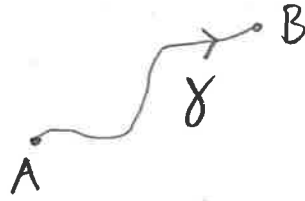


(a) Intégrale curviligne d'un champ scalaire $f(\vec{r}, t)$ le long d'un chemin γ :

$$\Omega(t) = \int_{\gamma} f \, d\ell$$



(b) Intégrale curviligne d'un champ vectoriel $\vec{A}(\vec{r}, t)$ le long d'un chemin γ (= Circulation de $\vec{A}(\vec{r}, t)$ le long de γ):

$$\Sigma(t) = \int_{\gamma} \vec{A} \cdot d\vec{\ell}$$

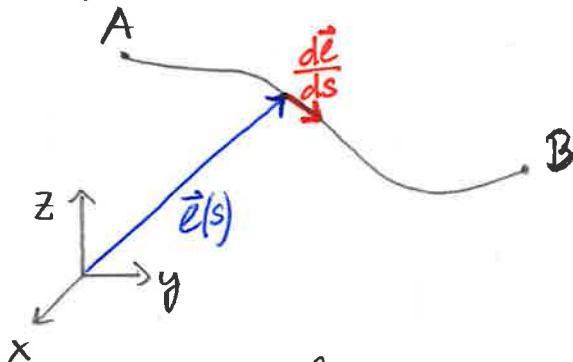
Exemple pour (a): $f(\vec{r}, t) = 1 \Rightarrow \Omega = \int_{\gamma} d\ell =$ la longueur du chemin γ

Exemple pour (b): Calcul du potentiel électrostatique à partir du champ $\vec{E}$

$$\phi(B) - \phi(A) = - \int_{\gamma} \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$$

* Evaluation des intégrales curvilignes

Chemin γ paramétré par $\vec{r}(s): [s_1, s_2] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, s \mapsto \vec{r}(s)$

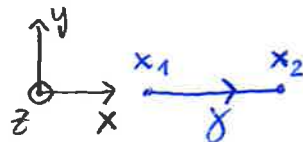


$$d\vec{\ell} = \frac{d\vec{r}}{ds} ds \Rightarrow \int_{\gamma} \vec{A} \cdot d\vec{\ell} = \int_{s_1}^{s_2} \vec{A}(\vec{r}(s), t) \cdot \frac{d\vec{r}}{ds} ds$$

$$d\ell = |d\vec{\ell}| = \left| \frac{d\vec{r}}{ds} \right| ds \Rightarrow \int_{\gamma} f \, d\ell = \int_{s_1}^{s_2} f(\vec{r}(s), t) \left| \frac{d\vec{r}}{ds} \right| ds$$

* Quelques exemples

Exemple 1 γ le long de l'axe x de x_1 à x_2



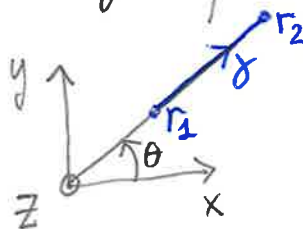
Paramétrisation de γ : $\vec{e}(x) = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $x \in [x_1, x_2]$ (notez: nous avons appelé notre paramètre x au lieu de s ici)

$$\Rightarrow d\vec{e} = \frac{d\vec{e}}{dx} dx = \frac{d}{dx} \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} dx = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} dx = \vec{e}_x dx$$

$$\Rightarrow \int_{\gamma} \vec{A} \cdot d\vec{e} = \int_{x_1}^{x_2} \vec{A} \cdot \vec{e}_x dx = \int_{x_1}^{x_2} A_x dx, \text{ où } A_x \text{ est la composante de } \vec{A} \text{ selon } \vec{e}_x$$

Exemple 2 γ le long du rayon r (en coordonnées cylindriques ou sphériques)

Paramétrisation de γ : $\vec{e}(r) = r \vec{e}_r$, $r \in [r_1, r_2]$
(nous appelons ici notre paramètre r au lieu de s)



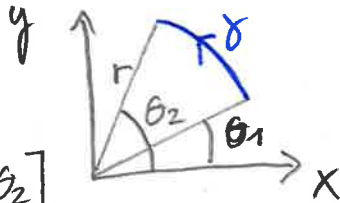
$$\Rightarrow d\vec{e} = \frac{d\vec{e}}{dr} dr = \frac{d}{dr} (r \vec{e}_r) dr = \vec{e}_r dr$$

$$\Rightarrow \int_{\gamma} \vec{A} \cdot d\vec{e} = \int_{r_1}^{r_2} \vec{A} \cdot \vec{e}_r dr = \int_{r_1}^{r_2} A_r dr, \text{ où } A_r \text{ est la composante de } \vec{A} \text{ selon } \vec{e}_r$$

Exemple 3 γ le long d'une partie d'un cercle

Paramétrisation

de γ : $\vec{e}(\theta) = \begin{pmatrix} r \cos(\theta) \\ r \sin(\theta) \\ 0 \end{pmatrix}$, $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$



$$\Rightarrow d\vec{e} = \frac{d\vec{e}}{d\theta} d\theta = \frac{d}{d\theta} \begin{pmatrix} r \cos(\theta) \\ r \sin(\theta) \\ 0 \end{pmatrix} d\theta = \begin{pmatrix} -r \sin(\theta) \\ r \cos(\theta) \\ 0 \end{pmatrix} d\theta = \underbrace{\begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{e}_\theta} r d\theta$$

$$\Rightarrow d\vec{e} = \vec{e}_\theta r d\theta$$

$$\Rightarrow \int_{\gamma} \vec{A} \cdot d\vec{e} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \vec{A} \cdot \vec{e}_\theta r d\theta = \int_{\theta_1}^{\theta_2} A_\theta r d\theta, \text{ où } A_\theta \text{ est la composante de } \vec{A} \text{ selon } \vec{e}_\theta$$

Cet exemple nous permet de calculer la circonférence d'un cercle :

Pour $[\theta_1, \theta_2] = [0, 2\pi]$, γ est le cercle entier. Avec $de = |d\vec{z}| = |\vec{e}_\theta r d\theta| = r d\theta$, on trouve :

Circonférence d'un cercle de rayon r = longueur de γ

$$= \int_{\gamma} de = \int_0^{2\pi} r d\theta = r \int_0^{2\pi} d\theta = \underline{\underline{2\pi r}}$$