22 Juin 2021

Règlement de l'examen

Il est strictement interdit de consulter l'énoncé de l'examen avant le signal de début !

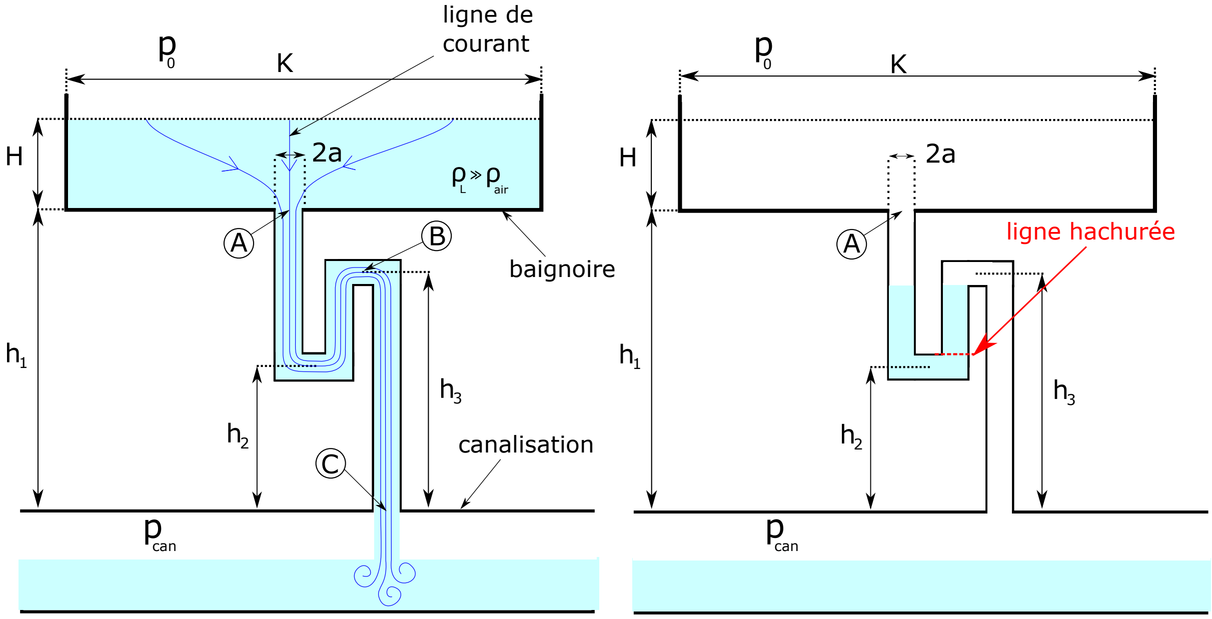
- Avant de commencer un exercice, lire attentivement tout l'énoncé. Certaines remarques, indications, et hypothèses importantes peuvent être à la fin de l'énoncé.
- Il y a quatre exercices. Les points attribués à chaque exercice sont indiqués.
- L'utilisation du crayon à papier et du stylo rouge est interdite sur les feuilles rendues pour correction.
- Écrire nom, prénom et numéro de table sur toutes les feuilles rendues, par exemple :
  Andri Ragettli, MA XYZ
  où XYZ est le numéro de table noté sur le post-it posé au coin de votre table.
- L'utilisation de téléphones portables, smartwatch, calculatrice, ou tout autre appareil électronique est strictement interdite.
- L'examen dure en tout 3h à partir du signal de début.
- Mettre votre carte CAMIPRO en évidence sur la table.
- Il n'est pas possible de quitter la salle avant 8h45, même si l'examen a été rendu. De manière générale, il n'est pas permis de quitter la salle sans autorisation.
- Un formulaire manuscrit d'une page A4 recto-verso ainsi que le formulaire du cours sont autorisés durant l'examen.

Bon travail !

Exercice 1: Vidange d'une baignoire et siphon (9 points)

Vous avez fini de prendre un bain dans votre baignoire et vous laissez couler l'eau (liquide incompressible de densité ρ_L), qui passe à travers un tube de section carrée constante (de côté $2a$) vers une canalisation, comme indiqué dans la figure à gauche. La baignoire a une longueur L, une largeur K, et est initialement remplie d'eau à une hauteur H. La pression de l'air dans votre salle de bain est p_0. La pression de l'air dans la canalisation est p_{can}.

Remarques : Les points A, B, et C dans la figure se trouvent au milieu de la section du tube. Vous pouvez négliger les effets de capillarité dans cet exercice et considérer l'eau comme un fluide parfait.



(a) En utilisant le Théorème de Bernoulli, trouvez la vitesse de l'eau à l'entrée de la canalisation (point C dans la figure) en fonction des paramètres donnés dans le texte et la figure. Vous pouvez supposer que $L \cdot K$ est beaucoup plus grand que la section du tube, de sorte que la vitesse à la surface du liquide peut être négligée dans ce calcul.

(b) Quelle est la pression de l'eau aux points A et B ?

(c) En supposant que $p_{\mathsf{can}} = p_0$, combien de temps faudra-t-il pour que la baignoire soit vidée ?

On considère maintenant la baignoire vide, et l'on est dans la situation indiquée dans la figure à droite, avec $p_0 = p_{\mathsf{can}}$. Le siphon (partie du tube en forme de «U») est rempli d'eau comme indiqué et permet d'isoler votre salle de bain du gaz et des odeurs de la canalisation.

(d) Maintenant, la pression dans la canalisation augmente. Quelle est la surpression $p_{\mathsf{can}} - p_0$ maximale admissible pour éviter que l'air de la canalisation puisse entrer dans la salle de bain ? Supposez que cela sera le cas dès que la surface d'eau dans la partie droite du siphon se situera à une hauteur plus basse que la ligne rouge hachurée dans le dessin de droite. Supposez que les dimensions du tube sont telles que l'eau dans la partie gauche du siphon ne remonte pas jusqu'au point A. Faire un dessin de la situation.

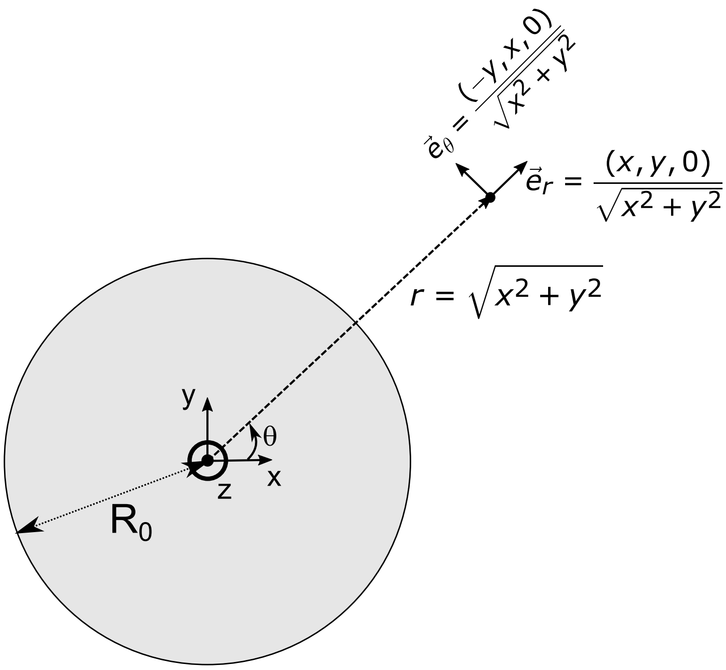
(e) On revient dans la situation décrite par la figure de droite ($p_0 = p_{\mathsf{can}}$). Avant de partir de chez vous pour une longue période, et pour éviter que l'eau dans le siphon ne s'évapore, vous versez un peu d'huile alimentaire dans la baignoire. Cette huile (densité $\rho_H = 0.9\rho_L$) va flotter sur la surface de l'eau du côté gauche du «U» du siphon, formant une couche d'épaisseur ΔZ. Dessinez la situation finale. Quel volume d'eau est parti dans la canalisation lors de cette action ? Supposez que l'huile se trouve uniquement dans la partie verticale du tube.

Exercice 2: Écoulement (9 points)

On considère un écoulement stationnaire d'un fluide parfait et incompressible ($\rho = \rho_0 = const.$). Le champ de vitesse du fluide, en coordonnées cylindriques et pour $r = \sqrt{x^2 + y^2} \geq R_0$, est donné par :

$$\vec{u}\,(\vec{r}) = u_r(r)\vec{e}_r + \frac{c_0}{r}\vec{e}_\theta, \quad r \geq R_0$$

où c_0 est une constante. La figure suivante définit les systèmes de coordonnées (cartésiennes et cylindriques) utilisés.



(a) Montrer que $\vec{u}\,(\vec{r})$ satisfait l'équation de continuité si $u_r(r) = c_1/r$, où c_1 est une constante. On supposera par la suite que $c_1 = c_0 = c > 0$.

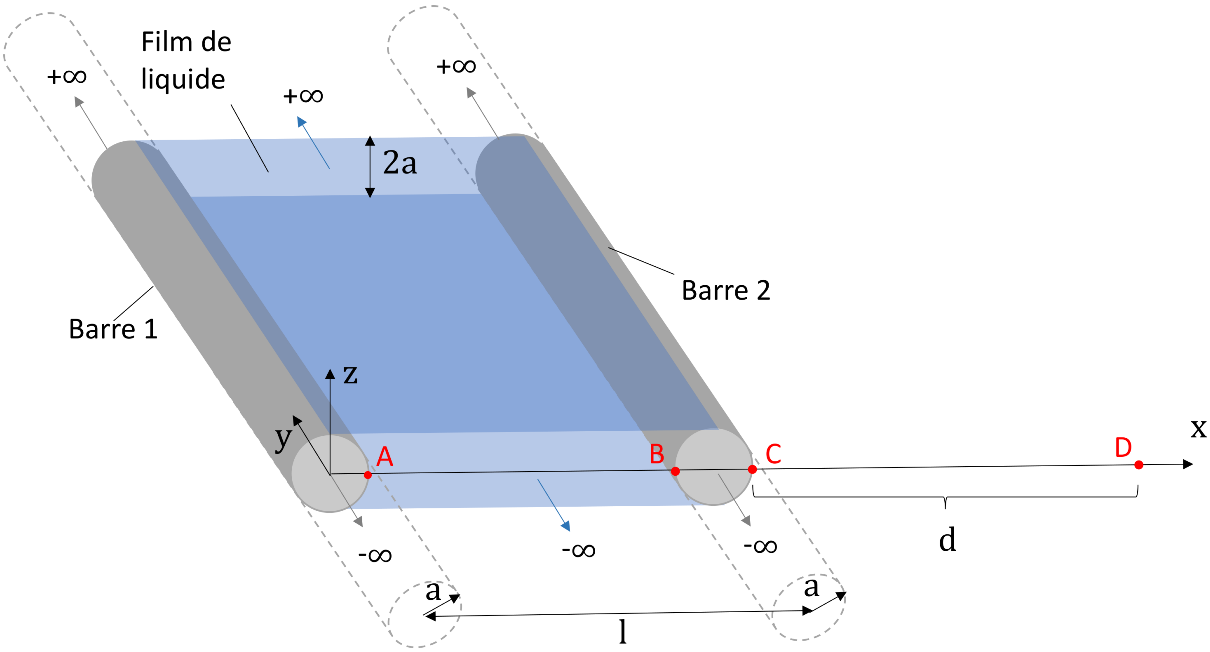
(b) Dessiner les vecteurs vitesse pour $r = R_0$, $r = 2R_0$, $r = 3R_0$ et $\theta = 0$, $\theta = \pi/4$, $\theta = \pi/2$ (donc, en neuf points de l'espace au total). Puis, dessiner qualitativement les lignes de courant.

(c) Calculer le flux massique (masse par unité de temps) à travers une surface en forme de cylindre de hauteur H et de rayon $r_{cyl} = 2R_0$. L'axe principal du cylindre est orienté selon $\vec{e}_z$ et passe par le point $(x = 0, y = 0)$. Même question pour $r_{cyl} = 3R_0$. Les flux sont-ils égaux ? Commenter.

(d) Donner l'expression de $\vec{u}\,(\vec{r})$ dans le système de coordonnées cartésiennes (x,y,z) tel que défini dans la figure.

(e) Calculer, en coordonnées cartésiennes, la composante x de accélération d'un élément fluide en un point (x, y, z) avec $\sqrt{x^2 + y^2} \geq R_0$.

Exercice 3: Barres chargées et mesure de la tension superficielle (9 points)
On considère deux barres rectilignes, infinies, parallèles, à une distance l l'une de l'autre, et de rayon a (voir figure). Les deux barres portent une densité de charge de surface constante, donnée par $\sigma_{el} > 0$. Entre les deux barres, un film de liquide est suspendu, d'épaisseur $2a$ et également avec une extension infinie le long de la dimension y. Le liquide est un isolant et sa susceptibilité électrique est négligeable.



(a) Déterminer le champ $\vec{E}$ généré par la barre 1 pour $r = \sqrt{x^2 + z^2} < a$ et $r = \sqrt{x^2 + z^2} > a$, en fonction des paramètres donnés.

(b) Déterminer maintenant la force par longueur de barre que la barre 2 ressent à cause du champ électrique généré par la barre 1. On peut supposer que $a \ll l$. Pourquoi cela simplifie le calcul ? Quelle est la direction de cette force ?

(c) Le système est en équilibre et on ne considère pas la force de gravité. En déduire la tension superficielle du liquide, γ_{lg}.

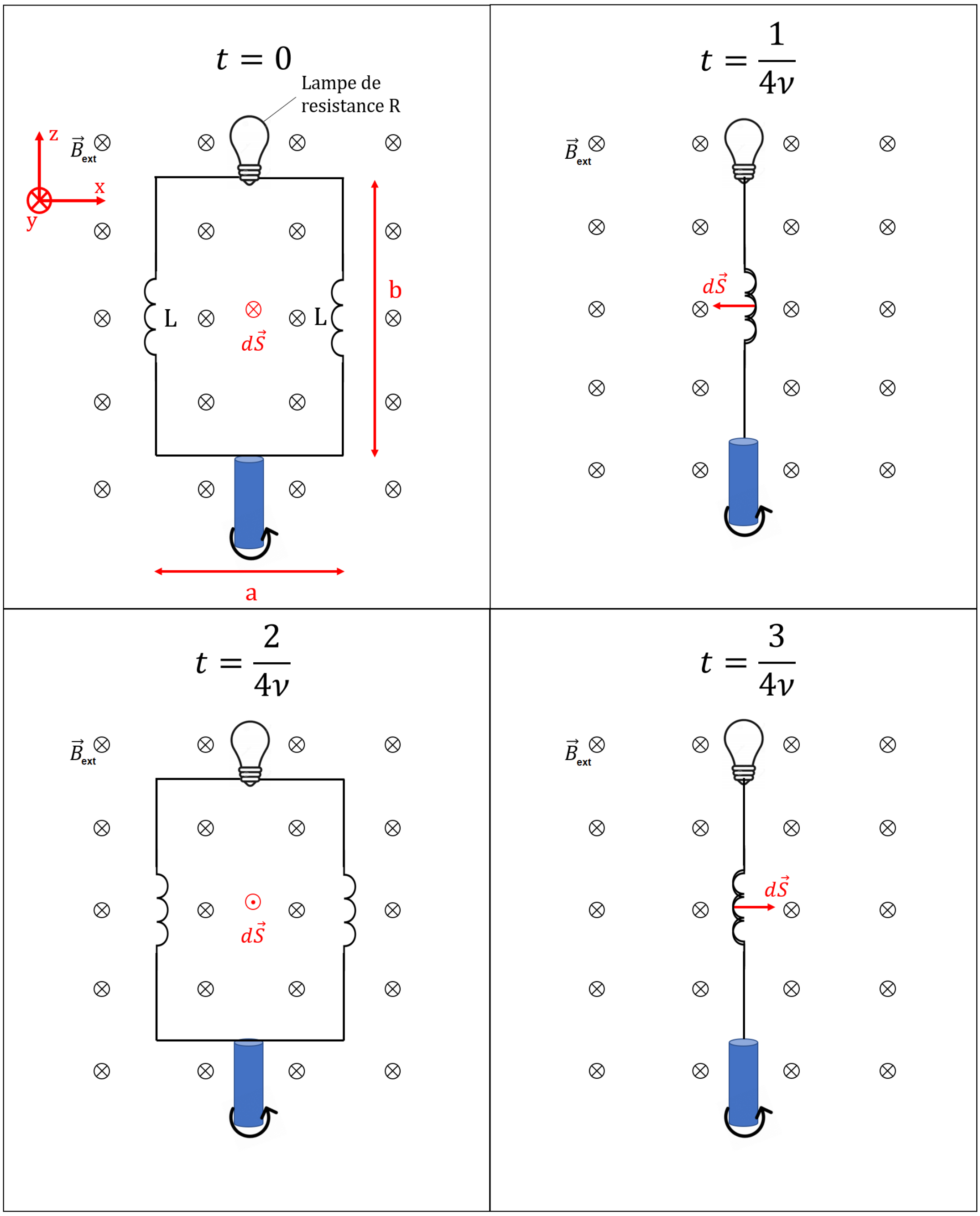
(d) Déterminer la différence de potentiel électrostatique entre les points A et B.

(e) Déterminer la différence de potentiel électrostatique entre les points C et D séparés par la distance d le long de l'axe x.

Exercice 4: Induction dans une boucle tournante (11 points)

Un fil conducteur forme une boucle fermée de largeur a et de longueur b, comme montré dans la figure. Cette boucle est fixée sur une poignée isolante et tourne autour de l'axe vertical à la fréquence $\nu = \omega/(2\pi)$, où ω est la pulsation. La lampe dans la partie supérieure de la boucle a une résistance R, beaucoup plus grande que la résistance du reste du fil. Les deux bobines ont chacune une inductance L, beaucoup plus grande que l'auto-inductance du reste du circuit. La boucle fermée est plongée dans un champ magnétique constant dans l'espace et le temps, donné par $\vec{B}_{ext} = B_{ext}\vec{e_y}$.

(a) Quel est le flux du champ magnétique externe $\vec{B}_{ext}$ à travers la boucle fermée pour les quatre instants $t = 0$, $1/(4\nu)$, $2/(4\nu)$ et $3/(4\nu)$ montrés dans la figure. Choisir l'orientation de l'élément vectoriel de surface $d\vec{S}$ comme indiqué dans la figure.



Cette exercice continue sur la prochaine page.

(b) Calculez la f.é.m $\epsilon_{ind}(t)$ induite dans le circuit par le champ magnétique externe $\vec{B}_{ext}$.

(c) Pendant que la boucle tourne, la lampe clignote. À quels moments montrés dans la figure la lampe est allumée, et à quels moments est-elle éteinte, dans le cas où $L = 0$? (on suppose que l'auto-inductance du circuit reste négligeable même si $L = 0$). Justifiez votre réponse.

(d) On reprend le cas général $L \neq 0$. Écrivez la loi des mailles pour la boucle fermée. Définissez la direction positive du courant en accord avec la définition de $d\vec{S}$ (donc dans le sens des aiguilles d'une montre dans la figure à $t = 0$). Si vous n'êtes pas sûr du signe avec laquelle $\epsilon_{ind}(t)$ apparaît dans la loi des mailles, faites un choix à ce moment.

(e) En notation complexe, on peut écrire la f.é.m induite comme

$$\tilde{\epsilon}_{ind}(t) = \tilde{\epsilon}_m \mathrm{e}^{i\omega t}$$

où $\tilde{\epsilon}_m \in \mathbb{C}$ est une constante et $\sim$ indique des grandeurs complexes. Déterminez $\tilde{\epsilon}_m$. Puis, injectez cette expression de $\tilde{\epsilon}_{ind}(t)$ dans l'equation trouvée dans la partie d) et cherchez une solution pour le courant dans le circuit de la forme $\tilde{I}(t) = \tilde{I}_0 \mathrm{e}^{i\omega t}$ et déterminez $\tilde{I}_0$.

(f) À partir du résultat de e), trouvez la forme réelle $I(t)$.

(g) Maintenant, si $L > 0$, qu'est-ce qui change concernant le clignotement de la lampe par rapport au résultat de la partie c) ?

(h) Discutez si la direction du courant trouvée, et donc le signe de la f.é.m. choisi dans la partie d), est correcte ou non. Justifiez votre réponse.