Physique II – Thermodynamique

Solutions 6

Problème I Pompe à chaleur

Solution alternative 1:

On sait que les machines de Carnot et les pompes à chaleurs idéales ont les rendements suivants, en considérant W>0, le travail échangé entre les deux systèmes:

$$\eta_{\text{Carnot}} = \frac{W}{Q_1^+} = \frac{T_1^+ - T^-}{T_1^+} \Leftrightarrow W = \underbrace{Q_1^+}_{>0} \left(\frac{T_1^+ - T^-}{T_1^+} \right) = |Q_1^+| \left(\frac{T_1^+ - T^-}{T_1^+} \right)$$

$$\eta_{\text{Pompe à chaleur}} = \frac{-Q_2^+}{W} = \frac{T_2^+}{T_2^+ - T^-} \Leftrightarrow W = -\underbrace{Q_2^+}_{<0} \left(\frac{T_2^+ - T^-}{T_2^+} \right) = |Q_2^+| \left(\frac{T_2^+ - T^-}{T_2^+} \right)$$

Nous pouvons donc réécrire W = W comme:

$$|Q_1^+| \left(\frac{T_1^+ - T^-}{T_1^+} \right) = |Q_2^+| \left(\frac{T_2^+ - T^-}{T_2^+} \right) \Leftrightarrow \frac{|Q_2^+|}{|Q_1^+|} = \frac{\left(1 - \frac{T^-}{T_1^+}\right)}{\left(1 - \frac{T^-}{T_2^+}\right)} > 1$$

Supérieure à 1 car on sait que $T_1^+ > T_2^+$, nous savons donc également que $|Q_2^+| > |Q_1^+|$.

Solution alternative 2:

Puisque la machine thermique et la pompe à chaleur opère des cycles réversibles de Carnot, on peut écrire:

$$\Delta U = 0 \qquad \Delta S = 0$$

La convention des signes choisie est celle du cours.

D'où :

$$\left.\begin{array}{ll} (1) & |Q_1^+| - |Q_1^-| - |W| = 0 \\ (2) & \frac{|Q_1^+|}{T_1^+} - \frac{|Q_1^-|}{T_1^-} = 0 \end{array}\right\} \text{machine thermique}$$

$$\left.\begin{array}{ll} (3) & |Q_2^-| + |W| - |Q_2^+| = 0 \\ (4) & \frac{|Q_2^-|}{T^-} - \frac{|Q_2^+|}{T_2^+} = 0 \end{array}\right\} \text{pompe à chaleur}$$

En additionnant (1) et (3) :

$$(5) \qquad |Q_1^+| - |Q_1^-| + |Q_2^-| - |Q_2^+| = 0$$

En substituant (2) et (4) dans (5) :

$$|Q_2^+| \left(\frac{T^-}{T_2^+} - 1 \right) + |Q_1^+| \left(1 - \frac{T^-}{T_1^+} \right) = 0$$

$$\boxed{\frac{|Q_2^+|}{|Q_1^+|} = \frac{1 - \frac{T^-}{T_1^+}}{1 - \frac{T^-}{T_2^+}} > 1}$$

$|Q_2^+| > |Q_1^+|$ est vraie car $T_1^+ > T_2^+ > T^-$. Ce qui veut dire que la chaleur fournie à la source chaude à la température T_2^+ par la pompe à chaleur est plus grande que la chaleur retirée par le moteur thermique à la source chaude T_1^+.

PROBLÈME II CYCLE D'OTTO

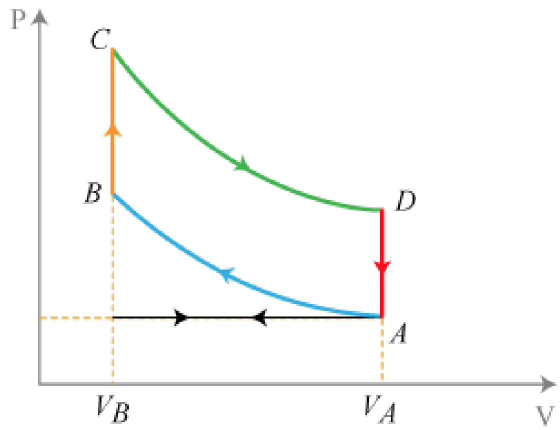

Figure 1

1.

2. Sur les deux adiabatique AB et CD, aucune chaleur n'est échangée par définition. Le mélange reçoit de la chaleur ($Q_c > 0$) au cours de l'explosion (portion BC), et perd de la chaleur ($Q_f < 0$) lors de la détente isochore (portion DA). Sur un cycle, du travail est fourni $W_{total} < 0$(le cycle est parcouru dans le sens horaire; c'est un cycle moteur) et il résulte d'un travail $W_{AB} > 0$ fourni au gaz au cours de sa compression entre A et B, et d'un travail $W_{CD} < 0$ que génère le gaz entre C et D. Le bilan thermique sur un cycle est le suivant :

$$\Delta U = W_{AB} + Q_c + W_{CD} + Q_f = 0$$

Ce qui donne:

$$W_{AB} + W_{CD} = -(Q_c + Q_f)$$

3. Au cours des transformations isochores, les quantités de chaleur échangées sont égales à la variation d'énergie interne du gaz, soient :

$$Q_c = \Delta U_{BC} = C_v(T_C - T_B)$$

et :

$$Q_f = \Delta U_{DA} = C_v(T_A - T_D)$$

L'efficacité η de ce moteur thermique est donnée par :

$$\eta = \frac{|W|}{Q_c} = \frac{Q_c + Q_f}{Q_c} = 1 + \frac{Q_f}{Q_c} = 1 + \frac{T_A - T_D}{T_C - T_B}$$

4. Puisque les transformations AB et CD sont deux adiabatiques, et en considérant que le mélange air/carburant est un mélange de gaz parfaits, on a :

$$\frac{T_A}{T_B} = \left(\frac{V_B}{V_A}\right)^{\gamma-1} \Leftrightarrow T_B = T_A \left(\frac{V_A}{V_B}\right)^{\gamma-1} = T_A \alpha^{\gamma-1}$$

et :

$$\frac{T_C}{T_D} = \left(\frac{V_D}{V_C}\right)^{\gamma-1} \Leftrightarrow T_D = T_C \left(\frac{V_C}{V_D}\right)^{\gamma-1} \overset{V_C=V_B, V_D=V_A}{=} T_C \alpha^{-(\gamma-1)}$$

En injectant ces expressions dans l'expression de l'efficacité, on obtient:

$$\eta = 1 + \frac{T_A - T_C \alpha^{-(\gamma-1)}}{T_C - T_A \alpha^{\gamma-1}} = 1 - \frac{T_A - T_C \alpha^{-(\gamma-1)}}{T_A \alpha^{\gamma-1} - T_C}$$

$$= 1 - \frac{T_A - T_C \alpha^{-(\gamma-1)}}{\alpha^{\gamma-1}\left(T_A - T_C \alpha^{-(\gamma-1)}\right)} = 1 - \frac{1}{\alpha^{\gamma-1}} = 58.5\%$$

5. L'efficacité du moteur de Carnot idéal de ce cycle fonctionnant entre les températures T_A et T_C vaut :

$$\eta_c = 1 - \frac{T_C}{T_A} = 76\%$$

L'efficacité du cycle d'Otto par rapport à celle du moteur de Carnot idéal vaut donc:

$$r = \frac{\eta}{\eta_c} = 77\%$$

Problème III Cycle à l'échelle

1. Pour la table p, V, T, l'on démarre avec le tableau suivant, en recopiant les données de l'énoncé :

état	p	V	T
1	p_0	V_0	T_0
2			
3	$0.4\ p_0$	$2V_0$	
4			

On peut ensuite remplir le tableau dans l'ordre suivant (d'autres ordres sont possibles):

- T_3: par $pV = nRT$, $T_3 = T_1 \frac{p_3 V_3}{p_1 V_1} = 0.8\ T_0$
- p_2: isobare $1 \to 2$, $p_2 = p_1 = p_0$
- V_4: isochore $4 \to 1$, $V_4 = V_1 = V_0$
- T_4: isotherme $3 \to 4$, $T_4 = T_3 = 0.8\ T_0$
- p_4: par $pV = nRT$, $p_4 = p_1 \frac{T_4 V_1}{T_1 V_4} = 0.8\ p_0$
- V_2: abaibatique $2 \to 3$, donc $p_2 V_2^\gamma = p_3 V_3^\gamma \Leftrightarrow V_2 = V_3 \left(\frac{p_3}{p_2}\right)^{1/\gamma} = 2\left(\frac{2}{5}\right)^{1/\gamma} V_0$
- T_2: par $pV = nRT$, $T_2 = T_1 \frac{p_2 V_2}{p_1 V_1} = 2\left(\frac{2}{5}\right)^{1/\gamma} T_0$

Ce qui nous donne le tableau final suivant:

état	p	V	T
1	p_0	V_0	T_0
2	p_0	$2\left(\frac{2}{5}\right)^{1/\gamma} V_0$	$2\left(\frac{2}{5}\right)^{1/\gamma} T_0$
3	$0.4\ p_0$	$2V_0$	$0.8\ T_0$
4	$0.8\ p_0$	V_0	$0.8\ T_0$

Le cycle à l'échelle nous donne donc (on sait que le gaz est monoatomique, donc $\gamma = \frac{5}{3}$):

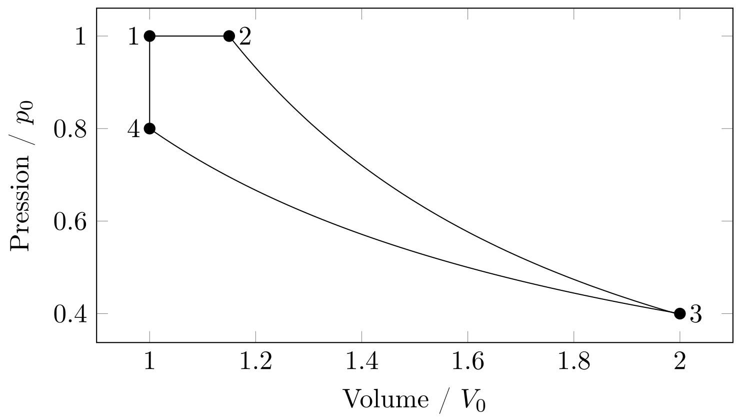

FIG. 1. Cycle thermodynamique dans le plan pV.

2. On sait que $\Delta U = nC_V\Delta T$ **pour toutes les transformations**, ce qui est équivalent à la chaleur nécéssaire lors d'une transformation isochore. Nous savons également que la chaleur est nulle lors d'une transformation adiabatique. Et que la chaleur est égale à $nC_p\Delta T$ lors d'une transformation isobare. Dans le cas d' une isotherme, on peut calculer $W = -\int pdV$ et comme on sait que $\Delta U = Q + W$ et $\Delta U_{\text{isotherme}} = 0$, alors $Q_{\text{isotherme}} = -W_{\text{isotherme}}$.

transition	type	ΔU	Q
$1 \to 2$	isobare	$nC_V\left(2\left(\frac{2}{5}\right)^{1/\gamma} - 1\right)$	$nC_p\left(2\left(\frac{2}{5}\right)^{1/\gamma} - 1\right)$
$2 \to 3$	adiabatique	$nC_V\left(0.8 - 2\left(\frac{2}{5}\right)^{1/\gamma}\right)$	0
$3 \to 4$	isotherme	0	$0.8\ nRT_0 \ln(0.5)$
$4 \to 1$	isochore	$0.2\ nC_VT_0$	$0.2\ nC_VT_0$

3. $\Delta U_{1\to3} = \Delta U_{1\to2} + \Delta U_{2\to3} = nC_VT_0(0.8 - 1) = -0.2\ nC_VT_0$. La différence d'énergie interne est l'opposé de $\Delta U_{4\to1}$ mais aussi de $Q_{4\to1}$, et cela n'est pas un hasard. Il est possible de décomposer chaque transformation ($1 \to 3$ dans ce cas) en une transformation isochore ($1 \to 4$) et une transformation isotherme ($4 \to 3$). Cela est pariculièrement intéressant car l'énergie interne est une fonction d'état, ainsi, ne nous prenons pas la tête et calculons toujours le chemin le plus simple. Lors d'une transformation isotherme, nous savons que l'énergie interne ne change pas. De ce fait, il suffit de calculer le ΔU d'une isochore jusqu'à la température d'interet. Nous pourrions choisir une autre transformation qu'isochore, mais là encore, choisissons la plus simple. Nous savons que lors d'une transformation ischore, le travail est nul. Nous ne devons donc calculer plus

que la chaleur nécéssaire pour se déplacer à la température désirée sur une isochore ($nC_V\Delta T$). Cela explique donc pourquoi $\Delta U = nC_V\Delta T$ **pour toutes les transformations**.

Problème IV Centrale nucléaire (adapté de l'examen 2013, autre professeur)

1. La turbine est une machine thermique qui produit du travail à partir de la chaleur qu'elle reçoit de la source chaude. On a donc : $Q_c > 0$ et $Q_f < 0$.

2. (a) Puisque la variation d'énergie interne de la turbine au cours d'un cycle est nulle, on doit avoir : $W + Q_c + Q_f = 0$, où $W < 0$ est le travail fourni par la turbine au cours d'un cycle. On en déduit :

$$p = \frac{W_{ext}}{\tau} = \frac{-W}{\tau} = \frac{Q_c + Q_f}{\tau}.$$

   (b)

$$\frac{Q_c}{T_c} + \frac{Q_f}{T_f} = 0.$$

   (c) Le rendement maximum correspond au cas où la turbine se comporterait comme une machine idéale de Carnot :

$$\eta_m = \eta_{\text{Carnot}} = \frac{-W}{Q_c} = \frac{Q_c + Q_f}{Q_c} = 1 + \frac{Q_f}{Q_c}.$$

   (d)

$$\eta_m = \eta_{\text{Carnot}} = \frac{-W}{Q_c} = 1 - \frac{T_f}{T_c}.$$

3. La définition du rendement ne change pas, elle correspond toujours au rapport de la quantité que l'on cherche à obtenir sur la quantité que l'on fournit à la machine :

$$\eta_r = \frac{-W}{Q_c^r} = 1 + \frac{Q_f^r}{Q_c^r},$$

   où l'on a de nouveau utilisé le fait que la variation d'énergie interne de la turbine est nulle au cours d'un cycle.

4. La centrale rejette la quantité de chaleur $-Q_f^r$ dans la rivière pendant la durée τ. La masse d'eau m qui reçoit cette chaleur vaut : $m = \rho D\tau$. Sachant que sa température augmente de ΔT, on trouve :

$$mC\Delta T = -Q_f^r = \rho D\tau C\Delta T.$$

5. Par définition du rendement,

$$\eta_r = \frac{-W}{Q_c^r} = \frac{W}{W + Q_f^r},$$

avec $W + Q_c^r + Q_f^r = 0$ et $p = -\frac{W}{\tau}$.

On en déduit

$$\eta_r = \frac{-p\tau}{-p\tau + Q_f^r}$$

et donc

$$\eta_r(Q_f^r - p\tau) = -p\tau$$

et enfin

$$p = -\frac{\eta_r Q_f^r}{(1-\eta_r)\tau} = \frac{\eta_r \rho D C\Delta T}{1-\eta_r}.$$

L'application numérique donne :

$$\eta_m = 1 - \frac{T_f}{T_c} = 1 - \frac{300}{900} = \frac{2}{3},$$

$$\eta_r = \epsilon\eta_m = 0.5 \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3},$$

$$Q_f^r = -\rho C D\tau\Delta T = (-1000 \cdot 4000 \cdot 400 \cdot 1.5)\ \mathrm{J} = -2.4 \cdot 10^9\ \mathrm{J} = -2.4\ \mathrm{GJ}.$$

$$p = -\frac{\eta_r Q_f^r}{(1-\eta_r)\tau} = \left(\frac{\frac{1}{3} \cdot 2.4 \cdot 10^9}{1 - \frac{1}{3}}\right)\ \mathrm{W} = 1.2 \cdot 10^9\ \mathrm{W} = 1.2\ \mathrm{GW}.$$

Ces valeurs ne correspondent pas à la réalité.