4 Avril 2025 *Richard Ducker*

Série 7

Exercice 1: Ondes transverses

Vous avez trois cordes, sur chacune d'entre elles se propage une onde transverse décrite par :
— corde 1 : $\xi_1(x,t) = 2\sin(2\pi(4x - 2t))$
— corde 2 : $\xi_2(x,t) = \sin(2\pi(2x - 4t))$
— corde 3 : $\xi_3(x,t) = 2\sin(2\pi(2x - 3t + \frac{1}{2}))$
où ξ est le déplacement transverse, x est la distance le long de cette corde exprimé en mètres et t le temps exprimé en secondes.

(a) Classez les ondes selon leur vitesse de propagation et selon leur longueur d'onde.
(b) Dessinez sur le même graphe ces trois ondes pour $t = 0s$ et $0m \leq x \leq 1m$.
(c) Le diametre et le materiau composant les trois cordes sont identiques. Quelle est la corde installée avec la tension la plus forte ?

Exercice 2: Principe de superposition linéaire et notation complexe

On considère l'équation d'onde en 1D :

$$\frac{\partial^2 y_0}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y_0}{\partial x^2}$$

(a) Supposez que $f(x,t)$ et $g(x,t)$ soient toutes deux solutions de l'équation d'onde. Démontrez que dans ce cas, $f(x,t) + g(x,t)$ est aussi une solution.
(b) Supposez que $\tilde{f}(x,t)$ est une fonction complexe ($\tilde{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$) qui satisfait l'équation d'onde. Démontrez que dans ce cas, $Re(\tilde{f}(x,t))$ est également une solution de l'équation d'onde.
(c) On considère maintenant l'équation d'onde en 3D :

$$\frac{\partial^2 y_0}{\partial t^2} = c^2 \Delta y_0$$

Démontrez que $\tilde{y_0}(\vec{r},t) = \tilde{A}e^{i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})}$ satisfait cette équation à condition qu'une certaine relation entre ω et $\vec{k}$ soit vérifié (cette relation est appelé relation de dispersion).

Exercice 3: Onde sonore stationnaire

Pour une onde sonore plane qui se propage le long de l'axe x, vers la droite ($\vec{k} = k\vec{e}_x$), <u>les fluctuations</u> de la pression (autour de la valeur d'équilibre p_{atm}) et de la vitesse prennent la forme suivante (expression complexe) :

$$p_{droite}(\vec{r},t) = \tilde{p_r}e^{i(\omega t - kx)}$$
$$\vec{u}_{droite}(\vec{r},t) = \tilde{u_r}e^{i(\omega t - kx)}\vec{e}_x$$

Avec $\tilde{p_r}$ et $\tilde{u_r} \in \mathbb{C}$ ainsi que ω et $k > 0$ satisfaisant $\omega/k = c$ (la vitesse du son). On suppose que $|\tilde{p_r}| \ll p_{atm}$, avec p_{atm} la pression atmosphérique et $|\tilde{u_r}| \ll c$.

(a) On donne l'équation d'Euler linéarisée et en absence de pesanteur :

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{u}_1}{\partial t} + \vec{\nabla} p_1 = 0,$$

Avec $\vec{u}_1$ et p_1 des petites perturbations. Exprimer $\tilde{u_r}$ en fonction de $\tilde{p_r}$, ρ_0, ω et k à l'aide de cette équation.

(b) On considère maintenant les fluctuations de la pression et de la vitesse d'une onde se propageant le long de l'axe x, mais cette fois-ci vers la gauche ($\vec{k} = -k\vec{e}_x$). Dans ce cas, on peut écrire :

$$p_{gauche}(\vec{r}, t) = \tilde{p}_l e^{i(\omega t + kx)}$$
$$\vec{u}_{gauche}(\vec{r}, t) = \tilde{u}_l e^{i(\omega t + kx)} \vec{e}_x$$

avec $\tilde{p}_l$ et $\tilde{u}_l \in \mathbb{C}$, tandis que k et ω sont les mêmes que dans la question (a).
Utilisez à nouveau l'expression d'Euler de la partie (a) pour exprimer $\tilde{u}_l$ en fonction de $\tilde{p}_l$, ρ_0, ω et k.

(c) On considère un tuyau d'orgue de longueur l avec les deux extrémités ouvertes. Trouvez les expressions des ondes stationnaires pour le champ de pression. Supposez que la pression aux deux extrémités est égale à la pression atmosphérique p_{atm} non-perturbée. Les fluctuations de la pression sont donc nulles à ces deux endroits.

(d) Trouvez maintenant l'expression des ondes stationnaires de la partie (c) pour le champ de vitesse. Utilisez les résultats de (a) et (b) pour exprimer $\tilde{u}_r$ et $\tilde{u}_l$ par $\tilde{p}_r$ et $\tilde{p}_l$. Est-ce que les nœuds et ventres de la pression et de la vitesse sont au même endroit ?

Exercice 4: Ondes dans un tuyau d'orgue

C'est l'hiver et il fait $-5°$C. Vous allez sur un marché à la recherche d'un tuyau d'orgue qui produit une note (c'est à dire fréquence de la fondamentale) de $\nu = 440$ Hz.

(a) Vous désirez un tuyau ouvert. Quelle doit être sa longueur ?
Indication : L'indice adiabatique γ de l'air est $7/5$, la masse moyenne des molécules dans l'air est $m = 29 \cdot 1.67 \cdot 10^{-27}$ kg est la constante de Boltzmann est $1.38 \cdot 10^{-23}$ J/K.

(b) Vous avez de la chance et vous trouvez trois exemplaires chez trois vendeurs différents. Mais vous hésitez, car vous allez utiliser ce tuyau à des températures de $25°$C. Vendeur 1 vous dit qu'il n'y a pas de problèmes puisque ses instruments sont fait d'un matériau qui a un coefficient de dilatation thermique linéaire α négatif. Le vendeur 2 dit qu'il faut acheter chez lui, car les siennes ont $\alpha = 0$. Finalement, le vendeur 3 dit que les siennes sont ce qu'il vous faut, car ils ont $\alpha > 0$. À qui faites-vous confiance ?
Rappel : le coefficient de dilatation linéaire est défini par $\Delta l = \alpha \cdot l \cdot \Delta T$, ou l est la longueur initiale d'un matériel et Δl est le changement de cette longueur dû à un changement ΔT de température.

(c) Quelle est la valeur de α nécessaire pour garantir la même fréquence à $25°$C ?

Exercice 5: Linéarisation de l'équation d'état

On suppose de petites perturbations telles que la densité, la pression, et le champ de vitesse peuvent être écrits comme :

$$\begin{aligned}\rho(\vec{r},t) &= \rho_0 + \rho_1(\vec{r},t)\\ p(\vec{r},t) &= p_0 + p_1(\vec{r},t)\\ \vec{u}(\vec{r},t) &= \vec{u}_1(\vec{r},t)\end{aligned}$$

Avec ρ_0 et p_0 des constantes et les autres grandeurs respectant l'hypothèse des petites perturbations (i.e. $\rho_1 \ll \rho_0$, $p_1 \ll p_0$ et $|\vec{u}_1| \ll c$).

Montrez que dans ce cas, l'équation d'état linéarisée d'un gaz parfait en absence d'échange de chaleur devient :

$$\frac{\partial p_1}{\partial t} - \gamma \frac{p_0}{\rho_0}\frac{\partial \rho_1}{\partial t} = 0$$

où γ est l'indice d'adiabaticité.

Indication : effectuez un développement de Taylor et négligez les termes quadratiques ou d'ordre supérieur comme ρ_1^2, p_1^2, $|\vec{u}_1|^2$, $\rho_1 p_1$, $\rho_1|\vec{u}_1|$, $p_1|\vec{u}_1|$, ρ_1^3, *...*

Exercice 6: Force électrostatique et gravitationnelle, Ordre de grandeur

(a) Soit un électron et un proton séparé par $L = 10^{-10}$ m. Calculez la force électrostatique ainsi que la force de gravitation qui s'exerce entre eux.
Données :
— $m_e = 9 \cdot 10^{-31}$ *kg*
— $m_p = 1.6 \cdot 10^{-27}$ *kg*
— $e = 1.6 \cdot 10^{-19}$ *C*
— $\epsilon_0 = 8.8 \cdot 10^{-12}$ *en unité SI*
— $G = 6.67 \cdot 10^{-11}$ *en unité SI*
Qu'en déduisez-vous pour les problèmes d'électrostatique ?

(b) Soit une charge $q > 0$. Dessinez les lignes de champ électrique crées par q. Comment sont les lignes de champ lorsque $q < 0$?
Soient deux charges $+q$ et $-q$ séparée par une distance d. Esquissez les lignes de champ électrique.

Exercice 7: Propagation d'une onde transversale

(Exercice facultatif) Démontrer que la propagation d'une onde transversale le long de l'axe x dans une corde souple soumise à une tension T et possédant une masse par unité de longueur μ est décrite par l'équation d'onde :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{T}{\mu}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

On considère de petites perturbations transverses $y(x,t)$ induites par l'onde et on fera l'approximation que la force gravitationnelle est négligeable par rapport à la tension.

Indication : appliquez la seconde loi de Newton à un petit élément de corde compris en x_1 *et* $x_1 + \Delta x$ *pour une petite perturbation arbitraire de la corde.*