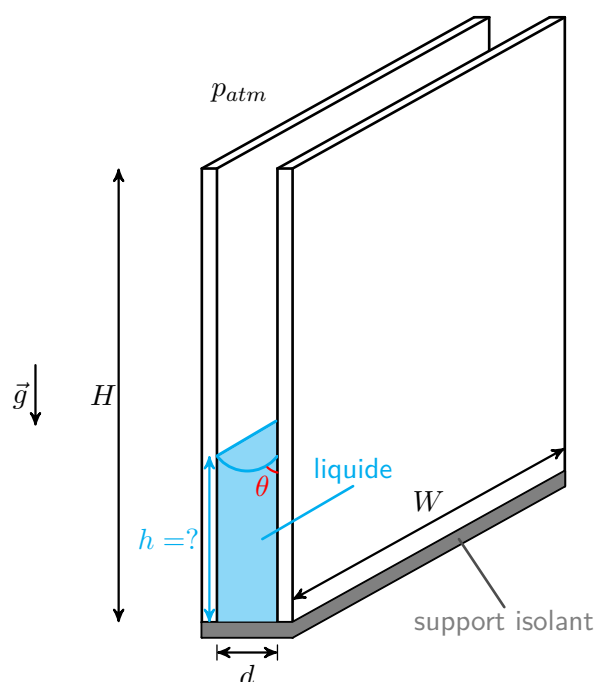
- Avant de commencer un exercice, lire attentivement tout l'énoncé. Certaines remarques, indications, et hypothèses importantes peuvent être à la fin de l'énoncé.
- Il y a quatre exercices. Les points attribués à chaque exercice sont indiqués.
- Utilisation du crayon à papier et du stylo rouge est interdite sur les feuilles rendues pour correction.
- Écrire nom, prénom et numéro de table sur toutes les feuilles rendues, par exemple :  
Marco Odermatt, MA XYZ  
où XYZ est le numéro de table noté sur le post-it posé au coin de votre table.
- Utilisation de téléphones portables, smartwatch, calculatrice, ou tout autre appareil électronique est strictement interdite.
- L'examen dure en tout 3h30min à partir du signal de début.
- Mettre votre carte CAMIPRO en évidence sur la table.
- Il n'est pas possible de quitter la salle avant 9h45, même si l'examen a été rendu. De manière générale, il n'est pas permis de quitter la salle sans autorisation.
- Un formulaire manuscrit d'une page A4 recto-verso ainsi que le formulaire du cours sont autorisés durant l'examen.

Bon travail !



# Exercice 1 : Condensateur contenant un liquide (9 points)

On considère un condensateur plan avec des plaques de dimensions  $H$  et  $W$ , séparées par une distance  $d$ . Ce condensateur contient un liquide enfermé entre ces deux plaques, comme montré dans la figure. Le liquide est incompressible, de densité  $\rho$ , et il forme un angle de contact  $\theta$  avec les plaques du condensateur. La tension superficielle entre le liquide et l'air est  $\gamma$ . Du point de vue électrostatique, le fluide peut être considéré comme un diélectrique de susceptibilité électrique  $\chi$ . Le tout est sujet à la gravité et l'air environnant est à la pression  $p_{atm}$  et sa susceptibilité électrique est négligeable. Le support, un isolant électrique, garde le liquide entre les deux plaques. Les parties e)-f) sont indépendantes des parties a)-d).



- Déterminez la pression dans le liquide juste en dessous du ménisque (l'interface liquide-gaz). Est-elle inférieure ou supérieure à  $p_{atm}$ ? La distance  $d$  est suffisamment courte pour que la forme du ménisque puisse être approximativement considérée comme cylindrique.
- La hauteur  $h$  du liquide est telle que  $p = p_{atm}$  au fond du liquide. Exprimez  $h$  en fonction des quantités données. Vous pouvez négliger la variation de hauteur dans le ménisque.
- Quelle est la pression au fond du liquide si la distance entre les plaques est diminuée à  $d/2$ ? On suppose que le liquide ne dépasse pas la hauteur  $H$ .
- Dans la situation de la question a), quel est le sens de la force horizontale totale sur chacune des plaques due au liquide et à l'air? Le calcul explicite des forces n'est pas demandé, mais justifiez votre réponse et faites un dessin indiquant le sens des forces horizontales totales sur chaque plaque.
- Exprimez la capacité du condensateur dans la situation de la question a) en fonction des quantités données, en supposant ici que la hauteur  $h$  du liquide est connue. Vous pouvez vous mettre dans le cas idéal  $d \ll W$  et  $d \ll H$  et supposer que le ménisque est horizontal.
- Toujours dans la situation de la question a), on applique maintenant une tension  $U$  entre les deux plaques. Quelle est la charge du condensateur? Et quelle est la valeur du champ électrique entre les plaques au-dessus et en dessous du ménisque?

## Solution :

- Comme l'interface liquide-air est courbée, la pression  $p_{atm}$  au dessus du ménisque sera différente de la pression  $p_1$  au dessous du ménisque. En plus, on sait que  $p_1 < p_{atm}$  comme

la surface est concave. La différence de pression peut être calculée grâce à la loi de Laplace. Comme on suppose que la forme du ménisque est cylindrique, la loi nous donne

$$\Delta p = \frac{\gamma}{R}, \quad (1)$$

où  $R$  est le rayon de courbure maximale de la surface. On obtient  $R = \frac{d/2}{\cos \theta}$  grâce à des considérations trigonométriques. La loi de Laplace nous donne donc

$$p_{atm} - p_1 = \frac{2\gamma \cos \theta}{d} \quad (2)$$

$$\Rightarrow p_1 = p_{atm} - \frac{2\gamma \cos \theta}{d} < p_{atm}. \quad (3)$$

- (b) Pour obtenir une expression pour la hauteur  $h$  du liquide, on calcule la pression  $p_2$  au fond du liquide en considérant la pression hydrostatique et on impose  $p_2 = p_{atm}$ . En appliquant la loi de l'hydrostatique, on obtient

$$p_2 = p_1 + \rho gh, \quad (4)$$

où on a négligé la variation de hauteur dans le ménisque. En injectant le résultat de Eq.(3) en Eq.(4), on obtient donc

$$p_2 = p_{atm} - \frac{2\gamma \cos \theta}{d} + \rho gh \quad (5)$$

$$\Rightarrow p_{atm} = p_{atm} - \frac{2\gamma \cos \theta}{d} + \rho gh \quad (6)$$

$$\Rightarrow h = \frac{2\gamma \cos \theta}{d\rho g}, \quad (7)$$

où on a imposé  $p_2 = p_{atm}$  en Eq.(6). Eq.(7) nous donne donc l'expression pour  $h$  cherchée.

- (c) On peut répéter le raisonnement fait dans la partie a). On sait que l'angle de contact  $\theta$  ne dépend pas de la distance entre les plaques. Avec une distance  $d/2$  entre les plaques, le rayon de courbure devient donc  $R' = \frac{d/4}{\cos \theta}$ , comme on peut vérifier grâce aux mêmes considérations trigonométriques appliquées en a). En appliquant la loi de Laplace pour le calcul de la pression  $p'_1$  juste en dessous du ménisque on a

$$p'_1 = p_{atm} - \frac{4\gamma \cos \theta}{d}. \quad (8)$$

Comme le liquide est incompressible et à cause de la géométrie du problème, la hauteur du liquide devient  $h' = 2h$ . La loi de la hydrostatique nous donne donc, pour  $p'_2$ ,

$$p'_2 = p'_1 + \rho gh' \quad (9)$$

$$= p_{atm} - \frac{4\gamma \cos \theta}{d} + \rho g 2h \quad (10)$$

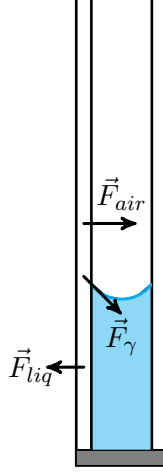
$$= p_{atm} - \frac{4\gamma \cos \theta}{d\rho g} + \frac{4\gamma \cos \theta}{d\rho g} \quad (11)$$

$$= p_{atm}, \quad (12)$$

où en Eq.(10) on a injecté le résultat de Eq.(8), pendant que en Eq.(11) on a injecté l'expression de  $h$  obtenue en Eq.(7) pour la partie b). On a donc obtenu la même valeur de pression de la partie b) : Eq.(12) montre que la pression au fond du liquide ne dépend pas, dans ce cas, de la distance entre les deux plaques.

- (d) Les forces qui agissent sur les plaques sont
- la résultante des forces de pression  $\vec{F}_{air}$  dues à l'air,
  - la résultante des forces de pression  $\vec{F}_{liq}$  dues au liquide,
  - les forces de tension superficielle  $\vec{F}_\gamma$ ,

comme indiqué sur le dessin ci-dessous pour la plaque de gauche. Le bilan de ces forces donne le sens de la force horizontale totale sur chaque plaque.



Considérons d'abord la portion supérieure du condensateur, où il n'y a pas de liquide. Pour chaque plaque, les forces de pression dues à l'air et agissantes depuis l'intérieur et depuis l'extérieur se compensent, avec  $\vec{F}_{air}^{sup,int} = -\vec{F}_{air}^{sup,ext}$ . Considérons maintenant la portion inférieure du condensateur. À priori, dans la situation de la question a), on ne peut rien affirmer sur la relation entre les forces  $\vec{F}_{air}^{inf,ext}$ ,  $\vec{F}_{liq}^{inf,int}$ . En effet, cette relation dépend des données du problème  $\theta, d, \gamma$ . Le sens de la force horizontale totale sur chaque plaque dépendra donc de la somme de ces deux forces avec la composante horizontale de  $\vec{F}_\gamma$ , dirigée vers l'intérieur.

On remarque que si, de plus, on suppose que la pression au fond du liquide est  $p_2 = p_{atm}$ , comme dans les situations des questions b)-c), on a que  $|\vec{F}_{liq}^{inf,int}| < |\vec{F}_{air}^{inf,ext}|$  comme  $p_{liq} \leq p_{atm}$  à tout point du liquide. Dans ce cas, on peut donc conclure que la résultante des forces de pression  $\vec{F}_{air}$  et  $\vec{F}_{liq}$ , combinée avec l'effet de  $\vec{F}_\gamma$ , donne lieu à une force horizontale totale dirigée vers l'intérieur pour chaque plaque.

- (e) Comme pour l'exercice 1 de la Série 10, on peut calculer la capacité soit en appliquant la loi de Gauss soit en considérant le condensateur comme deux condensateurs en parallèle. On utilise ici cette deuxième méthode. Pour les surfaces des condensateurs, on a  $S_1 = Wh$ ,  $S_2 = W(H - h)$ . Les capacités des condensateurs sont donc

$$C_1 = \frac{\varepsilon_0(1 + \chi)Wh}{d} \quad (13)$$

$$C_2 = \frac{\varepsilon_0W(H - h)}{d}, \quad (14)$$

où en Eq.(14) on a négligé la susceptibilité électrique de l'air. La capacité équivalente  $C_{eq}$  pour les deux condensateurs en parallèle est donc

$$C_{eq} = C_1 + C_2 \quad (15)$$

$$= \frac{\varepsilon_0W}{d} (H + h\chi). \quad (16)$$

- (f) La capacité d'un condensateur est définie comme  $C = q/U$ . Comme discuté dans la partie e), le condensateur de l'exercice est équivalent à un condensateur de capacité  $C_{eq}$ . La charge

$q$  du condensateur est donc donnée par

$$q = C_{eq}U, \quad (17)$$

où  $C_{eq}$  est donnée par l'expression en Eq.(16). De plus, comme l'ensemble de la plaque doit être à la même tension, on a  $U_1 = U_2 = U$ . Or, si  $P_1, P_2$  sont deux points appartenants à la première et à la deuxième plaque, on a

$$U = - \int_{P_1}^{P_2} \vec{E} \cdot d\vec{l} = -Ed. \quad (18)$$

Comme la distance entre les deux plaques est la même pour les deux portions du condensateur, on a donc, en norme

$$E_1 = \frac{U_1}{d} = \frac{U}{d} \quad (19)$$

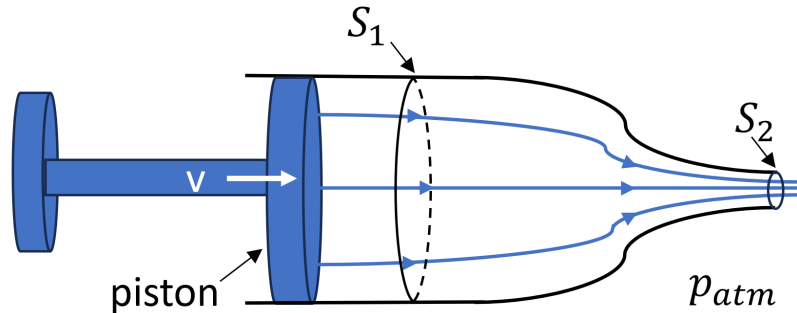
$$E_2 = \frac{U_2}{d} = \frac{U}{d}. \quad (20)$$

Les résultats obtenus en Eqs.(19), (20) montrent donc que le champ electric est le même pour les deux portions du condensateur.

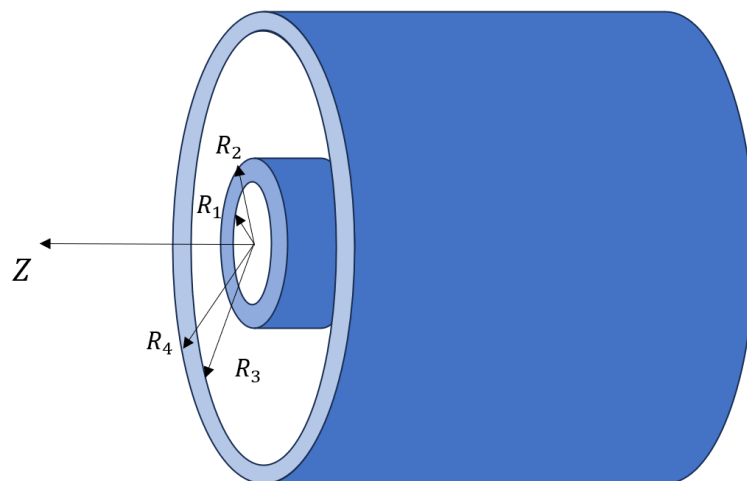
## Exercice 2 : Problèmes variés (9 points)

Les parties a), b) et c) sont indépendantes !

- (a) Vous poussez de l'eau (fluide incompressible de densité  $\rho$ ) hors d'une seringue de manière stationnaire, comme montré dans la figure ci-dessous. La seringue est caractérisée par les sections  $S_1$  et  $S_2$  et le piston se déplace avec une vitesse  $v$ . Utilisez l'équation de Bernoulli pour estimer la vitesse de l'eau à la sortie de la seringue et la pression dans l'eau au niveau du piston.



- (b) On considère deux cordes de guitare identiques de longueur  $l$  et de masse par unité de longueur  $\mu$ . La première est installée avec une tension  $T$ , l'autre avec une tension  $T + \Delta T$ , avec  $\Delta T \ll T$ . Déterminez la fréquence fondamentale de chacune des deux cordes. Puis, déterminez la fréquence du battement perçue si les deux cordes vibrent en même temps, en développant le résultat au premier ordre en  $\frac{\Delta T}{T}$ .
- (c) On considère deux cylindres creux de longueurs infinies, caractérisés par les rayons  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$ , et  $R_4$ , comme montré dans la figure ci-dessous. On se place dans une situation stationnaire où le cylindre intérieur est parcouru par un courant le long du cylindre, selon l'axe  $z$ . La densité du courant est constante à travers la section de ce cylindre et est donnée par  $j_0$ . Ce cylindre n'est pas chargé. Le cylindre externe porte une charge par unité de longueur  $\eta$  et n'est pas traversé par un courant. Déterminez la norme et la direction du champ électrique et du champ magnétique dans la région  $R_2 < r < R_3$  entre les deux cylindres.



### Solution :

- (a) On utilise l'équation de Bernoulli le long de la ligne de courant horizontale ainsi que la conservation de flux, donnée par

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho u_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho u_2^2 \quad (21)$$

$$u_1 S_1 = u_2 S_2 \quad (22)$$

En choisissant la surface 1 juste devant le piston (air  $S_1$ ) et la surface 2 à la sortie de la seringue (air  $S_2$ ), cela impose que  $p_2 = p_{atm}$  et  $u_1 = v$ . En utilisant la conservation du flux, cela donne

$$u_2 = \frac{S_1}{S_2} v \quad (23)$$

$$p_1 = p_{atm} + \frac{1}{2}\rho u_1^2 \left( \left( \frac{S_1}{S_2} \right)^2 - 1 \right) \quad (24)$$

- (b) Nous avons vu dans le cours que pour une corde sous tension  $T$  et de masse par longueur  $\mu$ , l'équation d'onde transversale peut s'écrire comme

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{T}{\mu} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad (25)$$

avec  $c = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$  la vitesse de l'onde. Pour une corde avec les deux extrémités fixées, la fréquence fondamentale est

$$\nu = \frac{c}{2l} \quad (26)$$

avec  $c = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$  et  $c = \sqrt{\frac{T+\Delta T}{\mu}}$  pour première et deuxième corde, respectivement, ce qui donne les fréquences fondamentales suivantes :

$$\nu_1 = \frac{1}{2l} \sqrt{\frac{T}{\mu}} \quad (27)$$

$$\nu_2 = \frac{1}{2l} \sqrt{\frac{T+\Delta T}{\mu}} \quad (28)$$

Quand les deux cordes sont jouées, ils produisent des ondes sonores. Avec le principe de superposition, nous avons vu dans le cours que cela crée un battement de fréquence  $\Delta\nu$  donnée par la moitié de la différence des deux fréquences, i.e.

$$\Delta\nu = \frac{1}{2}(\nu_2 - \nu_1) \quad (29)$$

$$= \frac{1}{4l} \left( \sqrt{\frac{T+\Delta T}{\mu}} - \sqrt{\frac{T}{\mu}} \right) \quad (30)$$

En faisant le développement limité du premier ordre autour de  $\frac{\Delta T}{T}$  on a

$$\frac{1}{4l} \sqrt{\frac{T}{\mu}} \left( \sqrt{1 + \frac{\Delta T}{T}} - 1 \right) \approx \frac{1}{4l} \sqrt{\frac{T}{\mu}} \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{\Delta T}{T} - 1 \right) \quad (31)$$

Et donc

$$\Delta\nu \approx \frac{1}{8l} \sqrt{\frac{T}{\mu}} \frac{\Delta T}{T} \quad (32)$$



(c) Pour répondre à la question, on va utiliser la Loi d'Ampère

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I = \mu_0 \iint \vec{j}_0 \cdot d\vec{A} \quad (33)$$

Nous savons que le champ magnétique est selon  $\vec{e}_\theta$ . Ceci suit du fait que chaque plan contenant l'axe des cylindres est un plan de symétrie pour le courant et de la règle de la main droite. Alors, pour le chemin fermé, nous considérons un cercle dans la section du câble avec  $R_2 < r < R_3$ . Nous trouvons,

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint B \vec{e}_\theta \cdot \vec{e}_\theta dl = B(r) 2\pi r \quad (34)$$

$$\mu_0 \iint \vec{j}_0 \cdot d\vec{A} = 2\pi\mu_0 j_0 \int_{R_1}^{R_2} R dR \quad (35)$$

$$= \pi\mu_0 j_0 (R_2^2 - R_1^2) \quad (36)$$

Nous pouvons résoudre pour  $B(r)$  et nous avons donc

$$B(r) = \frac{\mu_0 j_0 (R_2^2 - R_1^2)}{2r} \quad (37)$$

Par la loi de Gauss, nous pouvons définir un cylindre de longueur  $L$  et de rayon  $R_2 < r < R_3$ . Par symétrie,  $\vec{E}$  ne peut pas avoir une composante autre que radiale et nous voyons qu'il n'y a pas de charge dans le volume délimité par ce cylindre, tel que

$$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oiint E \vec{e}_r \cdot \vec{e}_r dS = E(r) 2\pi r L = \frac{1}{\epsilon_0} (\text{charge enfermée}) = 0 \quad (38)$$

$$\Rightarrow E = 0 \quad (39)$$

### Exercice 3 : Tornade (11 points)

On considère une tornade associée à un écoulement d'air dont le champ de vitesse peut s'écrire sous la forme suivante en coordonnées cartésiennes :

$$\vec{u}(x, y, z) = \begin{cases} \omega r(x, y) \vec{e}_\theta & = -\omega y \vec{e}_x + \omega x \vec{e}_y & \text{pour } r = \sqrt{x^2 + y^2} \leq r_c \\ \frac{k}{r(x, y)} \vec{e}_\theta & = \frac{-ky}{x^2 + y^2} \vec{e}_x + \frac{kx}{x^2 + y^2} \vec{e}_y & \text{pour } r = \sqrt{x^2 + y^2} > r_c \end{cases}$$

avec  $\omega > 0$ ,  $k > 0$  et  $r_c > 0$ .  $r(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$  est le rayon associé aux coordonnées cylindriques dont l'origine est le centre de la tornade et  $\vec{e}_\theta = \frac{1}{r}(-y\vec{e}_x + x\vec{e}_y)$ . Dans cet exercice, on considère l'air comme un fluide parfait et incompressible de densité volumique  $\rho_0$  constante. On pourra négliger l'influence de la gravité.

- Exprimez  $k$  en fonction de  $\omega$  et d'autres grandeurs données dans l'énoncé tel que  $\vec{u}(x, y, z)$  soit une fonction continue. Dessinez qualitativement la norme du vecteur vitesse  $\vec{u}$  en fonction de  $r$  dans la situation où la condition précédente est respectée.
- Combien vaut  $\frac{\partial \vec{u}}{\partial t}$  ? Déterminez l'accélération d'un élément fluide en un point  $(x, y, z)$  arbitraire. Détaillez les étapes du calcul.
- Déterminez le champ de pression  $p(x, y, z)$  pour  $r \leq r_c$  sachant que  $p(r = r_c) = p_c$ .
- Un écoulement est appelé irrotationnel si  $\vec{\nabla} \times \vec{u} = \vec{0}$ . Est-ce que  $\vec{u}$  est un écoulement irrotationnel en tout point de l'espace ? Justifiez votre réponse.
- Nous nous plaçons maintenant en magnétostatique. Est-il possible d'avoir un champ magnétique  $\vec{B}$  dont l'expression est identique (aux unités près) à celle du champ de vitesse  $\vec{u}$  donnée dans cet exercice ? Justifiez votre réponse.

#### Solution :

- Les expressions du champ de vitesse  $\vec{u}$  étant continue sur chacun de leur domaine respectif, la seule discontinuée possible est sur le cercle  $r = r_c$ . Pour que sur ce cercle le champ de vitesse soit continu on doit avoir  $\omega r_c \vec{e}_\theta = \frac{k}{r_c} \vec{e}_\theta$ ,  $\forall \theta$ . Cette continuité implique la relation suivante entre  $k$  et  $\omega$

$$\boxed{k = \omega r_c^2}$$

Sous ces conditions, l'expression du champ de vitesse peut se réécrire uniquement en fonction de  $\omega$  et  $r_c$  et on a en coordonnées cartésiennes

$$\boxed{\vec{u}(x, y, z) = \begin{cases} \omega(-y\vec{e}_x + x\vec{e}_y) & , \forall \sqrt{x^2 + y^2} \leq r_c \\ \omega \frac{r_c^2}{x^2 + y^2}(-y\vec{e}_x + x\vec{e}_y) & , \forall \sqrt{x^2 + y^2} > r_c \end{cases}} \quad (40)$$

ce qui donnerait en en coordonnées cylindriques

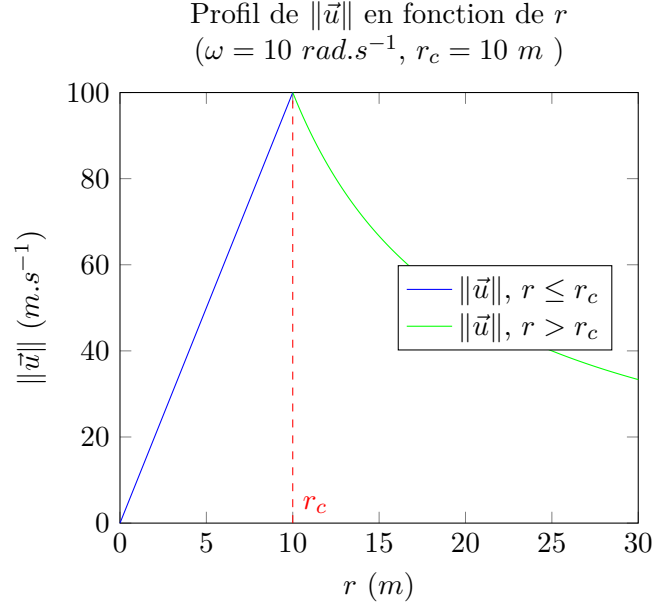
$$\vec{u}(r, \theta, z) = \begin{cases} \omega r \vec{e}_\theta & , \forall r \leq r_c \\ \omega \frac{r_c^2}{r} \vec{e}_\theta & , \forall r > r_c \end{cases}$$

Trois observations sont importantes pour tracer le champ de vecteur  $\vec{u}(x, y, z)$  :

- En tout point de l'espace, le vecteur vitesse est selon la direction azimutale.
- Pour  $r \leq r_c$  on a  $\|\vec{u}\| = \omega r$  et donc la norme de la vitesse augmente linéairement au fur et à mesure que l'on s'éloigne du centre de la tornade.

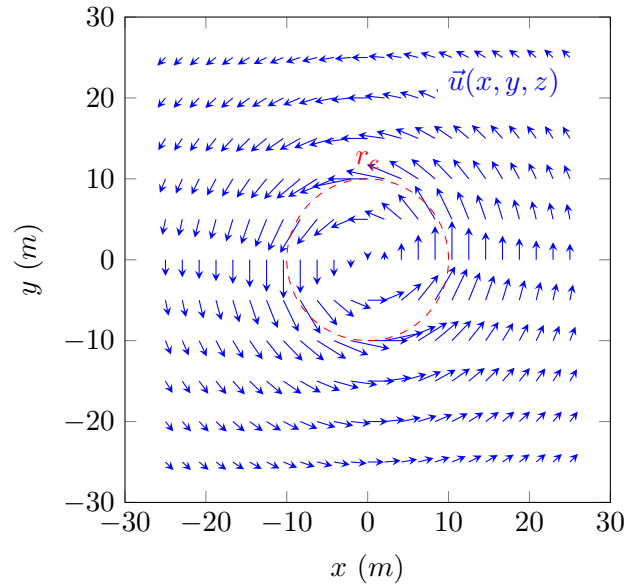
- Pour  $r > r_c$  on a  $\|\vec{u}\| = \omega \frac{r_c^2}{r}$  et donc la norme de la vitesse diminue selon l'inverse de la distance du centre de la tornade une fois que l'on a passé le rayon caractéristique de la tornade.

En tenant compte des deux dernières observations, on peut tracer la norme du champ de vecteur vitesse associé à la tornade. Ce tracé en fonction de  $r$  est visible sur la figure ci-dessous.



En incluant la première observation, on peut tracer le champ du vecteur vitesse de l'écoulement dans le plan  $(xy)$  à un  $z$  quelconque (ceci n'était pas demandé dans l'énoncé). Ce tracé est visible sur la figure ci-dessous.

Champ du vecteur vitesse  $\vec{u}$  dans le plan  $(xy)$   
( $\omega = 10 \text{ rad.s}^{-1}$ ,  $r_c = 10 \text{ m}$ )



- (b) Le champ de vitesse ne présente pas de dépendance temporelle. On en déduit que l'écoulement est stationnaire et donc que l'on a  $\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = \vec{0}$ . Pour autant, l'accélération d'un élément

fluide n'en est pas pour autant nulle puisque l'accélération d'un élément fluide s'écrit

$$\begin{aligned}
\frac{D\vec{u}}{Dt} &= \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} \\
&= \begin{cases} \vec{0} + \left( \omega \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \right) \omega \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}, & \forall \sqrt{x^2 + y^2} \leq r_c \\ \vec{0} + \left( \omega \frac{r_c^2}{x^2 + y^2} \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \right) \omega \frac{r_c^2}{x^2 + y^2} \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}, & \forall \sqrt{x^2 + y^2} > r_c \end{cases} \\
&= \begin{cases} \omega(-y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y}) \omega \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}, & \forall \sqrt{x^2 + y^2} \leq r_c \\ \omega \frac{r_c^2}{x^2 + y^2} (-y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y}) \omega \frac{r_c^2}{x^2 + y^2} \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}, & \forall \sqrt{x^2 + y^2} > r_c \end{cases} \\
&= \begin{cases} \omega^2 \begin{pmatrix} -x \\ -y \\ 0 \end{pmatrix}, & \forall \sqrt{x^2 + y^2} \leq r_c \\ \omega^2 \frac{r_c^4}{x^2 + y^2} \begin{pmatrix} -y \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{-y}{x^2 + y^2} \right) + x \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{-y}{x^2 + y^2} \right) \\ -y \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{x}{x^2 + y^2} \right) + x \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{x}{x^2 + y^2} \right) \\ 0 \end{pmatrix}, & \forall \sqrt{x^2 + y^2} > r_c \end{cases} \\
&= \begin{cases} -\omega^2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}, & \forall \sqrt{x^2 + y^2} \leq r_c \\ \omega^2 \frac{r_c^4}{x^2 + y^2} \begin{pmatrix} -\frac{2xy^2}{(x^2 + y^2)^2} - \frac{x(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2} \\ -\frac{y(-x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^2} - \frac{2yx^2}{(x^2 + y^2)^2} \\ 0 \end{pmatrix}, & \forall \sqrt{x^2 + y^2} > r_c \end{cases} \\
&= \begin{cases} -\omega^2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}, & \forall \sqrt{x^2 + y^2} \leq r_c \\ \omega^2 \frac{r_c^4}{x^2 + y^2} \begin{pmatrix} -x \\ -y \\ 0 \end{pmatrix}, & \forall \sqrt{x^2 + y^2} > r_c \end{cases}
\end{aligned}$$

D'où l'expression finale en coordonnées cartésiennes

$$\boxed{\frac{D\vec{u}}{Dt} = \begin{cases} -\omega^2(x\vec{e}_x + y\vec{e}_y) & , \forall \sqrt{x^2 + y^2} \leq r_c \\ -\omega^2 \frac{r_c^4}{(x^2 + y^2)^2} (x\vec{e}_x + y\vec{e}_y) & , \forall \sqrt{x^2 + y^2} > r_c \end{cases}} \quad (41)$$

NB : Les calculs auraient été plus simples en restant en coordonnées cylindriques, mais il

faut alors prendre la bonne expression de l'opérateur  $\vec{\nabla}$  dans ce système de coordonnées

$$\begin{aligned}
\frac{D\vec{u}}{Dt} &= \begin{cases} \vec{0} + \left( \begin{pmatrix} 0 \\ \omega r \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} 0 \\ \omega r \\ 0 \end{pmatrix}, & \forall r \leq r_c \\ \vec{0} + \left( \begin{pmatrix} 0 \\ \omega \frac{r_c^2}{r} \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} 0 \\ \omega \frac{r_c^2}{r} \\ 0 \end{pmatrix}, & \forall r > r_c \end{cases} \\
&= \begin{cases} \omega \frac{\partial}{\partial \theta} \begin{pmatrix} 0 \\ \omega r \\ 0 \end{pmatrix}, & \forall r \leq r_c \\ \omega \frac{r_c^2}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \begin{pmatrix} 0 \\ \omega \frac{r_c^2}{r} \\ 0 \end{pmatrix}, & \forall r > r_c \end{cases} \\
&= \begin{cases} \omega^2 r \frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial \theta}, & \forall r \leq r_c \\ \omega^2 \frac{r_c^4}{r^3} \frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial \theta}, & \forall r > r_c \end{cases} \\
&= \begin{cases} -\omega^2 r \vec{e}_r, & \forall r \leq r_c \\ -\omega^2 \frac{r_c^4}{r^3} \vec{e}_r, & \forall r > r_c \end{cases}
\end{aligned}$$

D'où l'expression finale en coordonnées cylindriques

$$\frac{D\vec{u}}{Dt} = \begin{cases} -\omega^2 r \vec{e}_r, & \forall r \leq r_c \\ -\omega^2 \frac{r_c^4}{r^3} \vec{e}_r, & \forall r > r_c \end{cases}$$

- (c) En l'absence de viscosité et en négligeant la gravité, l'équation de Navier-Stokes s'écrit simplement sous la forme suivante

$$\rho_0 \frac{D\vec{u}}{Dt} = -\vec{\nabla} P$$

En utilisant les résultats précédents, on obtient en coordonnées cartésiennes

$$\vec{\nabla} P = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} P = \begin{cases} \rho_0 \omega^2 (x \vec{e}_x + y \vec{e}_y) & , \forall \sqrt{x^2 + y^2} \leq r_c \\ \rho_0 \omega^2 \frac{r_c^4}{(x^2 + y^2)^2} (x \vec{e}_x + y \vec{e}_y) & , \forall \sqrt{x^2 + y^2} > r_c \frac{1}{\rho_0} \end{cases}$$

En projetant selon les différentes directions et en considérant les deux intervalles pour la dépendance en  $r$ , on obtient

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial P}{\partial x} = \rho_0 \omega^2 x & , \forall \sqrt{x^2 + y^2} \leq r_c \\ \frac{\partial P}{\partial x} = \rho_0 \omega^2 x \frac{r_c^4}{(x^2 + y^2)^2} & , \forall \sqrt{x^2 + y^2} > r_c \\ \frac{\partial P}{\partial y} = \rho_0 \omega^2 y & , \forall \sqrt{x^2 + y^2} \leq r_c \\ \frac{\partial P}{\partial y} = \rho_0 \omega^2 y \frac{r_c^4}{(x^2 + y^2)^2} & , \forall \sqrt{x^2 + y^2} > r_c \\ \frac{\partial P}{\partial z} = 0 \end{array} \right.$$

Par intégration on obtient

$$\left\{ \begin{array}{ll} P(x, y, z) = \frac{1}{2} \rho_0 \omega^2 x^2 + A(y, z) & , \forall \sqrt{x^2 + y^2} \leq r_c, \forall (y, z) \in \mathbb{R}^2 \\ P(x, y, z) = -\frac{1}{2} \rho_0 \omega^2 \frac{r_c^4}{x^2 + y^2} + B(y, z) & , \forall \sqrt{x^2 + y^2} > r_c, \forall (y, z) \in \mathbb{R}^2 \\ P(x, y, z) = \frac{1}{2} \rho_0 \omega^2 y^2 + C(x, z) & , \forall \sqrt{x^2 + y^2} \leq r_c, \forall (x, z) \in \mathbb{R}^2 \\ P(x, y, z) = -\frac{1}{2} \rho_0 \omega^2 \frac{r_c^4}{x^2 + y^2} + D(x, z) & , \forall \sqrt{x^2 + y^2} > r_c, \forall (x, z) \in \mathbb{R}^2 \\ P(x, y, z) = E(x, y) & , \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \end{array} \right.$$

La dernière équation implique l'absence de variation en fonction de  $z$ . On peut donc se focaliser sur les quatre premières équations et l'unicité de la solution nous permet de combiner les paires de solutions dans chaque intervalle, on obtient

$$\left\{ \begin{array}{ll} P(x, y) = \frac{1}{2} \rho_0 \omega^2 (x^2 + y^2) + \alpha_0 & , \forall \sqrt{x^2 + y^2} \leq r_c \\ P(x, y) = -\frac{1}{2} \rho_0 \omega^2 \frac{r_c^4}{x^2 + y^2} + \beta_0 & , \forall \sqrt{x^2 + y^2} > r_c \end{array} \right.$$

$\alpha_0$  et  $\beta_0$  sont des constantes qui ne dépendent d'aucune variables, on peut lever l'indéterminée ces dernière en utilisant la condition  $P(x_c, y_c) = p_c$  (avec  $r_c = \sqrt{x_c^2 + y_c^2}$ ). On obtient le système d'équations suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} p_c = \frac{1}{2} \rho_0 \omega^2 (x_c^2 + y_c^2) + \alpha_0 \\ p_c = -\frac{1}{2} \rho_0 \omega^2 \frac{r_c^4}{x_c^2 + y_c^2} + \beta_0 \end{array} \right.$$

Donc

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_0 = p_c - \frac{1}{2} \rho_0 \omega^2 r_c^2 \\ \beta_0 = p_c + \frac{1}{2} \rho_0 \omega^2 r_c^2 \end{array} \right.$$

En explicitant l'expression des constantes d'intégration on obtient

$$P(x, y) = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{2} \rho_0 \omega^2 (x^2 + y^2) + p_c - \frac{1}{2} \rho_0 \omega^2 r_c^2 & , \forall \sqrt{x^2 + y^2} \leq r_c \\ -\frac{1}{2} \rho_0 \omega^2 \frac{r_c^4}{x^2 + y^2} + p_c + \frac{1}{2} \rho_0 \omega^2 r_c^2 & , \forall \sqrt{x^2 + y^2} > r_c \end{array} \right.$$

Après quelques simplifications, on obtient l'expression de finale de la pression dans tout

l'espace (mais seulement l'intervalle  $r \leq r_c$  était demandée)

$$P(x, y) = \begin{cases} p_c + \frac{1}{2}\rho_0\omega^2 r_c^2 \left( \frac{x^2 + y^2}{r_c^2} - 1 \right) & , \forall \sqrt{x^2 + y^2} \leq r_c \\ p_c - \frac{1}{2}\rho_0\omega^2 r_c^2 \left( \frac{r_c^2}{x^2 + y^2} - 1 \right) & , \forall \sqrt{x^2 + y^2} > r_c \end{cases} \quad (42)$$

NB : de nouveau il était possible d'utiliser les coordonnées cylindriques, dans ce cas ci on aurait eu

$$\vec{\nabla}P = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} P = \begin{cases} \rho_0\omega^2 r \vec{e}_r, & \forall r \leq r_c \\ \rho_0\omega^2 \frac{r_c^4}{r^3} \vec{e}_r, & \forall r > r_c \end{cases}$$

En projetant selon les différentes directions et en considérant les deux intervalles pour la dépendance en  $r$ , on obtient

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial r} = \rho_0\omega^2 r, & \forall r \leq r_c \\ \frac{\partial P}{\partial r} = \rho_0\omega^2 \frac{r_c^4}{r^3}, & \forall r > r_c \\ \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} = 0 \\ \frac{\partial P}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

Par intégration on obtient

$$\begin{cases} P(r, \theta, z) = \frac{1}{2}\rho_0\omega^2 r^2 + A(\theta, z) & , \forall r \leq r_c, \forall (\theta, z) \in \mathbb{R}^2 \\ P(r, \theta, z) = -\frac{1}{2}\rho_0\omega^2 \frac{r_c^4}{r^2} + B(\theta, z) & , \forall r > r_c, \forall (\theta, z) \in \mathbb{R}^2 \\ P(r, \theta, z) = C(r, z) & , \forall (r, z) \in \mathbb{R}^2 \\ P(r, \theta, z) = D(r, \theta) & , \forall (r, \theta) \in \mathbb{R}^2 \end{cases}$$

L'unicité des équations implique que l'on a  $C(r, z) = D(r, \theta), \forall (r, \theta, z) \in \mathbb{R}^3$ , cela est possible uniquement si les solutions ne dépendent pas de  $\theta$  et  $z$ .

La condition  $P(r = r_c) = p_c$  permet de lever l'indéterminée sur les constantes d'intégration

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\rho_0\omega^2 r_c^2 + A = p_c \\ -\frac{1}{2}\rho_0\omega^2 \frac{r_c^4}{r_c^2} + B = p_c \end{cases}$$

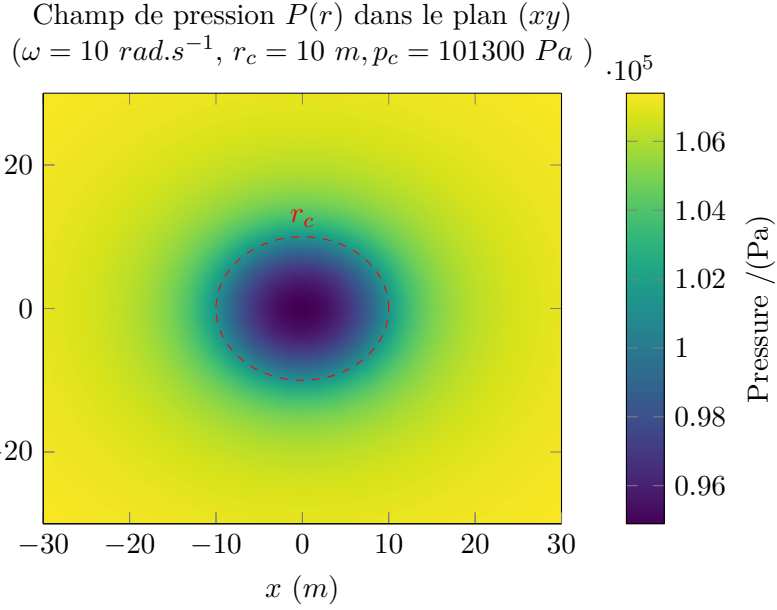
Donc

$$\begin{cases} A = p_c - \frac{1}{2}\rho_0\omega^2 r_c^2 \\ B = p_c + \frac{1}{2}\rho_0\omega^2 r_c^2 \end{cases}$$

Après quelques simplifications, on obtient l'expression de finale de la pression dans tout l'espace (similaire à l'expression obtenu en utilisant les coordonnées cartésienne)

$$P(r) = \begin{cases} p_c + \frac{1}{2}\rho_0\omega^2 r_c^2 \left( \left( \frac{r}{r_c} \right)^2 - 1 \right) & , \forall r \leq r_c \\ p_c - \frac{1}{2}\rho_0\omega^2 r_c^2 \left( \left( \frac{r_c}{r} \right)^2 - 1 \right) & , \forall r > r_c \end{cases}$$

Un tracé de la pression dans une section à un  $z$  donné est visible sur la figure ci-dessous (ceci n'était pas demandé dans l'énoncé). On remarque que la pression vaut  $p_c - \rho_0 \omega^2 r_c^2 / 2$  en  $r = 0$  et augmente quadratiquement pour atteindre  $p_c$  en  $r = r_c$  puis décroît de manière inversement proportionnel au rayon  $r$  au-delà, jusqu'à atteindre asymptotiquement  $p_c + \rho_0 \omega^2 r_c^2 / 2$  à l'infini. On observe alors qu'il existe un cas non physique où la pression pourrait être négative, pour ne pas tomber dans cette situation il faut respecter l'inégalité suivante  $p_c > \rho_0 \omega^2 r_c^2 / 2$  ce qui peut s'interpréter comme étant le fait que la densité d'énergie cinétique de rotation de la tornade en  $r_c$  ne peut pas être plus élevée que la densité d'énergie associé à la pression.



(d) Calculons le rotationnel de  $\vec{u}$ .

En coordonnées cartésiennes, le rotationnel d'un vecteur  $\vec{u}(x, y, z)$  s'écrit

$$\vec{\nabla} \times \vec{u} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z} \\ \frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x} \\ \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \end{pmatrix}$$

En appliquant cette formule à l'expression de l'énoncé pour  $\vec{u}$  en coordonnées cartésiennes, on obtient

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{u} &= \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 - 0 \\ 0 - 0 \\ \omega + \omega \end{pmatrix}, & \forall r \leq r_c \\ \begin{pmatrix} 0 - 0 \\ 0 - 0 \\ \omega r_c^2 \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{x}{x^2 + y^2} \right) + \omega r_c^2 \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{y}{x^2 + y^2} \right) \end{pmatrix}, & \forall r > r_c \end{cases} \\ &= \begin{cases} 2\omega \vec{e}_z, & \forall r \leq r_c \\ \omega r_c^2 \left( \frac{x^2 + y^2 - 2x^2}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{x^2 + y^2 - 2y^2}{(x^2 + y^2)^2} \right) \vec{e}_z, & \forall r > r_c \end{cases} \end{aligned}$$



Donc l'écoulement est donc irrotationnel uniquement à l'extérieur de la tornade puisque l'on a

$$\vec{\nabla} \times \vec{u} = \begin{cases} 2\omega \vec{e}_z & , \forall r \leq r_c \\ \vec{0} & , \forall r > r_c \end{cases} \quad (43)$$

NB : De nouveau c'est un peu plus rapide en cylindrique. En coordonnées cylindriques, le rotationnel d'un vecteur  $\vec{u}(r, \theta, z)$  s'écrit (voir formulaire du cours)

$$\vec{\nabla} \times \vec{u} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} - \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \\ \frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \left( \frac{\partial}{\partial r}(r u_\theta) - \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right) \end{pmatrix}$$

En appliquant cette formule à l'expression de  $\vec{u}$  donnée dans l'énoncé (dont les variations se font uniquement en fonction de  $r$  selon la direction  $\vec{e}_\theta$ ), on obtient

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{u} &= \begin{cases} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r\omega r) \vec{e}_z & , \forall r \leq r_c \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r\omega \frac{r_c^2}{r}) \vec{e}_z & , \forall r > r_c \end{cases} \\ &= \begin{cases} 2\omega \vec{e}_z & , \forall r \leq r_c \\ \vec{0} & , \forall r > r_c \end{cases} \end{aligned}$$

On retrouve un résultat identique à celui en coordonnées cylindriques, c'est rassurant.

- (e) Pour avoir un champ  $\vec{B} \propto \vec{u}$  dont l'existence est possible, il faut que ce dernier respecte les équations de Maxwell. En magnétostatique uniquement deux équations font intervenir le champ magnétique :

— L'équation de Gauss (ou Maxwell-Thomson) s'écrit

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

En coordonnées cartésiennes, la divergence d'un vecteur  $\vec{u}(x, y, z)$  s'écrit

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

En appliquant cette formule à l'expression de l'énoncé pour  $\vec{u}$  en coordonnées cartésiennes on obtient

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{u} &= \begin{cases} \omega \frac{\partial(-y)}{\partial x} + \omega \frac{\partial x}{\partial y} + 0, & \forall r \leq r_c \\ \omega r_c^2 \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{-y}{x^2 + y^2} \right) + \omega r_c^2 \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{x}{x^2 + y^2} \right) + 0, & \forall r > r_c \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0, & \forall r \leq r_c \\ \omega r_c^2 \left( \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2} \right), & \forall r > r_c \end{cases} \end{aligned}$$

D'où  $\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0, \forall r$  et donc un champ magnétique dont la distribution spatiale est similaire à celle de  $\vec{u}$  (i.e. un champ  $\vec{B}$  proportionnel à  $\vec{u}$ ) peut en effet a priori exister. Il reste à étudier les implications de l'autre équation de Maxwell faisant intervenir  $\vec{B}$ .

NB : en coordonnées cylindriques l'expression de la divergence est la suivante

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = \frac{1}{r} \frac{\partial r u_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

Le fait que  $\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0, \forall r$  apparaît immédiatement puisque  $\vec{u}$  est uniquement selon  $\vec{e}_\theta$  et que cette composante ne dépend pas de la coordonnée  $\theta$ .

— L'équation de la loi d'Ampère (ou Maxwell-Ampère) s'écrit

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

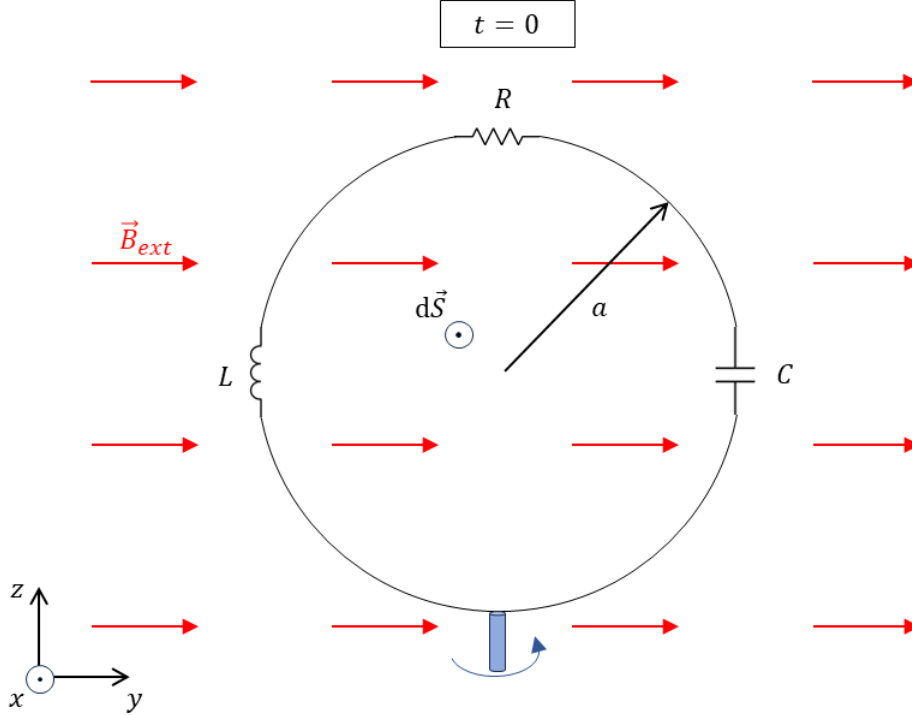
En faisant une équivalence avec l'expression  $\vec{\nabla} \times \vec{u}$ , cette équation possède toujours une solution et nous permet d'obtenir la distribution spatiale de la densité volumique de courant  $\vec{j}$  (similaire à la distribution spatiale de  $\vec{\nabla} \times \vec{u}$ ) qui donnera naissance à un champ magnétique dont la distribution spatiale sera identique à celle de  $\vec{u}$  donnée par l'énoncé. Concrètement il faudrait avoir la forme suivante :

$$\boxed{\vec{j} \propto \begin{cases} \omega \vec{e}_z & , \forall r \leq r_c \\ \vec{0} & , \forall r > r_c \end{cases}} \quad (44)$$

Le coefficient multiplicateur aura la dimension nécessaire pour maintenir l'homogénéité (c'est à dire des  $C.m^{-2}$ ) et sa valeur aura une influence uniquement sur l'intensité du champ magnétique généré par cette distribution de courants.

#### Exercice 4 : Circuit tournant (10 points)

Un fil conducteur forme une boucle fermée en forme de cercle de rayon  $a$ , comme montré dans la figure pour le temps  $t = 0$ . Cette boucle est fixée sur une poignée isolante et tourne autour de l'axe vertical (l'axe  $z$ ) à la fréquence angulaire  $\omega$ . La résistance dans la partie supérieure de la boucle est égale à  $R$ . Elle est beaucoup plus grande que la résistance du reste du fil. La boucle contient aussi une capacité égale à  $C$  et une inductance égale à  $L$ , avec  $L$  beaucoup plus grande que l'auto-inductance du reste du circuit. Le tout est plongé dans un champ magnétique constant dans l'espace et le temps, donné par  $\vec{B}_{ext} = B_{ext}\vec{e}_y$ .



- Quel est le minimum et le maximum du flux du champ magnétique  $\vec{B}_{ext}$  à travers la boucle fermée? Choisir l'orientation de l'élément vectoriel de surface  $d\vec{S}$  à  $t = 0$  comme indiqué dans la figure.
- Calculez la f.é.m.  $\epsilon_{ind}(t)$  induite dans le circuit par le champ magnétique  $\vec{B}_{ext}$ .
- Écrivez la loi des mailles pour la boucle fermée. Définissez la direction positive du courant  $I$  en accord avec la définition de  $d\vec{S}$  (à  $t = 0$ , ceci correspond au sens opposé à l'aiguille d'une montre). Puis, dérivez par rapport au temps l'équation obtenue pour établir une équation différentielle pour  $I$ . Si vous n'êtes pas sûr du signe avec laquelle  $\epsilon_{ind}(t)$  apparaît dans la loi des mailles, faites un choix à ce moment.
- En notation complexe, on peut écrire la f.é.m. induite comme

$$\tilde{\epsilon}_{ind}(t) = \tilde{\epsilon}_m e^{i\omega t} \quad (45)$$

où  $\tilde{\epsilon}_m \in \mathbb{C}$  est une constante et  $\sim$  indique des grandeurs complexes. Déterminez  $\tilde{\epsilon}_m$ . Puis, injectez cette expression de  $\tilde{\epsilon}_{ind}(t)$  dans l'équation différentielle pour  $I$  trouvée dans la partie (c) et cherchez une solution pour le courant dans le circuit de la forme  $\tilde{I}(t) = \tilde{I}_0 e^{i\omega t}$ . Déterminez  $\tilde{I}_0$ .

- À partir du résultat de (d), trouvez la forme réelle de  $I(t)$  dans le cas  $L = 0$ .
- À partir du résultat de (e), déterminez la puissance moyennée dans le temps qui est dissipée dans la résistance  $R$ . Est-elle égale à la puissance moyennée fournie par la f.é.m. induite? Comment interprétez-vous ce résultat?

**Solution :**

- (a) Le flux du champ magnétique à travers la boucle fermée est,

$$\Phi_B = \iint \vec{B}_{ext} \cdot d\vec{S} \quad (46)$$

où le flux est maximale quand le champ magnétique et le vecteur  $d\vec{S}$  sont parallèles et minimale quand ils sont anti-parallèles,

$$\Phi_B^{max} = B_{ext}\pi a^2 \quad (47)$$

$$\Phi_B^{min} = -B_{ext}\pi a^2 \quad (48)$$

- (b) La f.e.m. induite dans le circuit se trouve avec la loi de Faraday,

$$\epsilon_{ind} = -\frac{\partial \Phi_B}{\partial t}, \quad (49)$$

alors il faut d'abord trouver une expression général du flux magnétique en fonction de temps. A partir de la partie (a), nous savons que nous avons une situation sinusoïdal, car le flux magnétique oscille avec la rotation de la boucle, où l'amplitude est donné par  $\Phi_B^{max}$ ,  $\Phi_B = 0$  à  $t = 0$ . Nous pouvons donc écrire,

$$\Phi_B(t) = \pi a^2 B_{ext} \sin(\omega t) \quad (50)$$

Puis, on trouve la f.e.m. induite,

$$\epsilon_{ind}(t) = -\pi a^2 \omega B_{ext} \cos(\omega t) \quad (51)$$

- (c) La loi des Mailles pour la boucle fermée s'écrit,

$$\epsilon_{ind}(t) - IR - L \frac{dI}{dt} - \frac{q}{C} = 0 \quad (52)$$

où nous avons sommé les tensions à travers chaque composant électronique ainsi que la f.e.m. induite qui représente la source de tension. La dérivée temporelle nous donne,

$$\frac{d\epsilon_{ind}}{dt} = L \frac{d^2 I}{dt^2} + R \frac{dI}{dt} + \frac{I}{C}, \quad (53)$$

où nous trouvons de la partie (b),

$$L \frac{d^2 I}{dt^2} + R \frac{dI}{dt} + \frac{I}{C} = \pi a^2 \omega^2 B_{ext} \sin(\omega t) \quad (54)$$

- (d) Nous pouvons récrire la f.e.m. induite en notation complexe comme,

$$\tilde{\epsilon}_{ind}(t) = \tilde{\epsilon}_m (\cos(\omega t) + i \sin(\omega t)) \quad (55)$$

Puis, à partir de la réponse de (b), nous savons que,

$$\text{Re}(\tilde{\epsilon}_{ind}) = -\pi a^2 \omega B_{ext} \cos(\omega t) \quad (56)$$

$$\text{Re}(\tilde{\epsilon}_{ind}) = \text{Re}(\tilde{\epsilon}_m) \cos(\omega t) - \text{Im}(\tilde{\epsilon}_m) \sin(\omega t) \quad (57)$$

En comparant ces deux équations, nous trouvons que  $\text{Re}(\tilde{\epsilon}_m) = -\pi a^2 \omega B_{ext}$  et  $\text{Im}(\tilde{\epsilon}_m) = 0$ . Et donc nous trouvons que  $\tilde{\epsilon}_m$  est en effet une quantité réelle,  $\tilde{\epsilon}_m = -\pi a^2 \omega B_{ext}$ .

Cela nous donne,

$$\frac{d\tilde{\epsilon}_{ind}}{dt} = \tilde{\epsilon}_m i\omega e^{i\omega t} \quad (58)$$

Maintenant, en injectant ce résultat et le courant de la forme  $\tilde{I}(t) = \tilde{I}_0 e^{i\omega t}$  dans l'équation différentielle, nous trouvons,

$$\tilde{\epsilon}_m i\omega e^{i\omega t} = -L\omega^2 \tilde{I} + Ri\omega \tilde{I} + \frac{\tilde{I}}{C} \quad (59)$$

$$\tilde{\epsilon}_m i\omega = -L\omega^2 \tilde{I}_0 + Ri\omega \tilde{I}_0 + \frac{\tilde{I}_0}{C} \quad (60)$$

$$\tilde{\epsilon}_m i\omega = \tilde{I}_0 \left( -L\omega^2 + Ri\omega + \frac{1}{C} \right) \quad (61)$$

On trouve donc pour  $\tilde{I}_0$ ,

$$\tilde{I}_0 = \frac{\tilde{\epsilon}_m i\omega}{(Ri\omega - L\omega^2 + \frac{1}{C})} \quad (62)$$

(e) La forme réelle de  $I(t)$  s'écrit,

$$\text{Re}(I) = \text{Re}(\tilde{I}_0) \cos(\omega t) - \text{Im}(\tilde{I}_0) \sin(\omega t). \quad (63)$$

Dans le cas  $L = 0$ , nous avons,

$$\tilde{I}_0 = \frac{\tilde{\epsilon}_m i\omega}{(Ri\omega + \frac{1}{C})} = \frac{\tilde{\epsilon}_m i\omega}{(Ri\omega + \frac{1}{C})} \frac{Ri\omega - 1/C}{Ri\omega - 1/C} = \frac{\tilde{\epsilon}_m \omega (\omega R + i/C)}{\omega^2 R^2 + 1/C^2} \quad (64)$$

et donc, se rapellant que  $\tilde{\epsilon}_m \in \mathbb{R}$ ,

$$\text{Re}(\tilde{I}_0) = \frac{\tilde{\epsilon}_m \omega^2 R}{\omega^2 R^2 + 1/C^2} \quad (65)$$

$$\text{Im}(\tilde{I}_0) = \frac{\tilde{\epsilon}_m \omega / C}{\omega^2 R^2 + 1/C^2} \quad (66)$$

Nous pouvons écrire la forme réelle de  $I(t)$  comme,

$$\text{Re}(I) = \frac{\tilde{\epsilon}_m \omega}{\omega^2 R^2 + 1/C^2} \left( \omega R \cos(\omega t) - \frac{1}{C} \sin(\omega t) \right) \quad (67)$$

avec  $\tilde{\epsilon}_m = -\pi a^2 \omega B_{ext}$ .

(f) La puissance dissipée dans la résistance  $R$  est,

$$P_R = I^2 R = \frac{\tilde{\epsilon}_m^2 \omega^2 R}{(\omega^2 R^2 + 1/C^2)^2} \left( \omega^2 R^2 \cos^2(\omega t) + \frac{1}{C^2} \sin^2(\omega t) - \frac{2\omega R}{C} \cos(\omega t) \sin(\omega t) \right) \quad (68)$$

La moyenne temporelle des fonctions trigonométriques sont :  $\langle \sin^2(x) \rangle = \langle \cos^2(x) \rangle = 1/2$  et  $\langle \sin(x) \cos(x) \rangle = 0$ . Donc, nous trouvons,

$$\langle P_R \rangle = \frac{\tilde{\epsilon}_m^2 \omega^2 R}{(\omega^2 R^2 + 1/C^2)^2} \left( 1/2 \omega^2 R^2 + \frac{1}{2C^2} \right) = \frac{\tilde{\epsilon}_m^2 \omega^2 R}{2(\omega^2 R^2 + 1/C^2)} \quad (69)$$

La puissance fournie par la f.é.m induite est,

$$P_{ind} = I \epsilon_{ind} = \frac{\tilde{\epsilon}_m \omega}{\omega^2 R^2 + 1/C^2} \left( \omega R \cos(\omega t) - \frac{1}{C} \sin(\omega t) \right) \tilde{\epsilon}_m \cos(\omega t) \quad (70)$$

Donc, pour la puissance moyennée, nous obtenons,

$$\langle P_{ind} \rangle = \frac{\tilde{\epsilon}_m \omega}{2(\omega^2 R^2 + 1/C^2)} \omega R \tilde{\epsilon}_m = \frac{\tilde{\epsilon}_m^2 \omega^2 R}{2(\omega^2 R^2 + 1/C^2)} \quad (71)$$

La puissance moyennée fournie par la f.é.m induite est en effet égale à la puissance moyennée dissipée par la résistance. La seule composante électrique qui dissipe de l'énergie est la résistance : le condensateur fait seulement du stockage d'énergie. Donc, toute la puissance induite doit être dissipée par la résistance.