

Intégrales de surface - Propriétés et exemples

PGII-SMA

Prof. C. Theiler

Soit $\vec{A}(\vec{r}, t)$ un champ vectoriel, $f(\vec{r}, t)$ un champ scalaire et S une surface (qui peut être fermée ou pas).

Dans le cours, nous avons vu trois types d'intégrales de surface:

(a) $\iint_S f dS$; $dS = |d\vec{S}|$ l'élément non-vectoriel de surface

(b) $\iint_S \vec{A} dS$

(c) $\iint_S \vec{A} \cdot d\vec{S}$ = "Le flux de $\vec{A}$ à travers S "
 $d\vec{S}$: l'élément vectoriel de surface

Exemples pour (a)

i) Potentiel électrostatique généré par une densité de charge de surface σ_{el} :

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_S \frac{\sigma_{el}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dS' + \text{const.}$$

ii) $\iint_S dS$, qui est égale à l'aire de la surface S

Exemple pour (b)

i) Champ $\vec{E}$ généré par une densité de charge de surface σ_{el} :

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_S \frac{\sigma(\vec{r}') \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dS'$$

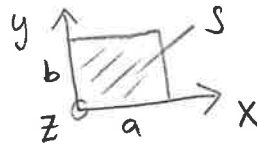
Exemples pour (c)

i) Le flux du champ $\vec{E}$ à travers la surface S
 $= \iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$

ii) La masse d'un fluide avec densité ρ et vitesse $\vec{u}$ qui traverse la surface S par seconde $= \iint_S \rho \vec{u} \cdot d\vec{S}$

Les cas à connaître par coeur

1) $S =$ rectangle de côtés a et b

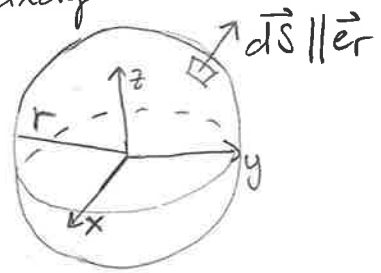


$$\Rightarrow \underline{d\vec{S}} = \vec{e}_z dx dy$$

$$\underline{dS} = |d\vec{S}| = dx dy$$

$$\text{Donc : } \iint_S \vec{A} \cdot d\vec{S} = \int_0^b \int_0^a \vec{A} \cdot \vec{e}_z dx dy = \int_0^b \int_0^a A_z dx dy$$

2) $S =$ sphère centrée à O et $\vec{A}(\vec{r}) = A(r) \vec{e}_r$

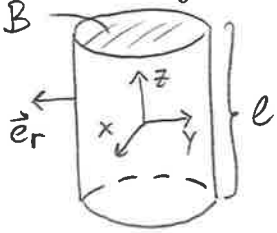


$$\Rightarrow \underline{d\vec{S}} = \vec{e}_r dS$$

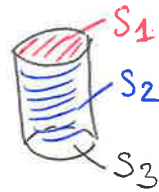
$$\text{Donc : } \iint_S \vec{A} \cdot d\vec{S} = \iint_S A(r) \underbrace{\vec{e}_r \cdot \vec{e}_r}_{=1} dS = \iint_S A(r) dS = A(r) \iint_S dS = 4\pi r^2 A(r)$$

($r =$ rayon de la sphère)

3) $S =$ cylindre de section B et de longueur l et $\vec{A} = A(z) \vec{e}_z$



Ecrivons $S = S_1 + S_2 + S_3$ avec



sur S_1 : $\underline{d\vec{S}} = \vec{e}_z dS$

sur S_2 : $\underline{d\vec{S}} = \vec{e}_r dS$

sur S_3 : $\underline{d\vec{S}} = -\vec{e}_z dS$

$$\Rightarrow \iint_S \vec{A} \cdot d\vec{S} = \iint_{S_1} \vec{A} \cdot d\vec{S} + \iint_{S_2} \vec{A} \cdot d\vec{S} + \iint_{S_3} \vec{A} \cdot d\vec{S}$$

$$= \iint_{S_1} A\left(\frac{l}{2}\right) \underbrace{\vec{e}_z \cdot \vec{e}_z}_{=1} dS + \iint_{S_2} A(z) \underbrace{\vec{e}_z \cdot \vec{e}_r}_{=0} dS + \iint_{S_3} A\left(-\frac{l}{2}\right) \underbrace{\vec{e}_z \cdot (-\vec{e}_z)}_{=-1} dS$$

$$= A\left(\frac{l}{2}\right) \iint_{S_1} dS + 0 + A\left(-\frac{l}{2}\right) \iint_{S_3} (-1) dS = B \left(A\left(\frac{l}{2}\right) - A\left(-\frac{l}{2}\right) \right)$$

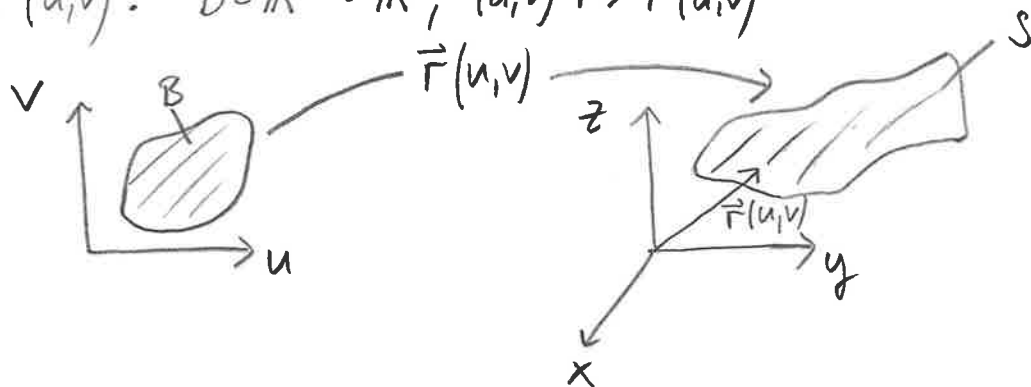
3)' même surface S que dans 3) mais avec $\vec{A} = A(r) \vec{e}_r$

$$\Rightarrow \iint_S \vec{A} \cdot d\vec{S} = \iint_{S_1} A(r) \underbrace{\vec{e}_r \cdot \vec{e}_z}_{=0} dS + \iint_{S_2} A(r) \underbrace{\vec{e}_r \cdot \vec{e}_r}_{=1} dS + \iint_{S_3} A(r) \underbrace{\vec{e}_r \cdot (-\vec{e}_z)}_{=0} dS$$

$$= 0 + A(r) \iint_{S_2} dS + 0 = A(r) \iint_{S_2} dS$$

Manière générale pour évaluer les intégrales de surface (ne pas demandé dans ce cours)

On suppose que la surface S est paramétrisée par
 $\vec{r}(u,v): B \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, (u,v) \mapsto \vec{r}(u,v)$



Dans ce cas: $ds = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right| du dv$

$$\underline{d\vec{S}} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} du dv$$

$$\Rightarrow \iint_S f dS = \iint_B f(\vec{r}(u,v)) \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right| du dv$$

$$\iint_S \vec{A} \cdot d\vec{S} = \iint_B \vec{A}(\vec{r}(u,v)) \cdot \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right) du dv$$

Exemple 1



Paramétrisation: $\vec{r}(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}; x \in [0, a], y \in [0, b]$ (ici, u, v sont appelés x, y)

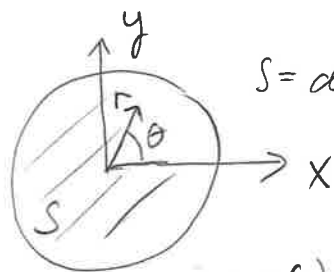
$$\Rightarrow \underline{d\vec{S}} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} dx dy = \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \times \frac{\partial}{\partial y} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} dx dy$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} dx dy = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} dx dy = \underline{\vec{e}_z dx dy}$$

$$\Rightarrow dS = |d\vec{S}| = dx dy$$

$$\text{Air de la surface } S = \iint dS = \int_0^a \int_0^b dx dy = \underline{a \cdot b}$$

Exemple 2



$S = \text{disque de rayon } R$

Paramétrisation: $\vec{r}(r, \theta) = \begin{pmatrix} r \cos \theta \\ r \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix}$ (ici, u, v sont appelées r, θ)

$$r \in [0, R], \theta \in [0, 2\pi]$$

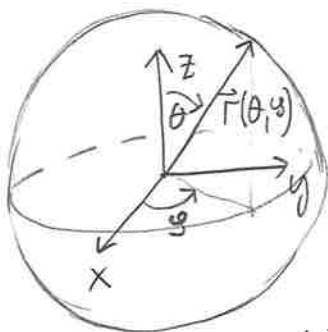
$$\Rightarrow \underline{d\vec{S}} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} dr d\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -r \sin \theta \\ r \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix} dr d\theta$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r \cos^2 \theta + r \sin^2 \theta \end{pmatrix} dr d\theta = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{pmatrix} dr d\theta = \underline{\underline{\vec{e}_z r dr d\theta}}$$

$$\Rightarrow dS = r dr d\theta$$

$$\text{Air de la surface } S = \iint dS = \int_0^R \int_0^{2\pi} r d\theta dr = 2\pi \int_0^R r dr = \underline{\underline{\pi R^2}}$$

Exemple 3



$S = \text{Surface de la sphère de rayon } R$

Paramétrisation $\vec{r}(\theta, \varphi) = \begin{pmatrix} R \sin \theta \cos \varphi \\ R \sin \theta \sin \varphi \\ R \cos \theta \end{pmatrix}$; $\theta \in [0, \pi], \varphi \in [0, 2\pi]$

$$\underline{d\vec{S}} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} d\theta d\varphi = \begin{pmatrix} R \cos \theta \cos \varphi \\ R \cos \theta \sin \varphi \\ -R \sin \theta \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -R \sin \theta \sin \varphi \\ R \sin \theta \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} d\theta d\varphi$$

$$= \begin{pmatrix} R^2 \sin^2 \theta \cos \varphi \\ R^2 \sin^2 \theta \sin \varphi \\ R^2 \sin \theta \cos \theta \cos^2 \varphi + R^2 \sin \theta \cos \theta \sin^2 \varphi \end{pmatrix} d\theta d\varphi = R^2 \sin \theta \underbrace{\begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi \\ \cos \theta \end{pmatrix}}_{=\vec{e}_r} d\theta d\varphi$$

$$= \underline{\underline{R^2 \sin \theta \vec{e}_r d\theta d\varphi}} ; \Rightarrow dS = R^2 \sin \theta d\theta d\varphi$$

$$\text{Air de la surface } S = \iint_S dS = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} R^2 \sin \theta d\varphi d\theta = 2\pi R^2 \int_0^\pi \sin \theta d\theta = \underline{\underline{4\pi R^2}}$$