Série d'exercices n°5

Solution de l'exercice 1

1. 1. Le travail dissipé sur 50 tours est donné par :
   $$W_{mécanique} = 50\ N \times 50\ \text{tours} \times \pi \times 46.5\ mm = 365\ J$$
   2. La capacité calorifique de l'ensemble est donnée par
   $$C = 70\ g_{eau} \times 1\ \text{cal/g/°C} + 125\ g_{Cu} \times 0.092\ \text{cal/g/°C} = 84\ \text{cal/°C}$$
   50 tours donnent $\Delta T = 18.6\ \text{°C} - 17.5\ \text{°C} = 1.1\ \text{°C}$, donc $Q_{cal} = C \times \Delta T = 92.4\ cal$
   3. $W_{mécanique}/Q_{cal} = 3.95\ J/cal$
2. 1. La puissance en fonctionnement est donnée par
   $$6.3\ V \times 5.4\ A = 34\ J$$
   Et donc le travail électrique :
   $$W_{électriquee} = \Delta P \times t = (34 - 10.8)\ W \times 60\ s = 1392\ J$$
   2. $\Delta T = 20.9\ \text{°C} - 19.4\ \text{°C} = 1.5\ \text{°C}$, donc la chaleur échangée est donnée par
   $$Q_{cal} = C \times \Delta T = 205.9\ cal$$
   $$W_{électrique}/Q_{cal} = 6.76\ J/cal$$
3. On a trouvé des valeurs qui se rapprochent de la valeur actuelle de la mesure de l'équivalent mécanique de la calorie : $W/Q = 4.185\ J/cal$.
   Remarque : la mesure de Joule fut très précise pour l'époque : il obtint une valeur de $4.155\ J/cal$.

Solution de l'exercice 2

1. Regardons ce qu'il se passe lorsque l'on mélange les deux masses d'eau m_1 et m_2, où m_1 se réfère à la masse de température inconnue et V_2 dénote la masse d'eau initialement contenue dans le seau. Comme nous l'avons vu dans le cours, la chaleur de chacune de ces masses est porportionnelle à leurs températures respectives. Ainsi, la chaleur de la masse m_1 vaut par exemple $Q_1 = C_1 T_1$, où C_1 est appelé « capacité calorifique ». Nous verrons plus tard au cours du semestre que la capacité calorifique est en fait proportionnelle à la masse, et qu'elle peut donc s'écrire comme $C_1 = cm_1$. Ceci nous permet d'exprimer la chaleur du volume m_1 comme :
   $$Q_1 = cm_1 T_1. \tag{1}$$
   La même expression peut être utilisée pour calculer les chaleurs masses m_2 et du mélange final $m_{\text{fin}} = m_1 + m_2$:
   $$Q_2 = cm_2 T_2, \tag{2}$$
   $$Q_{\text{fin}} = cm_{\text{fin}} T_{\text{fin}}. \tag{3}$$
   Or, la chaleur est une grandeur extensive. La chaleur Q_{fin} du mélange final est donc égale à la somme des chaleurs Q_1 et Q_2 des masses initiales, c'est-à-dire
   $$Q_{\text{fin}} = Q_1 + Q_2.$$

En remplaçant chacun des termes de cette équation par leurs expressions (1)–(3), on trouve finalement

$$cm_{\text{fin}}T_{\text{fin}} = cm_2T_2 + cm_1T_1 \Rightarrow T_1 = \frac{m_{\text{fin}}T_{\text{fin}} - m_2T_2}{m_1} = \frac{m_1T_{\text{fin}} + m_2(T_{\text{fin}} - T_2)}{m_1}.$$

On aurait pu aboutir directement à la même formule en partant du principe que la température du mélange final correspond en fait à la moyenne des températures initales pondérées par les masses.
A.N. : $T_1 = \big(4 \cdot 11{,}6 + 6 \cdot (11{,}6 - 10)\big)/4 = 14°\text{C}$.

2. On est en train de considérer un système isolé. La chaleur reçue par l'eau est donc égale à la chaleur cédée par l'aluminium :

$$Q_{eau} = -Q_{Al}$$

$$c_{eau}m_{eau}\Delta T_{eau} = -c_{Al}m_{Al}\Delta T_{Al}$$

$$T_{i,Al} = \frac{c_{eau}m_{eau}(T_f - T_{i,eau})}{c_{Al}m_{Al}} + T_f$$

A.N. : 517 ℃

Solution de l'exercice 3

Puisqu'on suppose la température de l'air dans le tube constante, on a que nRT reste constant. Ainsi, en notant l'indice 1 pour la surface de l'océan et 2 pour la profondeur du plongeon, on a que

$$p_1V_1 = nRT = p_2V_2,$$

et donc :

$$p_2 = \frac{p_1V_1}{V_2}. \tag{4}$$

Or, on sait d'après la formule hydrostatique que la pression p_2 est liée à la profondeur h du plongeon par :

$$p_2 = p_1 + \rho g h, \tag{5}$$

où $\rho = 1000$ $[\text{kg}\,\text{m}^{-3}]$ dénote la densité de l'eau et $g \approx 10$ $[\text{m}\,\text{s}^{-2}]$ la constante gravitationnelle. En combinant (4) et (5), on trouve finalement :

$$h = \frac{p_1}{\rho g}\left(\frac{V_1}{V_2} - 1\right).$$

Application numérique : Le tube n'étant pas déformé, on a $V_1 = 6.5 \cdot S$ et $V_2 = 3.8 \cdot S$, où S est la section du tube. Le rapport V_1/V_2 vaut donc 1,71. Sachant que la pression au niveau de la mer est de 1 bar (par définition), on en conclut que le plongeon est d'une profondeur de 7,10 m.

Solution de l'exercice 4

On suppose que les transformations sont quasi-statiques, c'est-à-dire qu'on les effectue suffisamment lentement pour que la pression à l'intérieur du piston s'égalise avec la pression externe à chaque instant. Pour calculer le travail reçu par le piston le long des trois chemins proposés, il suffit donc d'intégrer l'expression $\delta W = -P\mathrm{d}V$ dans le diagramme (P,V) en suivant les chemins.

Transformation AB La compression AB étant isotherme, on a $nRT = PV = \text{cste}$, et donc :

$$P\mathrm{d}V = \frac{nRT}{V}\mathrm{d}V.$$

Le travail fournit au gaz le long du chemin AB vaut donc :

$$W_{\mathrm{AB}} = -\int_{V_\mathrm{A}}^{V_\mathrm{B}} P\,\mathrm{d}V = -nRT_\mathrm{A}\int_{V_\mathrm{A}}^{V_\mathrm{B}} \frac{\mathrm{d}V}{V} = nRT_\mathrm{A}\ln\frac{V_\mathrm{A}}{V_\mathrm{B}}.$$

En utilisant le fait que $V_\mathrm{A}/V_\mathrm{B} = P_\mathrm{B}/P_\mathrm{A}$ (puisque $PV = \text{cste}$), on obtient finalement :

$$W_{\mathrm{AB}} = nRT_\mathrm{A}\ln\frac{P_\mathrm{B}}{P_\mathrm{A}} = 4014{,}3\,\mathrm{J}.$$

Transformation ADB La compression ADB se compose de la transformation isochore AD dont le travail est nul (puisque $V = \text{cste}$ et donc $\mathrm{d}V = 0$), suivie de la compression isobare DB. On obtient donc :

$$W_{\mathrm{ADB}} = W_{\mathrm{DB}} = -\int_{V_\mathrm{A}}^{V_\mathrm{B}} P\mathrm{d}V = -P_\mathrm{B}(V_\mathrm{B} - V_\mathrm{A}).$$

En utilisant les faits que $T_\mathrm{A} = T_\mathrm{B}$ et $V_\mathrm{A} = nRT_\mathrm{A}/P_\mathrm{A}$, on trouve :

$$W_{\mathrm{ADB}} = -nRT_\mathrm{A}\left(1 - \frac{P_\mathrm{B}}{P_\mathrm{A}}\right) = 9976{,}8\,\mathrm{J}.$$

Transformation ACB La compression ACB est la succession d'une transformation isobare (AC) et d'une transformation isochore (CB). Ainsi :

$$W_{\mathrm{ACB}} = W_{\mathrm{AC}} = -P_\mathrm{A}(V_\mathrm{B} - V_\mathrm{A}) = -nRT_\mathrm{A}\left(1 - \frac{P_\mathrm{A}}{P_\mathrm{B}}\right) = 1995{,}4\,\mathrm{J}.$$

On constate que le travail reçu par le système est différent le long des trois chemins. Le travail n'est donc pas une fonction d'état.

Solution de l'exercice 5

1. Isochore : $dW = -pdV = 0 \Rightarrow W_{isochore} = 0$
2. Isobare : $dW = -pdV \Rightarrow W = \int -pdV$ $p = cte = p_1$ donc $W_{isobare} = -p_1(V_2 - V_1)$
3. Isotherme : $\delta W = -p\mathrm{d}V$ et on peut exprimer la pression en fonction du volume :

$$W = -\int_{V_1}^{V_2} p\mathrm{d}V$$

avec $p = \frac{RT}{V-b} - \frac{a}{V^2}$. On en déduit :

$$W_{isotherme} = -\int_{V_1}^{V_2} \frac{RT}{V-b}\mathrm{d}V + \int_{V_1}^{V_2} \frac{a}{V^2}\mathrm{d}V = -RT\ln\frac{V_2 - b}{V_1 - b} + a\left(\frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_2}\right)$$