

Physique II – Thermodynamique

Solutions 3

11 mars 2025

PROBLÈME I – POUSSÉE D'ARCHIMÈDE II

Pour savoir jusqu'où le ballon peut monter, on cherche la hauteur où le poids du ballon P_{ballon} est égal à la poussée d'Archimède F_A (en valeurs absolues).

Le poids du ballon est la force gravitationnelle exercée sur le ballon :

$$P_{\text{ballon}} = m_{\text{ballon}}g = \rho_{\text{He}}V_{\text{ballon}}g = \frac{4}{3}\pi r^3\rho_{\text{He}}g.$$

La poussée d'Archimède est le poids du volume d'air déplacé :

$$F_A = \rho_{\text{air}}V_{\text{ballon}}g = \frac{4}{3}\pi r^3\rho_{\text{air}}g.$$

La formule barométrique à température constante donne la pression de l'air atmosphérique p_{air} en fonction de la hauteur :

$$p_{\text{air}} = p_0 e^{-\frac{gMh}{RT}}.$$

D'où, en utilisant la relation entre pression et densité fourni par l'équation des gaz parfaits,

$$p = \frac{\rho RT}{M}.$$

On multiplie les deux cotés de l'équation barométrique par $\frac{M}{RT}$ pour obtenir

$$\rho_{\text{air}} = \rho_0 e^{-\frac{gMh}{RT}},$$

où

$$\rho_0 = \frac{p_0 M}{RT} = 1.16 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}.$$

D'où, en posant que

$$\sum \mathbf{F} = \mathbf{P}_{\text{ballon}} + \mathbf{F}_A = 0,$$

on déduit que cette condition est satisfaite quand

$$\rho_{\text{He}} = \rho_{\text{air}}$$

et donc

$$h = -\frac{RT}{gM} \ln\left(\frac{\rho_{\text{He}}}{\rho_0}\right)$$

$$\boxed{h = 5316 \text{ m}}$$

PROBLÈME II MONTGOLFIÈRE MINIATURE

1. Par la loi des gaz parfaits, le nombre de mols est donné comme :

$$n = \frac{pV}{RT}$$

Pour 1 ℓ d'un gaz parfait quelconque sous les conditions de la salle, le nombre de mols associé est :

$$n = \frac{1 \text{ bar} \cdot 1 \ell}{R \cdot 293 \text{ K}} = 0.041 \text{ mol.}$$

Donc :

$$m_{\text{He}} = nM_{\text{He}} = 0.041 \text{ mol} \cdot 4 \text{ g/mol} = \boxed{0.164 \text{ g}}$$

et

$$m_{\text{air}} = 0.8nM_{\text{N}_2} + 0.2nM_{\text{O}_2} = 0.8 \cdot 0.041 \text{ mol} \cdot 28 \text{ g/mol} + 0.2 \cdot 0.041 \text{ mol} \cdot 32 \text{ g/mol} = \boxed{1.183 \text{ g}}$$

2. Deux forces s'appliquent sur la montgolfière : son poids qui comprend la masse d'hélium dans le ballon et la masse de la montgolfière vide, et la poussée d'Archimède. Alors (projection de la loi fondamentale de la mécanique à l'axe vertical) :

$$\sum F = \rho_{\text{air}} V_{\text{ballon}} g - (m_{\text{m}} + m_{\text{He}}) g$$

où m_{m} est la masse de la montgolfière vide et le référentiel choisi montre vers le haut. Afin que la montgolfière décolle la somme des forces doit être positive. D'où :

$$\rho_{\text{air}} V_{\text{ballon}} g - (m_{\text{m}} + m_{\text{He}}) g > 0$$

Le volume du ballon est égal au volume d'hélium, et donc le volume minimal admis :

$$\rho_{\text{air}} V_{\text{min He}} - (m_{\text{m}} + \rho_{\text{He}} V_{\text{min He}}) = 0$$

$$V_{\text{min He}} = \frac{m_{\text{m}}}{\rho_{\text{air}} - \rho_{\text{He}}}$$

Afin que la montgolfière puisse décoller, son volume doit être supérieur à V_{min} .

Dans la question 1 on a calculé les masses d'un litre d'air et d'un litre d'hélium dans les conditions de la salle. Puisque dans le ballon gonflé règnent les mêmes conditions que celles de la salle, on peut utiliser ces masses pour définir les masses volumiques de la formule précédente.

$$\rho_{\text{air}} = 1.183 \text{ g}/\ell, \quad \rho_{\text{He}} = 0.164 \text{ g}/\ell$$

Donc :

$$V_{\text{min}} = \frac{10 \text{ g}}{1.183 \text{ g}/\ell - 0.164 \text{ g}/\ell}$$

$$\boxed{V_{\text{min}} = 9.81 \ell}$$

3. On peut trouver la masse d'air qui correspond à 1 ℓ pour 1 bar et 373 K en répétant les étapes de la question 1. La masse volumique dans ces conditions est alors :

$$\rho_{\text{air}}(373 \text{ K}) = 0.929 \text{ g}/\ell$$

et

$$V_{\text{min air}}(373 \text{ K}) = \frac{m_{\text{m}}}{\rho_{\text{air}} - \rho_{\text{air}}(373 \text{ K})}$$

$$\boxed{V_{\text{min air}}(373 \text{ K}) = 39.37 \ell}$$

PROBLÈME III CYCLE THERMODYNAMIQUE

Pour simplifier les calculs, il suffit de remarquer que $p_B = 0.5p_A$ et que $T_A = \frac{2}{3}T_C$.

	p[bar]	T[K]	V[L]
A	$p_A = 1$	$T_A = 300$	$V_A = \frac{nRT_A}{P_A} = 1$
B	$p_B = 0.5$	$T_B = T_A = 300$	$V_B = \frac{nRT_A}{p_B} = \frac{nRT_A}{0.5p_A} = 2V_A = 2$
C	$p_C = p_B = 0.5$	$T_C = 200$	$V_C = \frac{nRT_B}{p_B} = \frac{2}{3}V_B = \frac{4}{3}$
D	$p_D = p_A = 1$	$T_D = T_C = 200$	$V_D = \frac{nRT_C}{p_A} = \frac{2}{3}V_A = \frac{2}{3}$

Les diagrammes p - V , p - T et T - V sont explicités ci-dessous en partant de l'équation des gaz parfaits :

$$p = \frac{nRT}{V}$$

Pour un diagramme p - V , les isothermes (T constante) sont de la forme

$$p = \frac{\text{const}}{V},$$

ce qui correspond à des hyperboles.

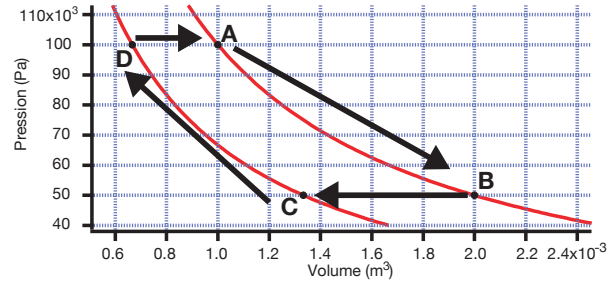


FIG. 1. Diagramme montrant la pression en fonction du volume pour ce cycle. Les lignes rouges sont des isothermes à 200 K et à 300 K.

Pour un diagramme p - T , les isochores (V constante) sont de la forme

$$p = \text{const} \cdot T,$$

ce qui donne des droites.

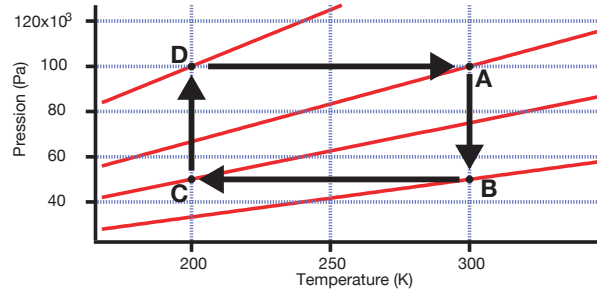


FIG. 2. Diagramme montrant la pression en fonction de la température pour le cycle étudié ici. Les lignes rouges sont des isochores.

Pour un diagramme T - V , les isobares (p constante) sont données par

$$T = \frac{p}{nR}V = \text{const} \cdot V$$

et prennent aussi la forme des droites.

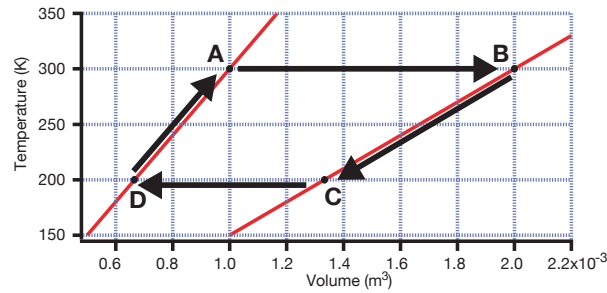


FIG. 3. Diagramme montrant la température en fonction du volume pour le cycle étudié ici. Les lignes rouges sont des isobares à 1 bar et à 0.5 bar.

PROBLÈME IV FONCTIONS D'ÉTAT ?

Le travail effectué par ou sur un gaz parfait peut s'exprimer comme : $W = -p\Delta V \Rightarrow$ transformation isobare , $W = nRT \ln \frac{V_f}{V_i} \Rightarrow$ transformation isotherme et $W = 0 \Rightarrow$ pour une transformation isochore. L'échange de chaleur et la variation de l'énergie interne sont donnés par $\Delta U = \frac{3}{2}nR(T_f - T_i)$ (pour un gaz parfait monoatomique, donc $\Delta U = 0 \Rightarrow$ transformation isotherme) et $\Delta U = W + Q$.

On a donc :

- A \longrightarrow B:

$$W_{AB} = 0 \quad (\text{transformation isochore})$$

Afin de calculer la variation de l'énergie interne, on doit d'abord connaître quelle est la variation de température. Puisque $pV = nRT$ est linéaire, augmenter p d'un facteur 10 nous donne une variation de T de $T_A = 373$ K à $T_B = 3730$ K. Alors $T_B - T_A = 3357$ K. Alors,

$$\Delta U_{AB} = \frac{3}{2}nR \cdot 3357 \text{ K}$$

De nouveau, utiliser $pV = nRT$ pour les points A ou B nous donne $nR = 2.68 \times 10^{-6} \text{ J K}^{-1}$

$$\Delta U_{AB} = \frac{3}{2} \cdot 2.68 \times 10^{-6} \text{ J K}^{-1} \cdot 3357 \text{ K} = 1.35 \times 10^{-2} \text{ J}$$

Maintenant, il est possible d'évaluer l'échange de chaleur. Puisque $W = 0$,

$$Q_{AB} = \Delta U_{AB} = 1.35 \times 10^{-2} \text{ J}$$

$Q > 0$ signifie que le système (gaz parfait) a assimilé de la chaleur pendant la transformation.

- B \longrightarrow C:

$$\Delta U_{BC} = 0 \quad (\text{transformation isotherme})$$

$$W_{BC} = nRT_B \ln \frac{V_B}{V_C} = -9.16 \times 10^{-3} \text{ J}$$

$$Q_{BC} = -W_{BC} = 9.16 \times 10^{-3} \text{ J}$$

Puisque $Q > 0$ et $W < 0$, on voit que le système a absorbé de la chaleur et a fourni du travail dans cette transformation.

- C \longrightarrow D: C'est une transformation isobare, donc $p_C = p_D$. En utilisant $pV = nRT$ au point C, on trouve $p_C = 4.00 \times 10^3 \text{ Pa} = p_D$.

$$W_{CD} = -p_C \Delta V_{CD} = -4.00 \times 10^3 \text{ Pa} \cdot (-1.5 \times 10^{-6} \text{ m}^3) = 6.00 \times 10^{-3} \text{ J}$$

$$T_D = \frac{p_D V_D}{nR} = \frac{4.00 \times 10^3 \text{ Pa} \cdot 1 \times 10^{-6} \text{ m}^3}{2.68 \times 10^{-6} \text{ JK}^{-1}} = 1492.5 \text{ K}$$

$$\Delta U_{CD} = \frac{3}{2} nR(T_D - T_C) = \frac{3}{2} 2.68 \times 10^{-6} \text{ JK}^{-1} \cdot (1492.5 \text{ K} - 3730 \text{ K}) = -9.00 \times 10^{-3} \text{ J}$$

$$Q_{CD} = \Delta U_{CD} - W_{CD} = -9.00 \times 10^{-3} \text{ J} - 6.000 \times 10^{-3} \text{ J} = -15.00 \times 10^{-3} \text{ J}$$

Si quelqu'un veut fermer le cycle thermodynamique, il doit considérer une transformation isochore de D à A (élément supplémentaire et pas mentionné aux questions).

- D \rightarrow A

$$W_{DA} = 0 \quad (\text{transformation isochore})$$

$$\Delta U_{DA} = \frac{3}{2} nR(T_A - T_D) = \frac{3}{2} 2.68 \times 10^{-6} \text{ JK}^{-1} \cdot (373 \text{ K} - 1492.5 \text{ K}) = -4.50 \times 10^{-3} \text{ J}$$

$$Q_{DA} = \Delta U_{DA} - W_{DA} = -4.50 \times 10^{-3} \text{ J}$$

En résumant les résultats dans un tableau :

	A \rightarrow B	B \rightarrow C	C \rightarrow D	D \rightarrow A
ΔU	13.50 mJ	0	-9.00 mJ	-4.50 mJ
W	0	-9.16 mJ	6.00 mJ	0
Q	13.50 mJ	9.16 mJ	-15.00 mJ	-4.50 mJ

$$\Delta U_{\text{total}} = 0$$

$$W_{\text{total}} = -3.16 \text{ mJ}$$

$$Q_{\text{total}} = 3.16 \text{ mJ}$$

$$W_{\text{total}} + Q_{\text{total}} = -3.16 \text{ mJ} + 3.16 \text{ mJ} = 0 = \Delta U_{\text{total}}$$

Les points de départ et d'arrivée sont les mêmes dans un cycle. L'énergie interne ne dépend pas de chemin (définition d'une équation d'état), sa variation est donc nulle pour chaque cycle. Pour un gaz parfait les températures initiale et finale sont également identiques. De plus, pour chaque cycle, le gaz parfait absorbe 3.16 mJ sous forme de chaleur et le transforme en travail.

En ajoutant le point C', on a :

	$B \rightarrow C'$	$C' \rightarrow C$
ΔU	22.5 mJ	-22.5 mJ
W	-15 mJ	0
Q	37.5 mJ	-22.5 mJ

La variation de l'énergie interne de B à C sera nulle indépendamment du chemin parcouru car ces points appartiennent à la même courbe isotherme. Cependant, si l'on compare le travail effectué de B à C en passant par C' avec celui effectué en passant par l'isotherme (calcul précédent), on remarque une différence de -5.84 mJ . La chaleur échangée montre une différence de 5.84 mJ , comme on peut le prédire. Nous avons les mêmes points de départ et d'arrivée qu'avant mais avec un chemin différent, le travail et la chaleur se comportent différemment. Avec cela, nous pouvons donc conclure que Q et W **ne** sont **pas** des fonctions d'état.

PROBLÈME V TRANSFORMATION D'UN GAZ PARFAIT

On suppose que les transformations sont quasi-statiques, c'est-à-dire qu'on les effectue suffisamment lentement pour que la pression à l'intérieur du piston s'égalise avec la pression externe à chaque instant. Pour calculer le travail reçu par le piston le long des trois chemins proposés, il suffit d'intégrer l'expression $\delta W = -pdV$ dans le diagramme (p,V) en suivant les chemins.

- A \longrightarrow B :

$$W_{AB} = nRT_A \ln \frac{V_A}{V_B}$$

En utilisant le fait que $\frac{V_A}{V_B} = \frac{p_B}{p_A}$ (puisque $pV = \text{cste}$), on obtient:

$$W_{AB} = nRT_A \ln \frac{p_B}{p_A} = 4014.3 \text{ J}$$

- A \longrightarrow D \longrightarrow B : La compression ADB se compose de la transformation isochore AD dont le travail est nul (puisque $V = \text{cste}$), suivie de la compression isobare DB. On obtient donc:

$$W_{ADB} = W_{DB} = -p_B(V_B - V_A)$$

En utilisant les faits que $T_A = T_B$ et $V_A = nRT_A/p_A$, on trouve:

$$W_{ADB} = -nRT_A \left(1 - \frac{p_B}{p_A} \right) = 9976.8 \text{ J}$$

- A \longrightarrow C \longrightarrow B : La compression ACB est la succession d'une transformation isobare (AC) et d'une transformation isochore (CB). Ainsi :

$$W_{ACB} = W_{AC} = -p_A(V_B - V_A) = -nRT_A \left(\frac{p_A}{p_B} - 1 \right) = 1995.4 \text{ J}$$

On constate que le travail reçu par le système est différent le long des trois chemins. Le travail n'est donc pas une fonction d'état.

PROBLÈME VI VARIATION DE L'ÉNERGIE INTERNE APRÈS MÉLANGE DE DEUX GAZ PARFAITS

1. L'énergie interne de l'ensemble ne varie pas car le reservoir est rigide ($W = 0$) et la transformation est adiabatique ($Q = 0$).
2. Sachant que l'énergie interne du système ne varie pas, ses valeurs avant et après la mise en communication des deux compartiments doivent être identiques:

$$n_1 c_v T_i + n_2 c_v T_i = (n_1 + n_2) c_v T_f,$$

où T_i dénote la température de chaque gaz initialement et T_f la température de l'ensemble finalement. On en déduit $T_f = T_i$: la température des gaz ne varie pas.

3. À l'état final, la loi des gaz parfaits donne :

$$p_f = \frac{n_t R T_f}{V_f}$$

où $n_t = n_1 + n_2$, $T_f = T_i$ et $V_f = 2V$. Donc, en se référant à l'état initial :

$$p_f = \frac{\frac{n_1 R T_i}{V} + \frac{n_2 R T_i}{V}}{2} = \frac{p_1 + p_2}{2}$$

$p_f = 1.5 \text{ bar}$