*24 Juin 2022*

## Règlement de l'examen

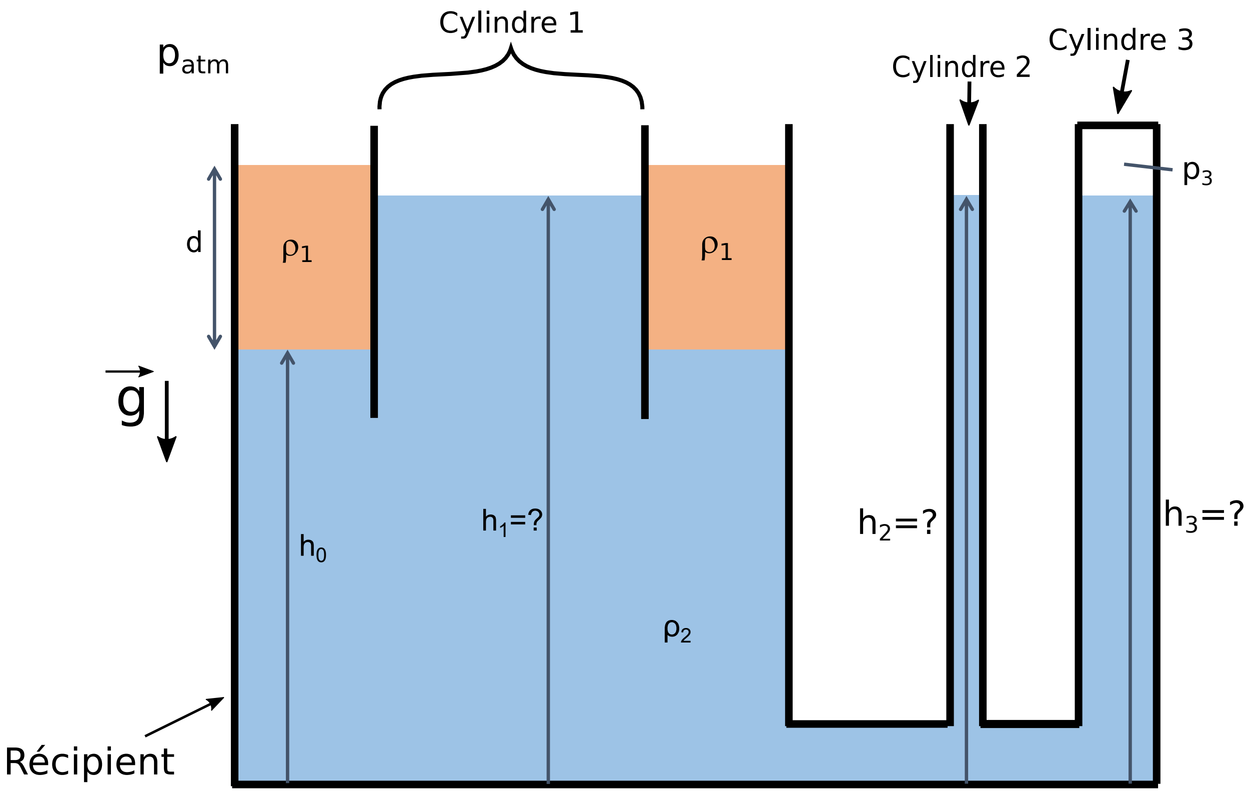
Il est strictement interdit de consulter l'énoncé de l'examen avant le signal de début !

— Avant de commencer un exercice, lire attentivement tout l'énoncé. Certaines remarques, indications, et hypothèses importantes peuvent être à la fin de l'énoncé.
— Il y a quatre exercices. Les points attribués à chaque exercice sont indiqués.
— L'utilisation du crayon à papier et du stylo rouge est interdite sur les feuilles rendues pour correction.
— Écrire nom, prénom et numéro de table sur toutes les feuilles rendues, par exemple :
Kambundji Mujinga, MA XYZ
où XYZ est le numéro de table noté sur le post-it posé au coin de votre table.
— L'utilisation de téléphones portables, smartwatch, calculatrice, ou tout autre appareil électronique est strictement interdite.
— L'examen dure en tout 3h30min à partir du signal de début.
— Mettre votre carte CAMIPRO en évidence sur la table.
— Il n'est pas possible de quitter la salle avant 9h45, même si l'examen a été rendu. De manière générale, il n'est pas permis de quitter la salle sans autorisation.
— Un formulaire manuscrit d'une page A4 recto-verso ainsi que le formulaire du cours sont autorisés durant l'examen.

# Bon travail !

### Exercice 1: Hydrostatique (7 points)

On considère la situation statique montrée dans la figure ci-dessous. Un liquide incompressible de densité $\rho_1$ (huile) flotte sur un liquide incompressible de densité $\rho_2 > \rho_1$ (eau). Les cylindres 1 et 2 sont ouverts en haut, tels que l'eau et l'huile sont en contact avec l'air à pression $p_{atm}$. Le cylindre 3 est fermé en haut, enfermant un volume d'air. On connaît $\rho_1$, $\rho_2$, $d$, $h_0$, $p_{atm}$, et $g$.



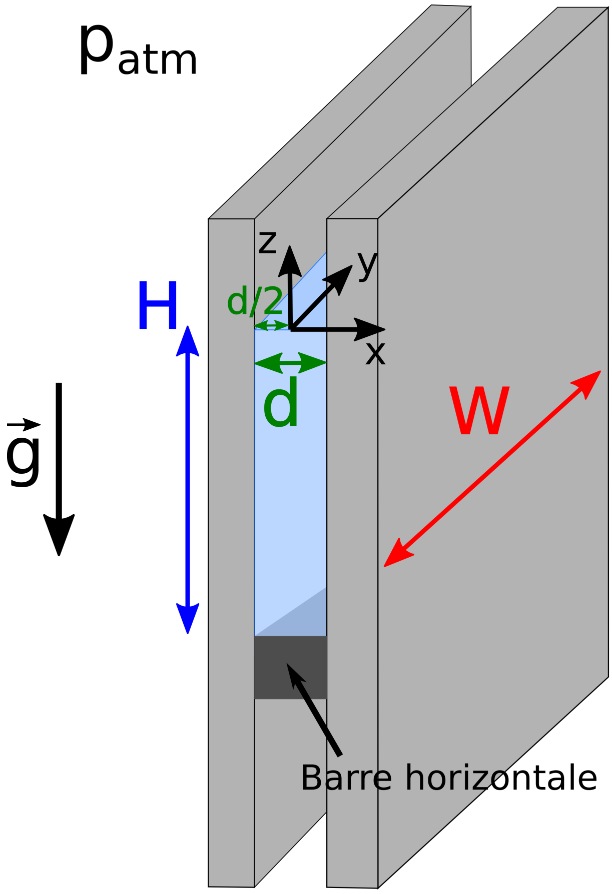

(a) Déterminez $h_1$ en fonction des quantités données. On peut négliger les effets de capillarité.

(b) Déterminez $h_2$. Le rayon $r_2$ du cylindre 2 est tel que la capillarité ne peut pas être négligée. Le rayon $r_2$, la tension superficielle de l'eau $\gamma$, ainsi que l'angle de contact $\theta$ entre l'eau et le cylindre sont connus, avec $0 < \theta < 90°$.

(c) On suppose que $p_3 > p_{atm}$. Est-ce que $h_3$ est plus grande, égale, ou plus petite que $h_1$ ? On peut négliger les effets de capillarité. Justifiez votre réponse.

(d) En bas du récipient, on fait un trou de section $S$, beaucoup plus petite que la section du cylindre 1, tel que l'eau peut librement s'écouler. Utilisez le Théorème de Bernoulli pour estimer la vitesse de sortie de l'eau. Quelle est le volume d'eau par unité de temps qu'il faut verser dans le cylindre 1 pour que la quantité d'eau dans le récipient ne varie pas au cours du temps ?

**Exercice 2: Fluide entre deux plaques verticales (10 points)**
Considérons un fluide incompressible de densité $\rho$ et de viscosité $\eta$ qui se situe entre deux plaques et qui est initialement au repos, comme montré dans la figure ci-dessous. Le fluide a une extension $d$ selon l'axe $x$, une extension $W$ selon $y$ et une extension $H$ selon $z$. Il est sujet à la gravité et l'air environnant est à la pression $p_{atm}$. Dans tout l'exercice, les effets de capillarité sont négligés.




(a) Quelle est la force totale que le fluide exerce sur chacune des plaques verticales ?

On enlève rapidement la barre horizontale en bas du fluide, de telle sorte que le fluide commence à s'écouler à cause de la gravité. Les plaques verticales restent fixes. L'air en contact avec le fluide en bas est également à la pression $p_{atm}$. On se place dans la limite $d \ll H$, $d \ll W$, et on suppose que la vitesse du fluide entre les deux plaques est de la forme $\vec{u}\,(\vec{r}, t) = u_z(x, z, t)\vec{e}_z$. Dans la suite de l'exercice, on considère la situation où le fluide se trouve toujours entre les deux plaques verticales.

(b) Montrer que pour satisfaire l'équation de continuité, $u_z(x, z, t)$ se simplifie en $u_z(x, t)$

(c) Écrire dans ce cas l'équation de Navier-Stokes. Simplifier la dérivée convective.

(d) Après une phase transitoire, il y a un écoulement stationnaire qui s'établit, avec la vitesse $\vec{u}$ et la pression $p$ du fluide indépendantes du temps. Écrire l'équation de Navier-Stokes dans ce cas. Montrer qu'il en suit que $p\,(\vec{r}, t) = p\,(z)$.

(e) Montrer que dans cette phase stationnaire de l'écoulement $p\,(z) = p_{atm}$, puis trouver la forme de $\vec{u}\,(\vec{r})$.

(f) Dans cette phase stationnaire de l'écoulement, quelle est la force nette totale que le fluide exerce sur chacune des plaques verticales ?

## Exercice 3: Problèmes variés (8 points)

Les parties a), b), et c) sont indépendantes.

(a) Dans le cours, nous avons dérivé les équations linéarisées suivantes pour un fluide parfait et uniforme, en absence de gravité

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \rho_0 \nabla \cdot \vec{u_1} = 0 \tag{1}$$

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{u_1}}{\partial t} + \nabla p_1 = 0 \tag{2}$$

$$\frac{\partial p_1}{\partial t} - \gamma \frac{p_0}{\rho_0} \frac{\partial \rho_1}{\partial t} = 0 \tag{3}$$

et nous avons cherché des solutions d'ondes planes complexes sous la forme

$$\rho_1(\vec{r}, t) = \tilde{\rho_1} \mathrm{e}^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} \tag{4}$$

$$\vec{u_1}(\vec{r}, t) = \tilde{\vec{u_1}} \mathrm{e}^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} \tag{5}$$

$$p_1(\vec{r}, t) = \tilde{p_1} \mathrm{e}^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} \tag{6}$$

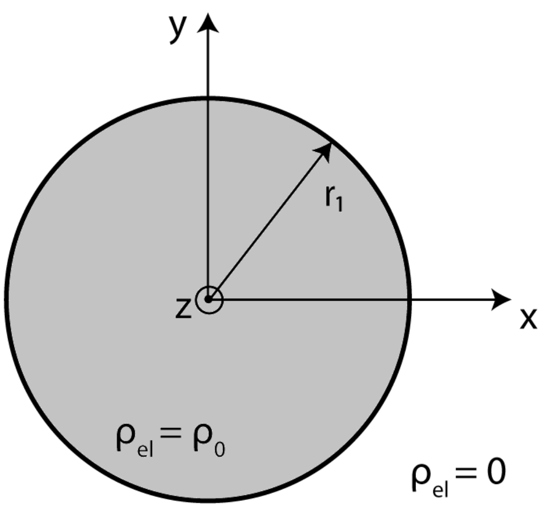
Ces équations s'appliquent t'elles plutôt à un liquide ou d'un gaz ? Justifier votre réponse.

Quel est le nom des ondes que nous avons ainsi trouvées ? A partir des equations données ici, démontrer qu'il s'agit d'ondes longitudinales.

(b) On suppose une distribution de charge électrique ayant une symétrie cylindrique et une densité volumique de charge $\rho_{el}$ donnée par

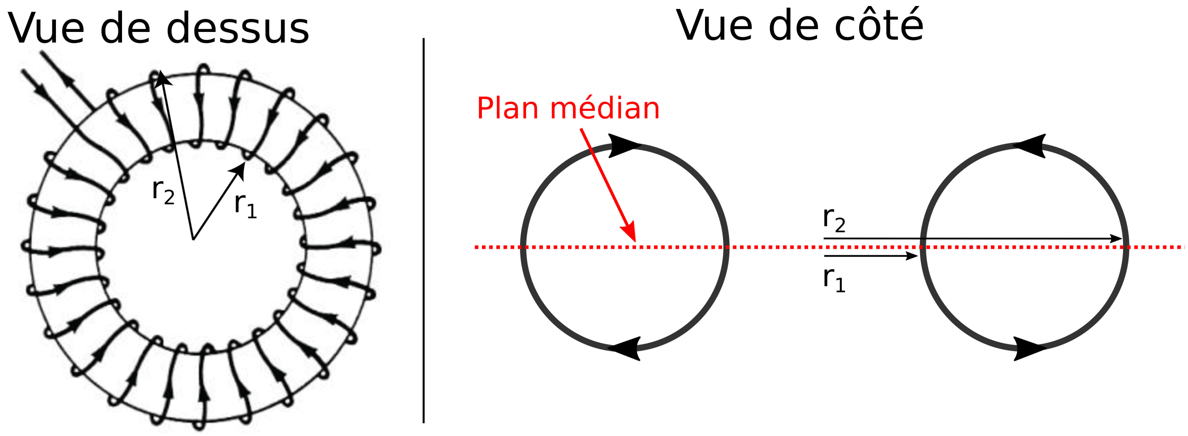
$$\rho_{el} = \rho_0 > 0 \text{ pour } r \leq r_1 \tag{7}$$

$$\rho_{el} = 0 \text{ pour } r > r_1 \tag{8}$$




Déterminer le champ $\vec{E}(\vec{r})$ dans tout l'espace.

(c) On considère une bobine en forme de tore, comme montré sur la figure ci-dessous. La bobine est parcourue par un courant $I$ et a $N$ tours au total. Grâce à des expériences, on sait qu'on peut écrire $\vec{B}(\vec{r}) = B_\theta(r)\vec{e_\theta}$ avec une bonne approximation. Déterminer $B_\theta(r)$ pour $r < r_1$, $r_1 < r < r_2$ et $r > r_2$ dans le plan médian.




**Exercice 4: Détecteur de métaux et chasse au trésor (11 points)**

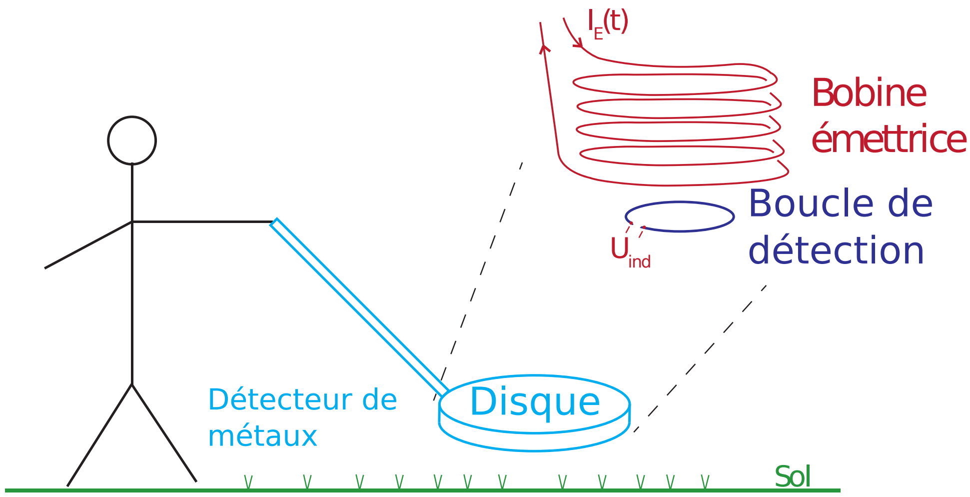
On considère un appareil qui sert à détecter des objets métalliques enterrés dans le sol ou perdus à la plage, constitué de la manière suivante. À l'intérieur d'un disque que l'on déplace près du sol, il y a une bobine émettrice, qu'on traitera comme bobine idéale, et une boucle de détection.

Si vous activez le système à un temps $t_0$, il y aura un pulse de courant dans la bobine émettrice de la forme suivante :

— Le courant $I_E(t)$ de la bobine émettrice augmente linéairement de 0 à $I_0$ dans l'intervalle de temps $[t_0, t_0 + \Delta t]$,

— Puis $I_E(t)$ redescend linéairement à 0 dans l'intervalle $[t_0 + \Delta t, t_0 + 2\Delta t]$.

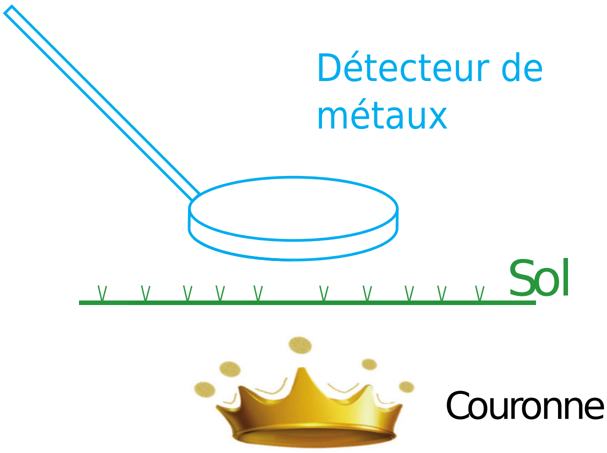
La boucle de détection est ouverte, comme indiqué dans la figure, telle qu'aucun courant ne peut y circuler. Elle est équipée d'un voltmètre pour mesurer la tension $U_{ind}$ induite dans cette boucle.



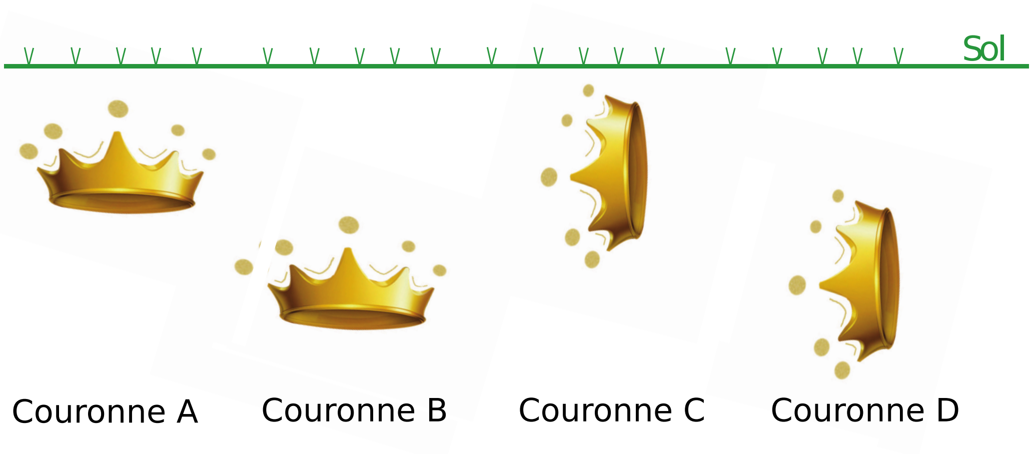

(a) Considérant le dessin de la bobine émettrice et la direction de $I_E(t)$ indiquée, quelle est la direction du champ $\vec{B}_E$ à l'intérieur de la bobine émettrice ?

(b) En supposant qu'il n'y a aucun autre objet conducteur à proximité, calculez $U_{ind}$ dans les intervalles de temps $[t_0, t_0 + \Delta t]$ et $[t_0 + \Delta t, t_0 + 2\Delta t]$. La bobine émettrice a $n_E$ tours par mètre, une longueur $l_E$, et une section $S_E$. La boucle de détection est placée très proche de la bobine émettrice et a une section $S_D < S_E$.

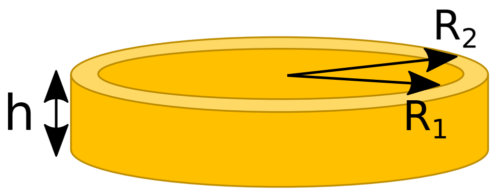
(c) Le détecteur de métaux se trouve au dessus d'une couronne en or quand vous l'activez, voir figure. Quelle est la direction du courant induit dans la couronne dans l'intervalle de temps $[t_0,\, t_0+\Delta t]$ et $[t_0+\Delta t,\, t_0+2\Delta t]$ ? Justifiez votre réponse. Comment la présence de la couronne change, qualitativement, la valeur de $U_{ind}$ par rapport à la situation dans la partie a) ? Expliquez le principe de fonctionnement de ce détecteur de métaux.




(d) Laquelle des couronnes suivantes, identiques mais enterrées de manières différentes, sera la plus facile à détecter ? Justifiez votre réponse.




(e) On considère la couronne A de la partie d) et on suppose qu'elle a une forme cylindrique de rayon interne $R_1$, de rayon externe $R_2 > R_1$ avec $R_2 - R_1 \ll R_1$, une hauteur $h$, une conductibilité $\sigma_c$ et une auto-inductance $L_c$. On suppose que le champ $\vec{B}$ généré par la bobine émettrice à la position de la couronne est $\vec{B}_{EC}(t) = -\alpha I_E(t)\vec{e_z}$. Trouvez l'équation décrivant l'évolution du courant $I_c(t)$ induit dans la couronne.




(f) Trouvez la solution de $I_c(t)$ de la partie e) dans l'intervalle de temps $[t_0, t_0+\Delta t]$ en fonction des quantités données.