

Règlement de l'examen

Il est strictement interdit de consulter l'énoncé de l'examen avant le signal de début !

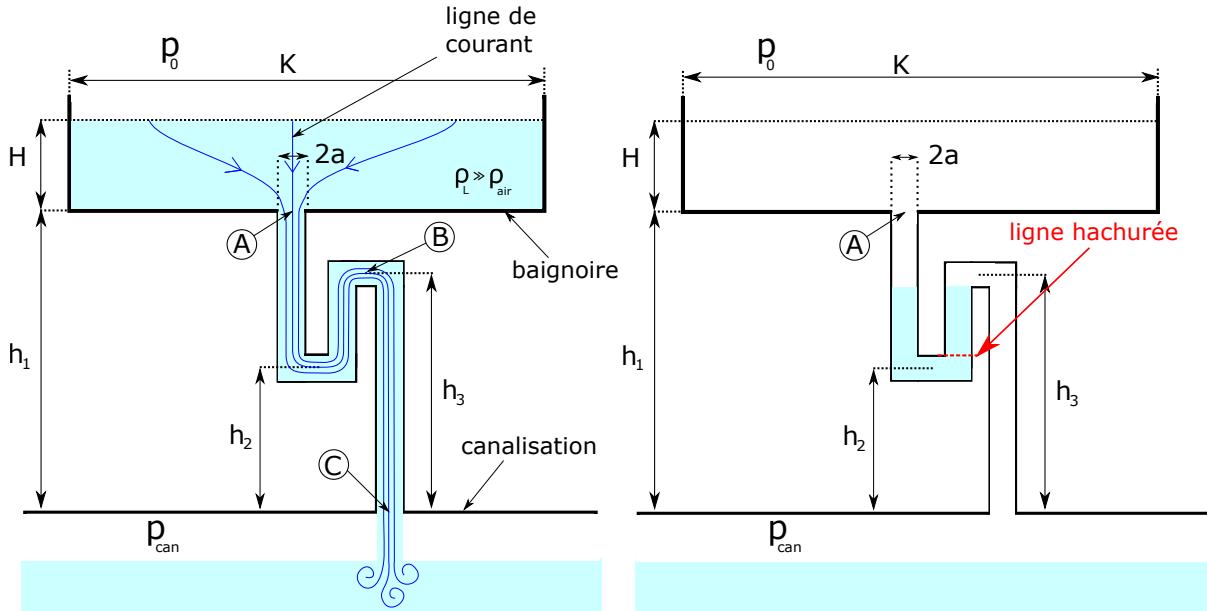
- Avant de commencer un exercice, lire attentivement tout l'énoncé. Certaines remarques, indications, et hypothèses importantes peuvent être à la fin de l'énoncé.
- Il y a quatre exercices. Les points attribués à chaque exercice sont indiqués.
- L'utilisation du crayon à papier et du stylo rouge est interdite sur les feuilles rendues pour correction.
- Écrire nom, prénom et numéro de table sur toutes les feuilles rendues, par exemple :
Andri Ragettli, MA XYZ
où XYZ est le numéro de table noté sur le post-it posé au coin de votre table.
- L'utilisation de téléphones portables, smartwatch, calculatrice, ou tout autre appareil électronique est strictement interdite.
- L'examen dure en tout 3h à partir du signal de début.
- Mettre votre carte CAMIPRO en évidence sur la table.
- Il n'est pas possible de quitter la salle avant 8h45, même si l'examen a été rendu. De manière générale, il n'est pas permis de quitter la salle sans autorisation.
- Un formulaire manuscrit d'une page A4 recto-verso ainsi que le formulaire du cours sont autorisés durant l'examen.

Bon travail !

Exercice 1: Vidange d'une baignoire et siphon (9 points)

Vous avez fini de prendre un bain dans votre baignoire et vous laissez couler l'eau (liquide incompressible de densité ρ_L), qui passe à travers un tube de section carrée constante (de côté $2a$) vers une canalisation, comme indiqué dans la figure à gauche. La baignoire a une longueur L , une largeur K , et est initialement remplie d'eau à une hauteur H . La pression de l'air dans votre salle de bain est p_0 . La pression de l'air dans la canalisation est p_{can} .

Remarques : Les points A, B, et C dans la figure se trouvent au milieu de la section du tube. Vous pouvez négliger les effets de capillarité dans cet exercice et considérer l'eau comme un fluide parfait.



- En utilisant le Théorème de Bernoulli, trouvez la vitesse de l'eau à l'entrée de la canalisation (point C dans la figure) en fonction des paramètres donnés dans le texte et la figure. Vous pouvez supposer que $L \cdot K$ est beaucoup plus grand que la section du tube, de sorte que la vitesse à la surface du liquide peut être négligée dans ce calcul.
- Quelle est la pression de l'eau aux points A et B ?
- En supposant que $p_{\text{can}} = p_0$, combien de temps faudra-t-il pour que la baignoire soit vidée ?

On considère maintenant la baignoire vide, et l'on est dans la situation indiquée dans la figure à droite, avec $p_0 = p_{\text{can}}$. Le siphon (partie du tube en forme de «U») est rempli d'eau comme indiqué et permet d'isoler votre salle de bain du gaz et des odeurs de la canalisation.

- Maintenant, la pression dans la canalisation augmente. Quelle est la surpression $p_{\text{can}} - p_0$ maximale admissible pour éviter que l'air de la canalisation puisse entrer dans la salle de bain ? Supposez que cela sera le cas dès que la surface d'eau dans la partie droite du siphon se situera à une hauteur plus basse que la ligne rouge hachurée dans le dessin de droite. Supposez que les dimensions du tube sont telles que l'eau dans la partie gauche du siphon ne remonte pas jusqu'au point A. Faire un dessin de la situation.
- On revient dans la situation décrite par la figure de droite ($p_0 = p_{\text{can}}$). Avant de partir de chez vous pour une longue période, et pour éviter que l'eau dans le siphon ne s'évapore, vous versez un peu d'huile alimentaire dans la baignoire. Cette huile (densité $\rho_H = 0.9\rho_L$) va flotter sur la surface de l'eau du côté gauche du «U» du siphon, formant une couche d'épaisseur ΔZ . Dessinez la situation finale. Quel volume d'eau est parti dans la canalisation lors de cette action ? Supposez que l'huile se trouve uniquement dans la partie verticale du tube.

Solution:

- (a) En utilisant le théorème de Bernoulli ($\frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g z + p = \text{constant le long d'une ligne de courant}$) sur un point sur la surface et en C, on obtient :
 sur la surface : $\frac{1}{2}\rho_l v_0^2 + \rho_l g(H + h_1) + P_0 \approx \rho_l g(H + h_1) + P_0 = \text{const}$, car $v_0 \approx 0$
 en C : $\frac{1}{2}\rho_l v_C^2 + \rho_l g h_C + P_C = \frac{1}{2}\rho_l v_C^2 + P_{can} = \text{const}$ (on a utilisé que $h_C = 0$ et $P_C = P_{can}$) et donc, en simplifiant,

$$v_C = \sqrt{2 \frac{P_0 - P_{can}}{\rho_l} + 2g(H + h_1)} \quad (1)$$

- (b) On compare le point C avec A, et on obtient par le théorème de Bernoulli :

$$\frac{1}{2}\rho_l v_A^2 + \rho_l g h_A + P_A = \frac{1}{2}\rho_l v_C^2 + \rho_l g h_C + P_C.$$

En tenant compte de la conservation du flux, on a que $v_A = v_C$, on trouve

$$\rho_l g h_A + P_A = \rho_l g h_C + P_C.$$

Et, en utilisant $P_C = P_{can}$, $h_C = 0$ et $h_A = h_1$ on obtient

$$P_A = P_{can} - \rho_l g h_1 \quad (2)$$

De la même façon, en comparant le point C avec B, on trouve

$$P_B = P_{can} - \rho_l g h_3 \quad (3)$$

On peut aussi trouver P_A (et aussi P_B) en partant de la surface.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\rho_l v_A^2 + \rho_l g h_A + P_A &= \frac{1}{2}\rho_l v_0^2 + \rho_l g h_0 + P_0, \\ \Rightarrow \frac{1}{2}\rho_l \left[2 \frac{P_0 - P_{can}}{\rho_l} + 2g(H + h_1) \right] + \rho_l g h_1 + P_A &= \rho_l g(h_1 + H) + P_0, \end{aligned}$$

et donc, en réarrangeant :

$$P_A = P_{can} - \rho_l g h_1.$$

- (c) Comme dans cette partie $P_{can} = P_0$, l'équation 1 se simplifie en $v_C = \sqrt{2g(H + h_1)}$. En considérant la conservation du flux entre la surface et le point C ($v_{HA} = v_{CA}$), on obtient l'expression de la vitesse de la surface ou le flux du volume par le point A :

$$v_H = \frac{4a^2}{LK} \sqrt{2g(H + h_1)} \quad (4)$$

ou du flux du volume :

$$\phi = 4a^2 \sqrt{2g(H + h_1)}. \quad (5)$$

On procède en réarrangeant et en intégrant l'expression de la vitesse $\frac{dH(t)}{dt} = -v_H(t)$:

$$\begin{aligned} \int_H^0 \frac{dH'}{\sqrt{H' + h_1}} &= -\frac{4a^2 \sqrt{2g}}{LK} \int_0^{\Delta t} dt \\ -2\sqrt{H' + h_1}|_H^0 &= -\frac{4a^2 \sqrt{2g}}{LK} t|_0^{\Delta t} \\ -2\sqrt{H + h_1} &= -\frac{4a^2 \sqrt{2g}}{LK} \Delta t \\ \Delta t &= \frac{LK}{a^2 \sqrt{8g}} \left(\sqrt{H + h_1} - \sqrt{h_1} \right) \end{aligned} \quad (6)$$

(d) On commence par calculer la hauteur Δz de liquide déplacé par la pression de

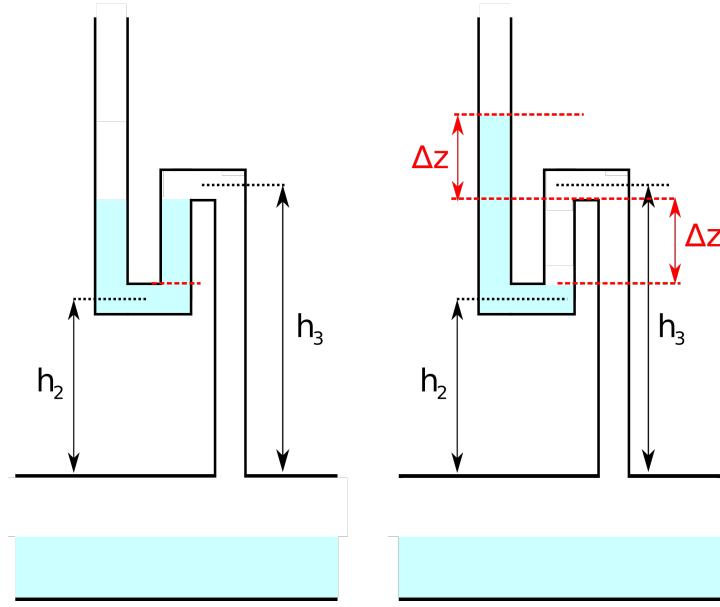


FIGURE 1 – Pression maximale dans la canalisation

la canalisation. De la figure 1, en tenant compte des dimensions du tube, on peut voir que

$$\Delta z = h_3 - h_2 - 2a \quad (7)$$

quand l'interface eau-air dans la partie droite du siphon arrive à la position de la ligne rouge hachurée, en utilisant la loi de la pression hydrostatique, nous pouvons calculer la pression :

$$P_{can} = P_0 + \rho_l g 2\Delta z$$

ce qui, avec l'équation 7, nous donne le résultat

$$P_{can} - P_0 = \rho_l g (2h_3 - 2h_2 - 4a) \quad (8)$$

(e) Comme on voit dans la figure 2, la colonne d'huile de hauteur Δz va déplacer un volume d'eau de hauteur $z_2 - z_1$ dans la canalisation. Pour trouver $z_2 - z_1$, on commence par égaliser la pression à gauche et à droite de la ligne au bas du siphon (voir la figure) :

$$P_L = \rho_l g (z_1 - h_2) + \rho_h g \Delta z + P_0 = \rho_l g (z_2 - h_2) + P_0 = P_R$$

$$\Rightarrow \frac{z_2 - z_1}{\Delta z} = \frac{\rho_h}{\rho_l}$$

$$\Rightarrow z_2 - z_1 = \frac{\rho_h}{\rho_l} \Delta z$$

Donc, pour le volume d'eau parti dans la canalisation, on trouve

$$\Delta V = 4a^2 \Delta z \frac{\rho_h}{\rho_l} \quad (9)$$

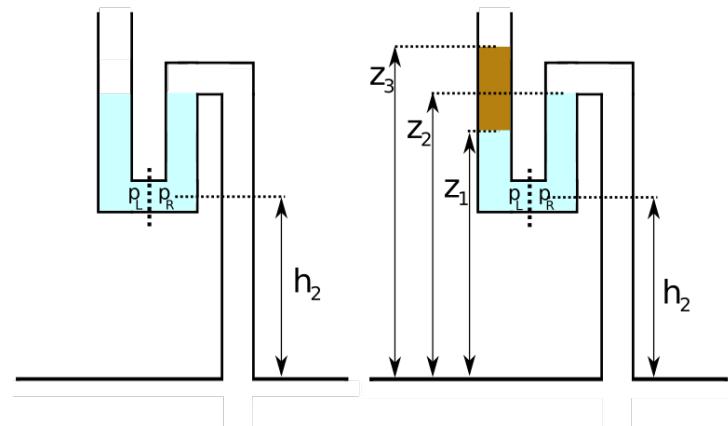


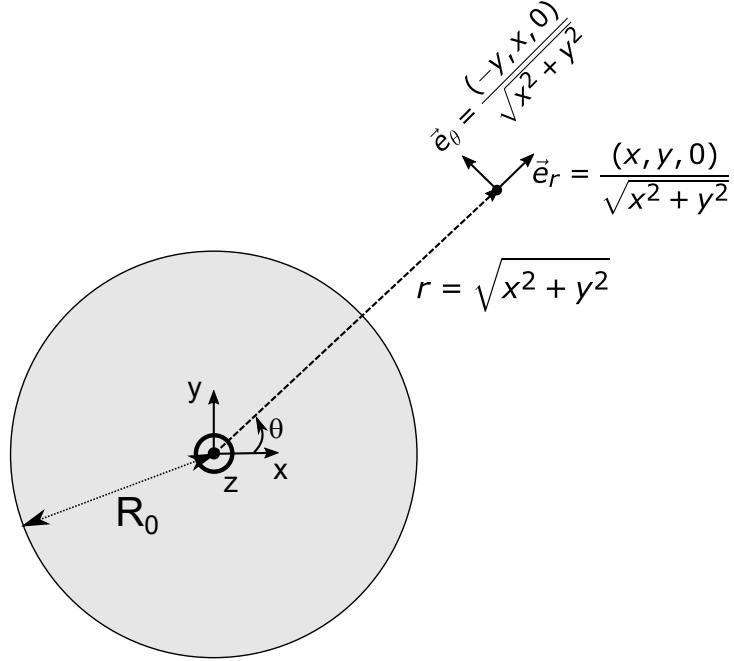
FIGURE 2 – Huile dans le siphon

Exercice 2: Écoulement (9 points)

On considère un écoulement stationnaire d'un fluide parfait et incompressible ($\rho = \rho_0 = \text{const.}$). Le champ de vitesse du fluide, en coordonnées cylindriques et pour $r = \sqrt{x^2 + y^2} \geq R_0$, est donné par :

$$\vec{u}(\vec{r}) = u_r(r)\vec{e}_r + \frac{c_0}{r}\vec{e}_\theta, \quad r \geq R_0$$

où c_0 est une constante. La figure suivante définit les systèmes de coordonnées (cartésiennes et cylindriques) utilisés.



- Montrer que $\vec{u}(\vec{r})$ satisfait l'équation de continuité si $u_r(r) = c_1/r$, où c_1 est une constante. On supposera par la suite que $c_1 = c_0 = c > 0$.
- Dessiner les vecteurs vitesse pour $r = R_0$, $r = 2R_0$, $r = 3R_0$ et $\theta = 0$, $\theta = \pi/4$, $\theta = \pi/2$ (donc, en neuf points de l'espace au total). Puis, dessiner qualitativement les lignes de courant.
- Calculer le flux massique (masse par unité de temps) à travers une surface en forme de cylindre de hauteur H et de rayon $r_{cyl} = 2R_0$. L'axe principal du cylindre est orienté selon \vec{e}_z et passe par le point $(x = 0, y = 0)$. Même question pour $r_{cyl} = 3R_0$. Les flux sont-ils égaux ? Commenter.
- Donner l'expression de $\vec{u}(\vec{r})$ dans le système de coordonnées cartésiennes (x, y, z) tel que défini dans la figure.
- Calculer, en coordonnées cartésiennes, la composante x de accélération d'un élément fluide en un point (x, y, z) avec $\sqrt{x^2 + y^2} \geq R_0$.

Solution:

- L'écoulement étant stationnaire et incompressible, l'équation de continuité est satisfaite si $\nabla \cdot \vec{u} = 0$. On a, en coordonnées cylindriques,

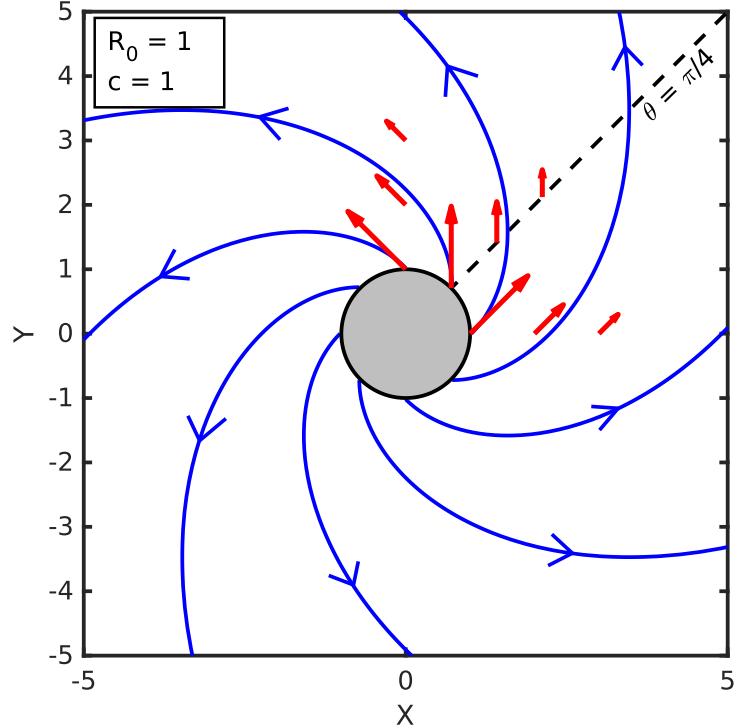
$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{u} &= \frac{1}{r} \frac{\partial(ru_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \\ &= \frac{1}{r} \frac{\partial(ru_r)}{\partial r} \end{aligned}$$

car $u_z = 0$ et u_θ ne dépend pas de θ . On a alors

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0 \iff \frac{1}{r} \frac{\partial(ru_r)}{\partial r} = 0 \iff ru_r = cst \iff u_r \propto \frac{1}{r}$$

et donc $u_r = \frac{c_1}{r} = \frac{c}{r}$ satisfait bien l'équation de continuité.

- (b) La figure ci-dessous montre les vecteurs vitesse demandés (flèches rouges) et la forme des lignes de courant (lignes bleues).



- (c) Un cylindre de hauteur H et de rayon $r = 2R_0$ est composé de trois faces :
- Les deux faces aux extrémités, dont le vecteur surface est orienté selon \vec{e}_z et $-\vec{e}_z$.
 - La face “circulaire”, dont le vecteur surface est orienté selon \vec{e}_r , et s'exprime $d\vec{S} = dS\vec{e}_r$.
- Le flux massique Φ passant à travers la surface du cylindrique est donné par

$$\Phi = \rho_0 \int_S \vec{u} \cdot d\vec{S}.$$

Pour les deux faces aux extrémités, le flux sera nul car $\vec{u} \perp \vec{e}_z$. Il ne nous reste qu'à calculer le flux sur la face “circulaire”, S_{circ} ,

$$\begin{aligned} \Phi &= \rho_0 \int_{S_{circ}} \vec{u} \cdot d\vec{S} \\ &= \rho_0 \int_{S_{circ}} \left(\frac{c}{r} \vec{e}_r + \frac{c}{r} \vec{e}_\theta \right) \cdot dS \vec{e}_r \\ &= \rho_0 \int_{S_{circ}} \frac{c}{r} dS \\ &= \frac{c\rho_0}{2R_0} \int_{S_{circ}} dS \\ &= \frac{c\rho_0}{2R_0} 2\pi 2R_0 H \\ &= 2\pi \rho_0 c H \end{aligned}$$

De la même façon, on a, pour un cylindre de rayon $3R_0$,

$$\Phi' = 2\pi \rho_0 c H$$

On constate que $\Phi = \Phi'$. Les flux sont égaux, ce qui n'est pas surprenant car l'écoulement est incompressible : il ne peut pas y avoir “d'accumulation” de masse entre les deux cylindres.

(d) Le passage entre coordonnées cartésiennes et cylindriques peut être effectué en utilisant que

$$\begin{cases} \vec{e}_r = \cos \theta \vec{e}_x + \sin \theta \vec{e}_y \\ \vec{e}_\theta = -\sin \theta \vec{e}_x + \cos \theta \vec{e}_y \end{cases}$$

On peut donc réécrire

$$\begin{aligned} \vec{u}(\vec{r}) &= \frac{c}{r} (\cos \theta \vec{e}_x + \sin \theta \vec{e}_y) + \frac{c}{r} (-\sin \theta \vec{e}_x + \cos \theta \vec{e}_y) \\ &= \frac{c}{r} (\cos \theta - \sin \theta) \vec{e}_x + \frac{c}{r} (\sin \theta + \cos \theta) \vec{e}_y \end{aligned}$$

et comme $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\cos \theta = x/r$ et $\sin \theta = y/r$, on a

$$\vec{u}(\vec{r}) = \frac{c}{x^2 + y^2} (x - y) \vec{e}_x + \frac{c}{x^2 + y^2} (y + x) \vec{e}_y$$

(e) La composante selon x de l'accélération d'un élément fluide est donnée, en régime stationnaire, par

$$\frac{Du_x}{Dt} = u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y}$$

Calculons chacun de ces termes

$$\begin{aligned} u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} &= \frac{c(x-y)}{x^2+y^2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{c}{x^2+y^2} (x-y) \right) \\ &= \frac{c^2(x-y)}{x^2+y^2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x-y}{x^2+y^2} \right) \\ &= \frac{c^2(x-y)}{x^2+y^2} \left(\frac{x^2+y^2-2x(x-y)}{(x^2+y^2)^2} \right) \\ &= \frac{c^2(x-y)}{(x^2+y^2)^3} (y^2-x^2+2xy) \end{aligned}$$

et

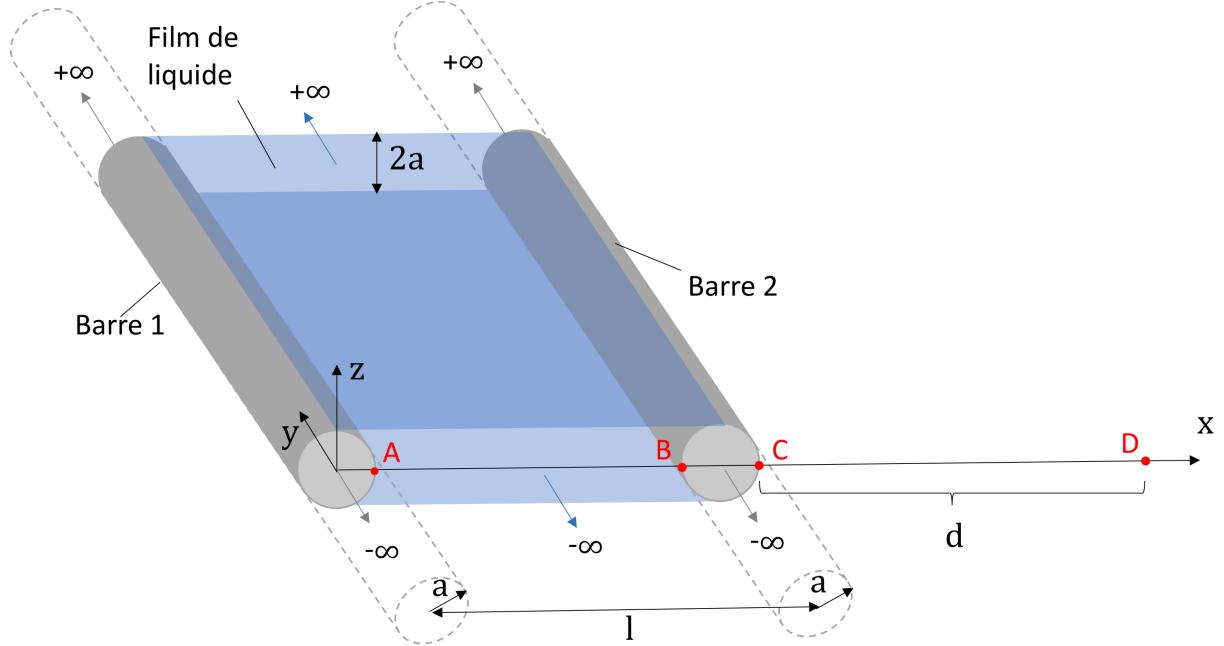
$$\begin{aligned} u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} &= \frac{c(x+y)}{x^2+y^2} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{c}{x^2+y^2} (x-y) \right) \\ &= \frac{c^2(x+y)}{x^2+y^2} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{x-y}{x^2+y^2} \right) \\ &= \frac{c^2(x+y)}{x^2+y^2} \left(\frac{-x^2-y^2-2y(x-y)}{(x^2+y^2)^2} \right) \\ &= \frac{c^2(x+y)}{(x^2+y^2)^3} (y^2-x^2-2xy) \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned}\frac{Du_x}{Dt} &= \frac{c^2(x-y)}{(x^2+y^2)^3}(y^2-x^2+2xy) + \frac{c^2(x+y)}{(x^2+y^2)^3}(y^2-x^2-2xy) \\ &= \frac{c^2}{(x^2+y^2)^3}[(x-y)(y^2-x^2+2xy) + (x+y)(y^2-x^2-2xy)] \\ &= \frac{c^2}{(x^2+y^2)^3}[xy^2-x^3+2x^2y-y^3+yx^2-2xy^2+xy^2-x^3-2x^2y+y^3-x^2y-2xy^2] \\ &= \frac{c^2}{(x^2+y^2)^3}[-2x^3-2xy^2] \\ &= \frac{-2c^2}{(x^2+y^2)^3}x(x^2+y^2) \\ &= \frac{-2c^2}{(x^2+y^2)^2}x\end{aligned}$$

Exercice 3: Barres chargées et mesure de la tension superficielle (9 points)

On considère deux barres rectilignes, infinies, parallèles, à une distance l l'une de l'autre, et de rayon a (voir figure). Les deux barres portent une densité de surface constante, donnée par $\sigma_{el} > 0$. Entre les deux barres, un film de liquide est suspendu, d'épaisseur $2a$ et également avec une extension infinie le long de la dimension y . Le liquide est un isolant et sa susceptibilité électrique est négligeable.



- Déterminer le champ \vec{E} généré par la barre 1 pour $r = \sqrt{x^2 + z^2} < a$ et $r = \sqrt{x^2 + z^2} > a$, en fonction des paramètres donnés.
- Déterminer maintenant la force par longueur de barre que la barre 2 ressent à cause du champ électrique généré par la barre 1. On peut supposer que $a \ll l$. Pourquoi cela simplifie le calcul ? Quelle est la direction de cette force ?
- Le système est en équilibre et on ne considère pas la force de gravité. En déduire la tension superficielle du liquide, γ_{lg} .
- Déterminer la différence de potentiel électrostatique entre les points A et B.
- Déterminer la différence de potentiel électrostatique entre les points C et D séparés par la distance d le long de l'axe x .

Solution:

- Selon la loi de Gauss, le flux du champ électrique \vec{E} à travers une surface fermée Σ est proportionnel à la charge contenue dans cette surface, tel que

$$\int_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} \quad (1)$$

Il est important de voir que le liquide isolant n'affecte pas le champ électrique, car $\chi_E \ll 1 \Rightarrow \epsilon_r \approx 1 \Rightarrow \epsilon_0 \epsilon_r \approx \epsilon_0$. Par symétrie de la barre 1, on peut voir que le champ électrique généré par cette barre a uniquement une composante radiale, i.e. $\vec{E} = E(r) \vec{e}_r$. On définit donc comme surface Σ un cylindre de rayon r et de longueur L en direction \vec{e}_y , avec l'axe principal de ce cylindre égal à celui de la barre 1. Pour le cas de $r < a$, aucune charge n'est contenue et ainsi :

$$\int_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma_{circ}} E(r) \vec{e}_r \cdot dS \vec{e}_r &= \\ E(r) \int_{\Sigma_{circ}} dS &= E(r) 2\pi r L = \\ \Rightarrow E(r) &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

où on a utilisé le fait que l'intégrale sur les 2 faces aux extrémités du cylindres est nulle, car $\vec{e}_r \cdot d\vec{S} = 0$, ce qui permet de garder uniquement la face "circulaire". Dans le cas de $r > a$:

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{S} &= \int_{\Sigma_{circ}} E(r) \vec{e}_r \cdot dS \vec{e}_r = \frac{2\pi a L \sigma_{el}}{\epsilon_0} \\ E(r) 2\pi L r &= \frac{2\pi a L \sigma_{el}}{\epsilon_0} \end{aligned} \quad (4)$$

$$\Rightarrow E(r) = \frac{\sigma_{el}}{\epsilon_0} \frac{a}{r} \quad (5)$$

- (b) En toute généralité, $\vec{F} = q\vec{E}$. Comme les charges sont distribuées sur la surface de la barre, il faudrait intégrer sur toute la surface. Par symétrie, on peut voir que la force sur la barre sera uniquement selon \vec{e}_x , i.e. les composantes selon \vec{e}_z s'annulent. Comme $l \gg a$, on peut dire, avec une bonne approximation, que le champ E généré par la barre 1 varie très faiblement à travers la surface de la barre 2, et est donné par $E(l)$. Une partie de la barre 2 de longueur L contient une charge

$$Q_L = 2\pi a L \sigma_{el} \quad (6)$$

La force par longueur résultante est donc répulsive et donnée par

$$\frac{F(l)}{L} = 2\pi a E(l) = \frac{2\pi a^2 \sigma_{el}^2}{\epsilon_0 l} \quad (7)$$

- (c) Dans le bilan des forces, il y a la force électrique ainsi que 2 fois la force de surface (interface en haut et en bas de la barre) :

$$\begin{aligned} \sum \vec{F} &= 0 = \vec{F}_{el} + 2\vec{F}_{\gamma} \\ &= \frac{2\pi a^2 \sigma_{el}^2 L}{\epsilon_0 l} - 2\gamma_{lg} L \end{aligned} \quad (8)$$

$$\Rightarrow \gamma_{lg} = \frac{\pi a^2 \sigma_{el}^2}{\epsilon_0 l} \quad (9)$$

- (d) Pour déterminer le potentiel électrique, il faut considérer les 2 champs électriques, celui de la barre 1 et celui généré par la barre 2. Ainsi, le champ électrique total résultant des 2 barres selon l'axe x entre le point A et B est donné par

$$\vec{E}_{tot} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \frac{\sigma_{el} a}{\epsilon_0 x} \vec{e}_x - \frac{\sigma_{el} a}{\epsilon_0 (l-x)} \vec{e}_x \quad (10)$$

La différence de potentiel est définie par

$$V_B - V_A = - \int_A^B \vec{E}_{tot} \cdot \vec{dl} \quad (11)$$

et en insérant les champs des deux barres, on obtient

$$\begin{aligned} V_B - V_A &= - \int_a^{l-a} \frac{a\sigma_{el}}{\epsilon_0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{l-x} \right) dx \\ &= - \int_a^{l-a} \frac{a\sigma_{el}}{\epsilon_0} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x-l} \right) dx \\ &= - \frac{a\sigma_{el}}{\epsilon_0} [\ln(x) + \ln(x-l)]_a^{l-a} \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} &= - \frac{a\sigma_{el}}{\epsilon_0} \left[\ln\left(\frac{l-a}{a}\right) + \ln\left(\frac{-a}{a-l}\right) \right] \\ &= - \frac{a\sigma_{el}}{\epsilon_0} \ln\left(\frac{(l-a) \cdot (-a)}{(a-l) \cdot a}\right) = - \frac{a\sigma_{el}}{\epsilon_0} \ln(1) = 0 \end{aligned} \quad (13)$$

- (e) Le champ $\vec{E}_1(x)$ généré par la barre 1 le long de l'axe \vec{e}_x et pour $x > a$ est $\vec{E}_1(x) = \frac{\sigma_{el}a}{\epsilon_0 x} \vec{e}_x$. Le champ $\vec{E}_2(x)$, généré par la barre 2 le long de l'axe \vec{e}_x et pour $x > l+a$, est $\vec{E}_2(x) = \frac{\sigma_{el}a}{\epsilon_0(x-l)} \vec{e}_x$. Ainsi on a que

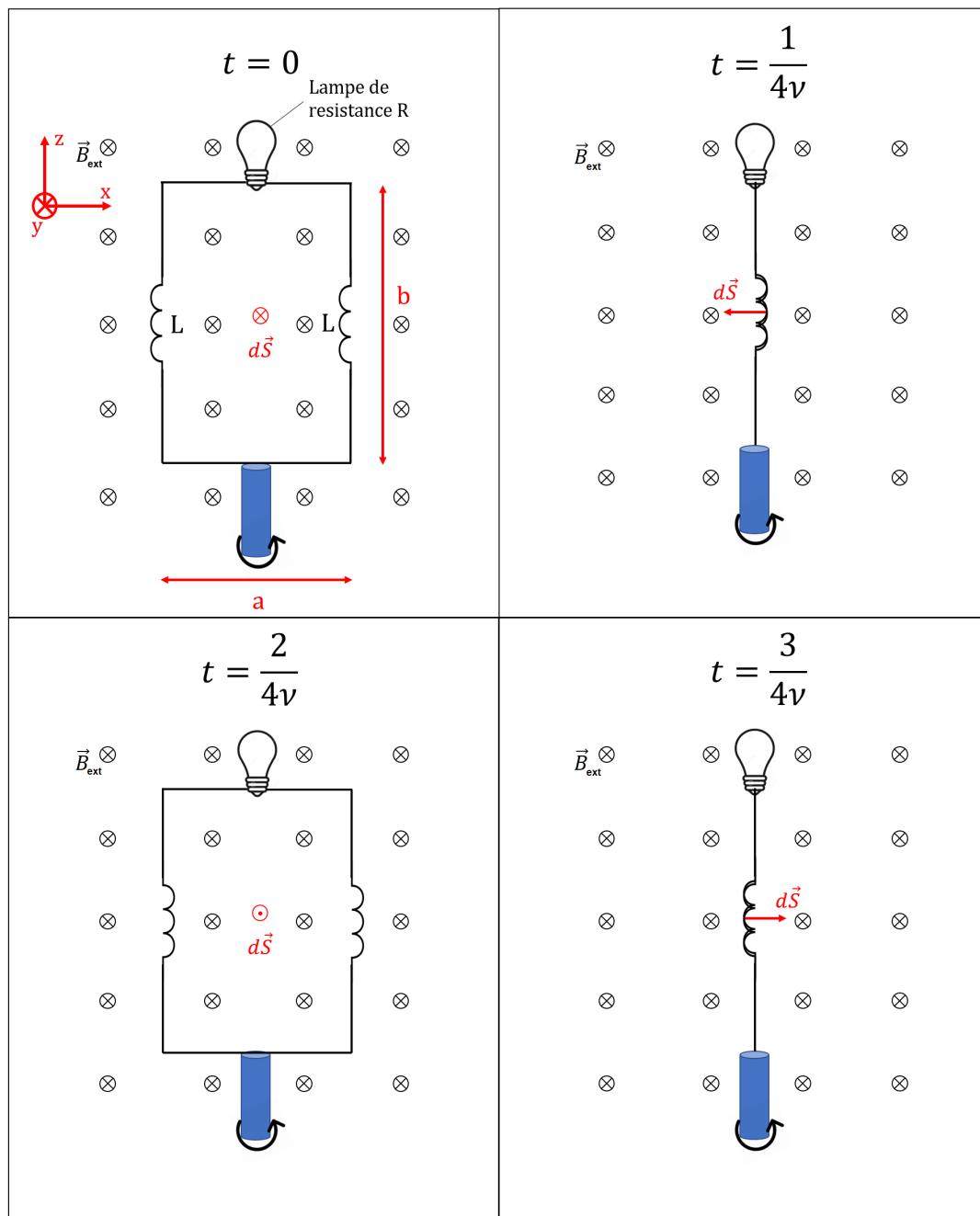
$$V_D - V_C = - \int_C^D (\vec{E}_1 + \vec{E}_2) \cdot \vec{dl} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} &= - \int_{l+a}^{d+l+a} \frac{a\sigma_{el}}{\epsilon_0} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x-l} \right) dx \\ &= - \frac{a\sigma_{el}}{\epsilon_0} [\ln(x) + \ln(x-l)]_{l+a}^{d+l+a} = - \frac{a\sigma_{el}}{\epsilon_0} [\ln(x \cdot (x-l))]_{l+a}^{d+l+a} \\ &= - \frac{a\sigma_{el}}{\epsilon_0} (\ln((d+l+a)(d+a) - \ln((l+a)a)) \\ &= \frac{a\sigma_{el}}{\epsilon_0} \ln\left(\frac{(l+a)a}{(d+l+a)(d+a)}\right) \end{aligned} \quad (15)$$

Exercice 4: Induction dans une boucle tournante (11 points)

Un fil conducteur forme une boucle fermée de largeur a et de longueur b , comme montré dans la figure. Cette boucle est fixée sur une poignée isolante et tourne autour de l'axe vertical à la fréquence $\nu = \omega/(2\pi)$, où ω est la pulsation. La lampe dans la partie supérieure de la boucle a une résistance R , beaucoup plus grande que la résistance du reste du fil. Les deux bobines ont chacune une inductance L , beaucoup plus grande que l'auto-inductance du reste du circuit. La boucle fermée est plongée dans un champ magnétique constant dans l'espace et le temps, donné par $\vec{B}_{ext} = B_{ext}\vec{e}_y$.

- (a) Quel est le flux du champ magnétique externe \vec{B}_{ext} à travers la boucle fermée pour les quatre instants $t = 0, 1/(4\nu), 2/(4\nu)$ et $3/(4\nu)$ montrés dans la figure. Choisir l'orientation de l'élément vectoriel de surface $d\vec{S}$ comme indiqué dans la figure.



Cette exercice continue sur la prochaine page.

- (b) Calculez la f.é.m $\epsilon_{ind}(t)$ induite dans le circuit par le champ magnétique externe \vec{B}_{ext} .
- (c) Pendant que la boucle tourne, la lampe clignote. À quels moments montrés dans la figure la lampe est allumée, et à quels moments est-elle éteinte, dans le cas où $L = 0$? (on suppose que l'auto-inductance du circuit reste négligeable même si $L = 0$). Justifiez votre réponse.
- (d) On reprend le cas général $L \neq 0$. Écrivez la loi des mailles pour la boucle fermée. Définissez la direction positive du courant en accord avec la définition de $d\vec{S}$ (donc dans le sens des aiguilles d'une montre dans la figure à $t = 0$). Si vous n'êtes pas sûr du signe avec laquelle $\epsilon_{ind}(t)$ apparaît dans la loi des mailles, faites un choix à ce moment.
- (e) En notation complexe, on peut écrire la f.é.m induite comme
- $$\tilde{\epsilon}_{ind}(t) = \tilde{\epsilon}_m e^{i\omega t}$$
- où $\tilde{\epsilon}_m \in \mathbb{C}$ est une constante et \sim indique des grandeurs complexes. Déterminez $\tilde{\epsilon}_m$. Puis, injectez cette expression de $\tilde{\epsilon}_{ind}(t)$ dans l'équation trouvée dans la partie d) et cherchez une solution pour le courant dans le circuit de la forme $\tilde{I}(t) = \tilde{I}_0 e^{i\omega t}$ et déterminez \tilde{I}_0 .
- (f) À partir du résultat de e), trouvez la forme réelle $I(t)$.
- (g) Maintenant, si $L > 0$, qu'est-ce qui change concernant le clignotement de la lampe par rapport au résultat de la partie c)?
- (h) Discutez si la direction du courant trouvée, et donc le signe de la f.é.m. choisi dans la partie d), est correcte ou non. Justifiez votre réponse.

Solution:

- (a) Le flux du champ magnétique à travers la boucle est,

$$\Phi_B = \int \int_{boucle} \vec{B}_{ext} \cdot d\vec{S}. \quad (1)$$

Le champ magnétique est orienté selon \vec{e}_y , la direction de $d\vec{S}$ varie au cours du temps.

- A $t = 0$, B_{ext} et $d\vec{S}$ sont parallèles, et le flux est donné par abB_{ext} .
- A $t = \frac{1}{4\nu}$, B_{ext} et $d\vec{S}$ sont perpendiculaires, et le flux est donc zéro.
- A $t = \frac{2}{4\nu}$, B_{ext} et $d\vec{S}$ sont anti-parallèles, et le flux est donné par $-abB_{ext}$.
- A $t = \frac{3}{4\nu}$, B_{ext} et $d\vec{S}$ sont perpendiculaires, et le flux est donc zéro.

- (b) La fem induite par un changement de flux magnétique est,

$$\epsilon_{ind} = -\frac{d}{dt} \Phi_B(t). \quad (2)$$

On doit donc trouver une forme générale pour le flux magnétique à travers la boucle à tout temps.

On peut écrire $d\vec{S}(t)$ comme $dS \cos(\omega t) \vec{e}_y - dS \sin(\omega t) \vec{e}_x$. Donc, la forme générale pour le flux magnétique est,

$$\Phi_B(t) = \int \int_{boucle} B_{ext} \vec{e}_y \cdot (\cos(\omega t) \vec{e}_y - \sin(\omega t) \vec{e}_x) dS = \int \int_{boucle} B_{ext} \cos(\omega t) dS \quad (3)$$

$$= B_{ext} \cos(\omega t) \int \int_{boucle} dS = B_{ext} ab \cos(\omega t) \quad (4)$$

A partir de cette forme, on peut calculer la fem induite,

$$\epsilon_{ind} = -\frac{d}{dt} (B_{ext} ab \cos(\omega t)) = \omega B_{ext} ab \sin(\omega t). \quad (5)$$

(c) La lampe clignote. Donc, elle est certainement allumée quand le courant est maximal et éteinte quand le courant est égal à zéro. Comme on néglige ici l'auto-inductance, le courant est maximal quand ϵ_{ind} est maximale et le courant est zéro quand $\epsilon_{ind} = 0$.

Le courant est maximal pour $\epsilon_{ind} = \pm\omega B_{ext}ab$, qui correspond à $\sin(\omega t) = \pm 1$. On peut donc dire que la lampe sera allumée pour,

$$\omega t = (n + \frac{1}{2})\pi \rightarrow t = \frac{(n + 1/2)\pi}{\omega} = \frac{(2n + 1)\pi}{2\omega} = \frac{2n + 1}{4\nu}, \quad (6)$$

ou n est un nombre entier (positif ou négatif).

Le courant est zéro quand $\epsilon_{ind} = 0$, qui correspond à $\sin(\omega t) = 0$. Donc, la lampe sera éteinte pour

$$\omega t = n\pi \rightarrow t = \frac{n\pi}{\omega} = \frac{2n\pi}{2\omega} = \frac{2n}{4\nu}, \quad (7)$$

ou n est encore un nombre entier (positif ou négatif).

Alors, pour $t = 0$ et $t = 2/4\nu$, la lampe sera éteinte, et pour $t = 1/4\nu$ et $t = 3/4\nu$, la lampe sera allumée.

(d) Définissant le courant dans le sens de l'aiguille d'une montre pour la figure à $t = 0$, et prenant ϵ_{ind} dans la même direction, on trouve,

$$-IR - 2L \frac{dI}{dt} + \epsilon_{ind} = 0. \quad (8)$$

(e) On peut écrire $\tilde{\epsilon}_{ind}(t)$ comme,

$$\tilde{\epsilon}_{ind}(t) = \tilde{\epsilon}_m(\cos(\omega t) + i \sin(\omega t)). \quad (9)$$

Puis, on voit que la forme réelle est,

$$\epsilon_{ind}(t) = \Re(\tilde{\epsilon}_m) \cos(\omega t) - \Im(\tilde{\epsilon}_m) \sin(\omega t). \quad (10)$$

De la partie (b), on sait que la partie réelle de $\tilde{\epsilon}_{ind}(t)$ a la forme,

$$\epsilon_{ind}(t) = \omega B_{ext}ab \sin(\omega t). \quad (11)$$

En comparaisant ces deux formes, on voit que $\Re(\tilde{\epsilon}_m) = 0$ et $\Im(\tilde{\epsilon}_m) = -B_{ext}ab\omega$, et donc,

$$\tilde{\epsilon}_m = -iB_{ext}ab\omega \quad \text{et} \quad \tilde{\epsilon}_{ind} = -iB_{ext}ab\omega e^{i\omega t} \quad (12)$$

En injectant ce résultat dans l'équation 8, avec $\tilde{I}(t) = \tilde{I}_0 e^{i\omega t}$, on a,

$$-iB_{ext}ab\omega e^{i\omega t} = \tilde{I}_0 e^{i\omega t} (R + 2i\omega L), \quad (13)$$

alors, on trouve,

$$\tilde{I}_0 = \frac{-iB_{ext}ab\omega}{R + 2i\omega L} = \frac{-iB_{ext}ab\omega}{R + 2i\omega L} \frac{(R - 2i\omega L)}{(R - 2i\omega L)} = -B_{ext}ab\omega \frac{(2\omega L + iR)}{R^2 + 4\omega^2 L^2} \quad (14)$$

(f) On peut écrire \tilde{I}_0 en forme polaire, $\tilde{I}_0 = r e^{i\theta}$, où $r = \sqrt{\Re(\tilde{I}_0)^2 + \Im(\tilde{I}_0)^2}$ et, comme $\Im(\tilde{I}_0) < 0$ et $\Re(\tilde{I}_0) < 0$, $\theta = \pi + \tan^{-1}(\frac{\Im(\tilde{I}_0)}{\Re(\tilde{I}_0)})$,

$$r = \frac{B_{ext}ab\omega}{R^2 + 4\omega^2 L^2} \sqrt{4\omega^2 L^2 + R^2} = \frac{B_{ext}ab\omega}{\sqrt{R^2 + 4\omega^2 L^2}} \quad (15)$$

$$\theta = \pi + \tan^{-1}\left(\frac{R}{2\omega L}\right) \quad (16)$$

Puis, on trouve,

$$\tilde{I}(t) = \frac{B_{ext}ab\omega}{\sqrt{R^2 + 4\omega^2L^2}} \exp\left[i\left(\omega t + \pi + \tan^{-1}\left(\frac{R}{2\omega L}\right)\right)\right]. \quad (17)$$

On peut écrire la partie réelle comme $I(t) = r \cos(\theta + \omega t)$,

$$I(t) = \frac{B_{ext}ab\omega}{\sqrt{R^2 + 4\omega^2L^2}} \cos\left[\omega t + \pi + \tan^{-1}\left(\frac{R}{2\omega L}\right)\right] \quad (18)$$

On pourrait s'arrêter là, mais pour mieux comparer $I(t)$ avec $\epsilon_{ind}(t)$, on procède de manière suivante. On utilise $\cos(a + \pi) = -\cos(a) = \sin(a - \pi/2)$,

$$I(t) = \frac{B_{ext}ab\omega}{\sqrt{R^2 + 4\omega^2L^2}} \sin\left[\omega t + \tan^{-1}\left(\frac{R}{2\omega L}\right) - \frac{\pi}{2}\right]. \quad (19)$$

Autrement, on aurait pu écrire, comme pour la partie (e),

$$\tilde{I}(t) = \tilde{I}_0(\cos(\omega t) + i \sin(\omega t)), \quad (20)$$

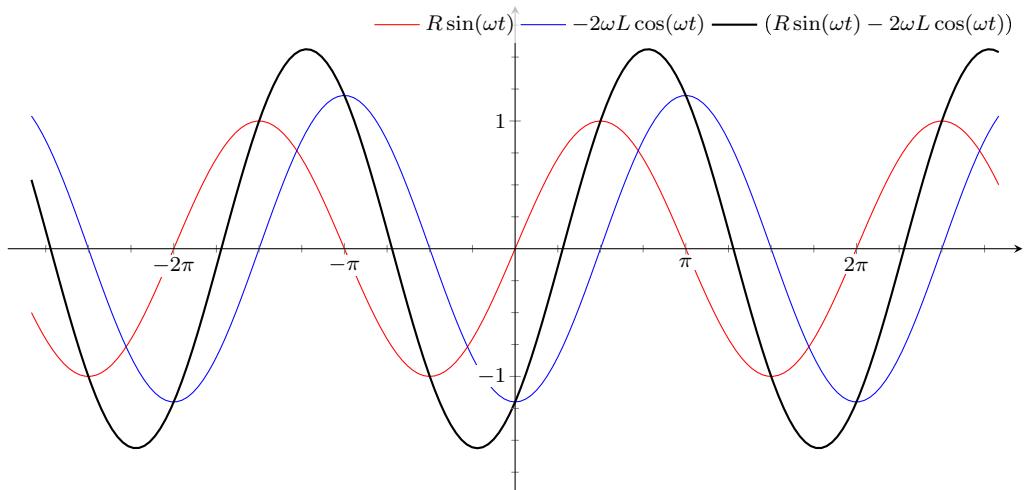
$$I(t) = \Re(\tilde{I}_0) \cos(\omega t) - \Im(\tilde{I}_0) \sin(\omega t). \quad (21)$$

Puis, du résultat de la partie (e),

$$I(t) = \frac{B_{ext}ab\omega}{R^2 + 4\omega^2L^2} [-2\omega L \cos(\omega t) + R \sin(\omega t)]. \quad (22)$$

- (g) Selon l'expression trouvée dans l'équation 19, $I(t)$ et $\epsilon_{ind}(t)$ sont déphasés par $\phi = \tan^{-1}(R/2\omega L) - \pi/2$, qui, pour $R > 0$ et $L > 0$, est $-\pi/2 < \phi < 0$. Cela se voit aussi en notant que $\phi = \tan^{-1}(2\omega L/R)$. Maintenant, la lampe clignotera avec la même fréquence qu'avant, mais elle sera retardée par rapport au cas d'avant par un angle $|\phi| = \tan^{-1}(2\omega L/R)$, correspondant à un temps $|\phi|/(2\pi\nu)$. Donc, on attendra plus de temps avant que la lampe s'allume pour la première fois.

Alternativement, à partir de l'équation 22, on peut visualiser graphiquement le déphasage, voir figure.



La courbe $(R \sin(\omega t))$ (rouge) représente la forme du courant pour $L = 0$. En ajoutant la composante au courant dû aux inducteurs, $-2\omega L \cos(\omega t)$ (bleu), on obtient la courbe noire, qui est retardée au cours du temps.

- (h) De la règle de Lenz, le courant induit dans un circuit dû au changement du flux du champ magnétique est dans la direction tel que le champ magnétique qu'il crée lui-même s'oppose au changement de flux. On peut simplifier l'argument en considérant la situation pour $L = 0$, représenté par la courbe rouge dans la figure. A $t = 0$, le flux commence à diminuer car la surface selon \vec{e}_y diminue. Alors, un courant est induit pour opposer cette diminution de flux. Un courant dans le sens de l'aiguille d'une montre renforcera le champ externe. La courbe rouge dans la figure indique en effet un courant positif juste après $t = 0$, alors on a choisi le bon signe de ϵ_{ind} dans la loi des mailles dans la partie (d).