23 Juin 2023

Règlement de l'examen

Il est strictement interdit de consulter l'énoncé de lexamen avant le signal de début !

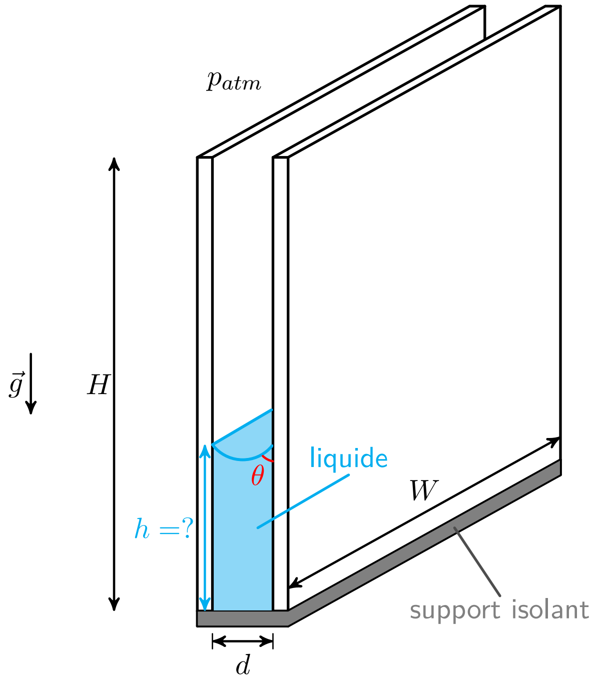
- Avant de commencer un exercice, lire attentivement tout lénoncé. Certaines remarques, indications, et hypothèses importantes peuvent être à la fin de l'énoncé.
- Il y a quatre exercices. Les points attribués à chaque exercice sont indiqués.
- Lutilisation du crayon à papier et du stylo rouge est interdite sur les feuilles rendues pour correction.
- Écrire nom, prénom et numéro de table sur toutes les feuilles rendues, par exemple :
  Marco Odermatt, MA XYZ
  où XYZ est le numéro de table noté sur le post-it posé au coin de votre table.
- Lutilisation de téléphones portables, smartwatch, calculatrice, ou tout autre appareil électronique est strictement interdite.
- Lexamen dure en tout 3h30min à partir du signal de début.
- Mettre votre carte CAMIPRO en évidence sur la table.
- Il nest pas possible de quitter la salle avant 9h45, même si lexamen a été rendu. De manière générale, il nest pas permis de quitter la salle sans autorisation.
- Un formulaire manuscrit dune page A4 recto-verso ainsi que le formulaire du cours sont autorisés durant lexamen.

Bon travail !

Exercice 1 : Condensateur contenant un liquide (9 points)

On considère un condensateur plan avec des plaques de dimensions H et W, séparées par une distance d. Ce condensateur contient un liquide enfermé entre ces deux plaques, comme montré dans la figure. Le liquide est incompressible, de densité ρ, et il forme un angle de contact θ avec les plaques du condensateur. La tension superficielle entre le liquide et l'air est γ. Du point de vue électrostatique, le fluide peut être considéré comme un diélectrique de susceptibilité électrique χ. Le tout est sujet à la gravité et lair environnant est à la pression p_{atm} et sa susceptibilité électrique est négligeable. Le support, un isolant électrique, garde le liquide entre les deux plaques.

Les parties e)-f) sont indépendantes des parties a)-d).



(a) Déterminez la pression dans le liquide juste en dessous du ménisque (linterface liquide-gaz). Est-elle inférieure ou supérieure à p_{atm} ? La distance d est suffisamment courte pour que la forme du ménisque puisse être approximativement considérée comme cylindrique.

(b) La hauteur h du liquide est telle que $p = p_{atm}$ au fond du liquide. Exprimez h en fonction des quantités données. Vous pouvez négliger la variation de hauteur dans le ménisque.

(c) Quelle est la pression au fond du liquide si la distance entre les plaques est diminuée à $d/2$? On suppose que le liquide ne dépasse pas la hauteur H.

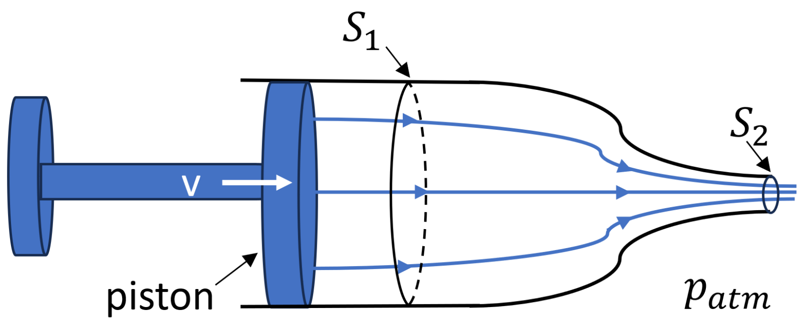
(d) Dans la situation de la question a), quel est le sens de la force horizontale totale sur chacune des plaques due au liquide et à lair ? Le calcul explicite des forces n'est pas demandé, mais justifiez votre réponse et faites un dessin indiquant le sens des forces horizontales totales sur chaque plaque.

(e) Exprimez la capacité du condensateur dans la situation de la question a) en fonction des quantités données, en supposant ici que la hauteur h du liquide est connue. Vous pouvez vous mettre dans le cas idéal $d \ll W$ et $d \ll H$ et supposer que le ménisque est horizontal.

(f) Toujours dans la situation de la question a), on applique maintenant une tension U entre les deux plaques. Quelle est la charge du condensateur ? Et quelle est la valeur du champ électrique entre les plaques au-dessus et en dessous du ménisque ?

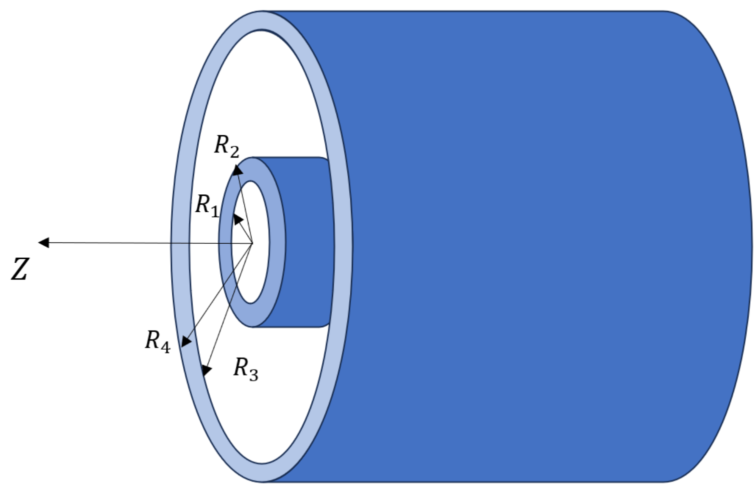
Exercice 2 : Problèmes variés (9 points)
Les parties a), b) et c) sont indépendantes !

(a) Vous poussez de leau (fluide incompressible de densité ρ) hors dune seringue de manière stationnaire, comme montré dans la figure ci-dessous. La seringue est caractérisée par les sections S_1 et S_2 et le piston se déplace avec une vitesse v. Utilisez léquation de Bernoulli pour estimer la vitesse de leau à la sortie de la seringue et la pression dans leau au niveau du piston.



(b) On considère deux cordes de guitare identiques de longueur l et et de masse par unité de longueur μ. La première est installée avec une tension T, lautre avec une tension $T + \Delta T$, avec $\Delta T \ll T$. Déterminez la fréquence fondamentale de chacune des deux cordes. Puis, déterminez la fréquence du battement perçue si les deux cordes vibrent en même temps, en développant le résultat au premier ordre en $\frac{\Delta T}{T}$.

(c) On considère deux cylindres creux de longueurs infinies, caractérisés par les rayons R_1, R_2, R_3, et R_4, comme montré dans la figure ci-dessous. On se place dans une situation stationnaire où le cylindre intérieur est parcouru par un courant le long du cylindre, selon laxe z. La densité du courant est constante à travers la section de ce cylindre et est donnée par j_0. Ce cylindre n'est pas chargé. Le cylindre externe porte une charge par unité de longueur η et n'est pas traversé par un courant. Déterminez la norme et la direction du champ électrique et du champ magnétique dans la région $R_2 < r < R_3$ entre les deux cylindres.



Exercice 3 : Tornade (11 points)

On considère une tornade associée à un écoulement d'air dont le champ de vitesse peut s'écrire sous la forme suivante en coordonnées cartésiennes :

$$\vec{u}(x,y,z) = \begin{cases} \omega r(x,y)\vec{e}_\theta & = -\omega y \vec{e}_x + \omega x \vec{e}_y \qquad \text{pour } r = \sqrt{x^2+y^2} \leq r_c \\ \dfrac{k}{r(x,y)}\vec{e}_\theta & = \dfrac{-ky}{x^2+y^2}\vec{e}_x + \dfrac{kx}{x^2+y^2}\vec{e}_y \quad \text{pour } r = \sqrt{x^2+y^2} > r_c \end{cases}$$

avec $\omega > 0$, $k > 0$ et $r_c > 0$. $r(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ est le rayon associé aux coordonnées cylindriques dont l'origine est le centre de la tornade et $\vec{e}_\theta = \frac{1}{r}(-y\vec{e}_x + x\vec{e}_y)$. Dans cet exercice, on considère l'air comme un fluide parfait et incompressible de densité volumique ρ_0 constante. On pourra négliger l'influence de la gravité.

(a) Exprimez k en fonction de ω et d'autres grandeurs données dans l'énoncé tel que $\vec{u}(x,y,z)$ soit une fonction continue. Dessinez qualitativement la norme du vecteur vitesse $\vec{u}$ en fonction de r dans la situation où la condition précédente est respectée.

(b) Combien vaut $\dfrac{\partial \vec{u}}{\partial t}$? Déterminez l'accélération d'un élément fluide en un point (x,y,z) arbitraire. Détaillez les étapes du calcul.

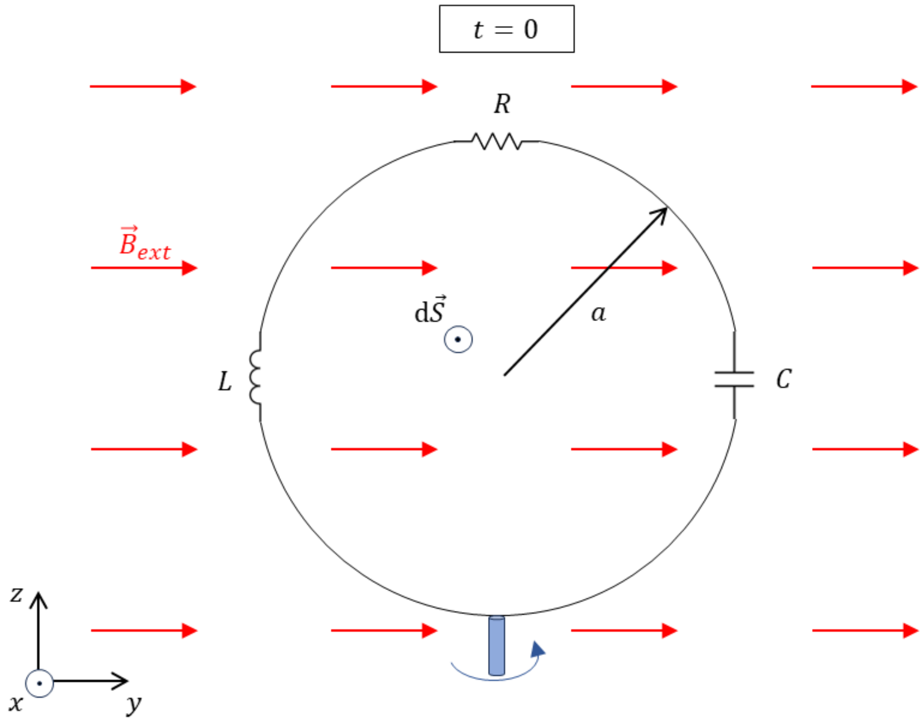
(c) Déterminez le champ de pression $p(x,y,z)$ pour $r \leq r_c$ sachant que $p(r = r_c) = p_c$.

(d) Un écoulement est appelé irrotationnel si $\vec{\nabla} \times \vec{u} = \vec{0}$. Est-ce que $\vec{u}$ est un écoulement irrotationnel en tout point de l'espace ? Justifiez votre réponse.

(e) Nous nous plaçons maintenant en magnétostatique. Est-il possible d'avoir un champ magnétique $\vec{B}$ dont l'expression est identique (aux unités près) à celle du champ de vitesse $\vec{u}$ donnée dans cet exercice ? Justifiez votre réponse.

Exercice 4 : Circuit tournant (10 points)

Un fil conducteur forme une boucle fermée en forme de cercle de rayon a, comme montré dans la figure pour le temps $t = 0$. Cette boucle est fixée sur une poignée isolante et tourne autour de l'axe vertical (l'axe z) à la fréquence angulaire ω. La résistance dans la partie supérieure de la boucle est égale à R. Elle est beaucoup plus grande que la résistance du reste du fil. La boucle contient aussi une capacité égale à C et une inductance égale à L, avec L beaucoup plus grande que l'auto-inductance du reste du circuit. Le tout est plongé dans un champ magnétique constant dans l'espace et le temps, donné par $\vec{B}_{ext} = B_{ext}\vec{e}_y$.



(a) Quel est le minimum et le maximum du flux du champ magnétique $\vec{B}_{ext}$ à travers la boucle fermée ? Choisir l'orientation de l'élément vectoriel de surface $d\vec{S}$ à $t = 0$ comme indiqué dans la figure.

(b) Calculez la f.é.m. $\epsilon_{ind}(t)$ induite dans le circuit par le champ magnétique $\vec{B}_{ext}$.

(c) Écrivez la loi des mailles pour la boucle fermée. Définissez la direction positive du courant I en accord avec la définition de $d\vec{S}$ (à $t = 0$, ceci correspond au sens opposé à l'aiguille d'une montre). Puis, dérivez par rapport au temps l'équation obtenue pour établir une équation différentielle pour I. Si vous nêtes pas sûr du signe avec laquelle $\epsilon_{ind}(t)$ apparaît dans la loi des mailles, faites un choix à ce moment.

(d) En notation complexe, on peut écrire la f.é.m. induite comme

$$\tilde{\epsilon}_{ind}(t) = \tilde{\epsilon}_m \mathrm{e}^{i\omega t} \tag{45}$$

où $\tilde{\epsilon}_m \in \mathbb{C}$ est une constant et $\sim$ indique des grandeurs complexes. Déterminez $\tilde{\epsilon}_m$. Puis, injectez cette expression de $\tilde{\epsilon}_{ind}(t)$ dans l'équation différentielle pour I trouvée dans la partie (c) et cherchez une solution pour le courant dans le circuit de la forme $\tilde{I}(t) = \tilde{I}_0 \mathrm{e}^{i\omega t}$. Déterminez $\tilde{I}_0$.

(e) À partir du résultat de (d), trouvez la forme réelle de $I(t)$ dans le cas $L = 0$.

(f) À partir du résultat de (e), déterminez la puissance moyennée dans le temps qui est dissipée dans la résistance R. Est-elle égale à la puissance moyennée fournie par la f.é.m. induite ? Comment interprétez-vous ce résultat ?