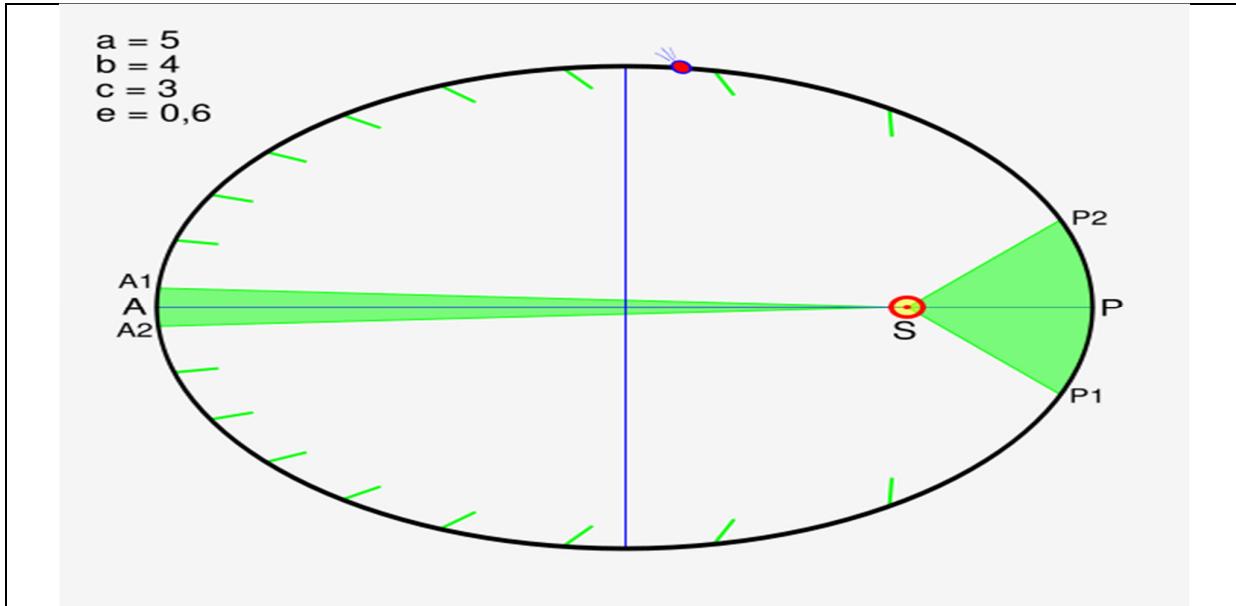


RELATIVITÉ GÉNÉRALE, 2025.03.13

Introduction

- QUESTION: comment fait USS Enterprise à arriver dans l'orbite de Vulcan (16 années/lumière de la Terre) en moins de 2 minutes?
 - Voir la vidéo: <https://youtu.be/zP9PLYJxjaM> à ~11min.
 - Distance Terre-Vulcan: Vulcan orbite autour de l'étoile "40 Eridani", qui se trouve à environ 16 années-lumière de la Terre ...
- On commence par la théorie de la gravitation de Newton: on lance des balles dans l'air, la trajectoire est décrite correctement.
- Force d'attraction gravitationnelle (vecteur) entre le Soleil et une planète: $F_{Sp} = -GmSm_p/d_{Sp}^2 \rightarrow$ qu'est-ce qu'il se passe si le Soleil perds à $t=t_0$ la moitié de sa masse? A quel temps t_p cet effet est ressenti par deux planètes différentes, par exemple la Terre et Pluton, qui se trouvent à des distances différentes du Soleil?
 - Dessin au tableau: Soleil plus Terre et Pluton sur deux orbites elliptiques dont le Soleil est un des deux foyers
 - Distance Soleil-Terre ~8m32s/lumière, distance Soleil-Pluton ~5h47m/lumière ...
 - Théorie de Newton: la planète suivre «immédiatement» une nouvelle trajectoire sur l'orbite définie par $ms/2$...
 - Est-ce que ceci est compatible avec la théorie de la relativité (restreinte, par exemple)?
- Problème majeur avec la théorie de la gravitation de Newton: concept de simultanéité et principe d'action à distance \rightarrow la force exercée par un corps (par exemple le Soleil) sur un autre corps (par exemple la Terre) est déterminée uniquement par leur position relative à un instant donné, et quelle que soit la distance séparant ces deux corps. La gravitation newtonienne, se propageant instantanément, n'est pas compatible avec l'existence d'une vitesse limite $v \leq c$!!! Ce caractère instantané est incompatible avec les principes de la relativité restreinte \rightarrow la simultanéité n'existe pas vraiment, car la notion de temps dépend de l'observateur: $t \neq t'$...
- Est-ce que on peut appliquer la théorie de la relativité restreinte aux problèmes de gravitation?
- NO: la théorie de la relativité restreinte est applicable seulement aux référentiels inertiels!!!
 - Référentiel inertiel \rightarrow vitesse constante, pas d'accélération.
- Les équations du mouvement du système Soleil/Terre sont déterminées par la force de gravité \rightarrow ceci est un exemple de référentiel non-inertiel!

- La vitesse avec laquelle la Terre orbite autour du Soleil n'est pas constante, voir la deuxième loi de Kepler (loi des aires): la vitesse d'une planète est donc plus grande lorsque la planète est plus proche du Soleil.



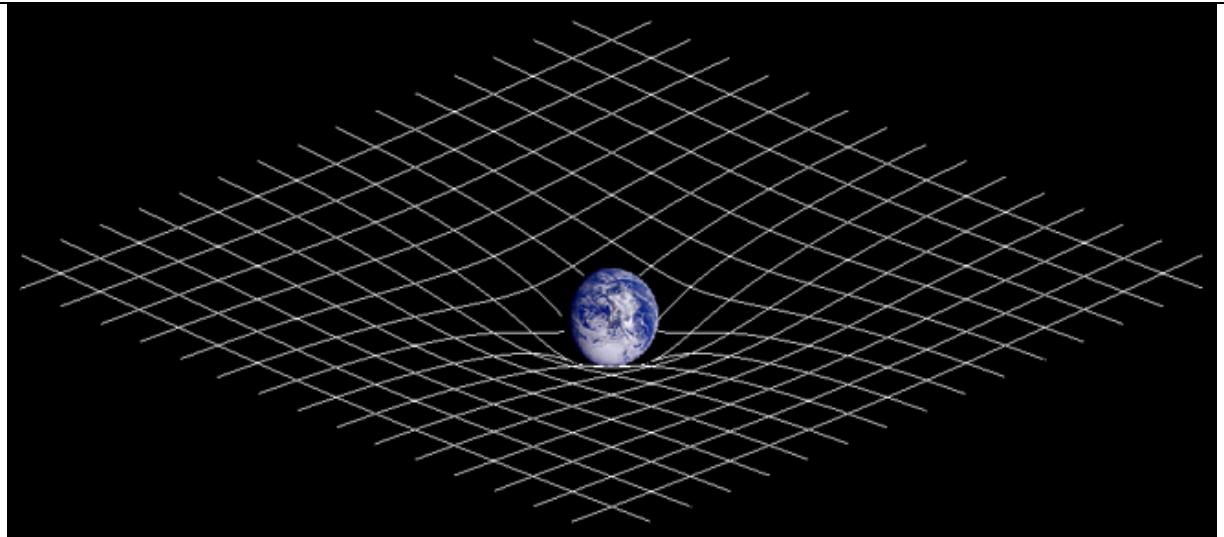
Explication graphique de la deuxième loi de Kepler (loi des aires): chaque intervalle $\{P_1 \rightarrow P_2\}$ et $\{A_1 \rightarrow A_2\}$ sur l'orbite correspond à 5% de la période orbitale.

Si S est le Soleil et M une position quelconque d'une planète, l'aire balayée par le segment [SM] entre deux positions C et D est égale à l'aire balayée par ce segment entre deux positions E et F si la durée de la partie du périodes orbitales qui séparent les positions C et D est égale à la durée de la partie du périodes orbitales qui séparent les positions E et F.

La vitesse orbitale d'une planète est donc maximale au voisinage du rayon le plus court (périhélie), et minimale au voisinage du rayon le plus grand (aphélie).

- Einstein a donc développé la théorie de la relativité générale, pour qu'elle soit aussi applicable aux référentiels non-inertiels.
- Donc: relativité générale → théorie généralisé de la gravitation → on a besoin de ça pour résoudre le problème de «simultanéité» (= action à distance) de la gravité newtonienne.
- Généralisation de la «force de gravité» en relativité générale: la force de gravité N'EST PAS une force, mais la manifestation de la courbure de l'espace-temps, courbure elle-même produite par la distribution de l'énergie, sous forme de masse ou d'énergie cinétique (l'équivalence de Einstein masse = énergie: $E = \gamma m_0 c^2$), qui diffère suivant le référentiel de l'observateur: $\gamma(v)$!
- Analogie permettant une visualisation de la relativité générale en 2D: on représente l'espace en 2D comme une nappe tendue se déformant sous le poids des objets que l'on y met:

- si la nappe est bien tendue et sans corps dessus, une bille légère que l'on fait rouler dessus traverse la nappe (= l'espace-temps) en ligne droite;
- si on y place une boule lourde au centre, la nappe est déformée et la bille légère ne va plus en ligne droite, et peut même tomber vers la boule lourde;
- remarque: cette visualisation en 2D de l'espace-temps est exacte, mais il faut beaucoup de mathématiques pour le démontrer (ce qui est le travail principal de Einstein) ...



courbure de l'espace-temps due à la présence d'un objet avec masse finie (ici la Terre).

- A noter: l'espace-temps est en 4D et toutes les quatre dimensions sont déformées par la présence d'une masse et/ou par la distribution de l'énergie.
- Prédictions vérifiées de la relativité générale: trou-noir, lentilles gravitationnelles, expansion de l'univers, rotation lente de l'ellipse de révolution de Mercure, ...
- MAIS attention: à cause du principe d'indétermination, la relativité générale et la mécanique quantique ne sont pas en accord ➔ «Dieu n'a pas joué aux dés» disait Einstein!
- On a donc besoin d'une théorie quantique de la gravitation pour expliquer certains détails du Big Bang par exemple ...

Un peu de mathématique ...

- Mécanique classique non relativiste: on utilise la géométrie Euclidienne: la distance Δl au carré (Δl^2) entre deux points $\{R_1, R_2\}$ tels que $R_1=(x_1, y_1, z_1)$ et $R_2=(x_2, y_2, z_2)$ est: $\Delta l^2=(\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2)$
 ➔ espace et temps sont BIEN séparés ➔ transformés de Galileo: $t=t'$.
 - Exemple: drap bien tendu, sans masse dessus, métrique Euclidienne 1D à 3 éléments.

$\vec{\chi} = \begin{pmatrix} +1 \\ +1 \\ +1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \{x\} \\ \{y\} \\ \{z\} \end{pmatrix}$	Métrique Euclidienne
---	----------------------

- Mécanique classique relativiste (restreinte), systèmes inertiels: espace et temps ne sont plus séparés ➔ transformés de Lorentz: $t \neq t'$, on utilise la géométrie de Minkowski à courbure nulle, (i.e. l'espace-temps est plat = nappe bien tendu sans objet lourd dessus): la distance entre deux points $\{R_1, R_2\}$ tels que $R_1=(ct_1; x_1, y_1, z_1)$ et $R_2=(ct_2; x_2, y_2, z_2)$ est: $\Delta s^2=(c\Delta t)^2-(\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2)$.
 - Application: principe de Fermat sur la propagation d'un rayon de lumière.
 - Exemple: drap bien tendu, sans masse dessus (encore le même exemple).
 - A noter: on a utilisé une métrique «plate» donné par un vecteur 1D $\chi=(+1; -1, -1, -1)$ avec 4 éléments $\{ct; x, y, z\}$, avec signe positif (+1) pour la coordonnée-temps $\{ct\}$ et signe négatif (-1) pour les trois coordonnées-espace $\{x, y, z\}$.

$\vec{\chi} = \begin{pmatrix} +1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \{ct\} \\ \{x\} \\ \{y\} \\ \{z\} \end{pmatrix}$	Métrique (plate) de Minkowski, pour un espace à courbure nulle
---	--

- Conséquence importante: $\Delta s=0$ pour la distance entre deux points du parcours d'un rayon lumineux en 4D, car $\Delta l^2=(\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2)=(c\Delta t)^2$!
- Le parcours de la lumière représente une ligne d'univers de genre temps, qui sont les seules admises pour des particules avec masse positive ou nulle, donc avec énergie cinétique $K \geq 0$.
- QUESTION: qu'est-ce qu'il se passe pour la distance entre deux points $\{R_1, R_2\}$ si $v > c$ dans la géométrie de Minkowski plate? on obtient que $\Delta s^2 < 0$, donc la distance entre deux points deviendrait imaginaire, chose qui est physiquement impossible ...
 - Solution de Einstein à cette impossibilité physique: l'espace-temps n'est pas plat: on utilise le tenseur métrique de Einstein à 4D avec $(4)*(4)=16$ éléments
 - Donc $\Delta s^2=(c\Delta t)^2-\chi*(\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2)$, où χ est une mesure de la courbure de l'espace-temps dû à la présence de masse entre $\{R_1\}$ et $\{R_2\}$.

- Exemple: drap bien tendu, avec des masses de poids différent dessus.

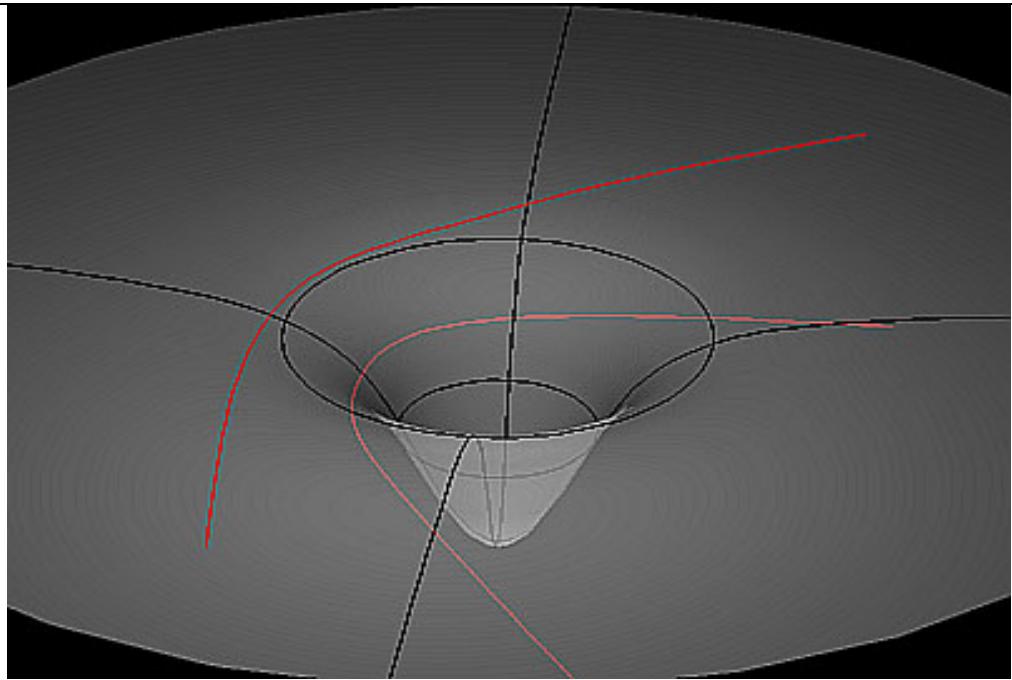
$$\tilde{\chi} = \begin{pmatrix} +1 & \chi_{ct,x} & \chi_{ct,y} & \chi_{ct,z} \\ \chi_{x,ct} & -1 & \chi_{x,y} & \chi_{x,z} \\ \chi_{y,ct} & \chi_{y,x} & -1 & \chi_{y,z} \\ \chi_{z,ct} & \chi_{z,x} & \chi_{z,y} & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +1 & \{ct,x\} & \{ct,y\} & \{ct,z\} \\ \{x,ct\} & -1 & \{x,y\} & \{x,z\} \\ \{y,ct\} & \{y,x\} & -1 & \{y,z\} \\ \{z,ct\} & \{z,x\} & \{z,y\} & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +1 & \{ct,l\} \\ \{l,ct\} & -1 \end{pmatrix}$$

Métrique pour un espace de Minkowski à courbure non-nulle.

La dernière équivalence est LE résultat principal de Einstein: on peut réduire le tenseur métrique à 4D avec $4*4=16$ éléments de l'espace-temps (le tenseur de Riemann) à un tenseur métrique à 2D avec $2*2=4$ éléments (le tenseur de Ricci) et cette "réduction" est UNIQUE si la masse M (et/ou l'énergie cinétique K) qui détermine la courbure de l'espace-temps est connue.

➔ donc l'exemple de la nappe 2D est exactement correct!

- On définit donc les géodésiques, qui peuvent être considérées comme l'équivalent des lignes droites pour cet espace-temps courbé par la présence d'une masse ➔ la lumière suive les trajectoires géodésiques



Exemple de trajectoires géodésiques dans un espace de Minkowski à courbure non-nulle.

- Conséquence secondaire mais aussi importante en principe: on pourrait remonter dans l'espace-temps et/ou aller plus vite que la lumière si on pouvait «produire et injecter» dans l'espace-temps de l'énergie cinétique négative $K < 0$ ➔ comment-t-on pourrait faire ceci?
 - Remarque (1): cette hypothèse de propulsion par énergie négative est encore une fois exacte mathématiquement et physiquement mais très difficile à démontrer ...

- Remarque (2): la vitesse d'un objet avec masse (ou d'un photon) est toujours limitée par $v \leq c$ ($v=c$ que pour des photons avec $m=0$), mais aucune loi nous dit si l'espace lui-même dans lequel la masse m (ou le photon) se déplace a une vitesse limite ...
- Encore une fois: ceci est exacte mais très difficile à démontrer ...
- DONC: comment-t-on pourrait faire déplacer l'espace, dans notre cas par énergie positive? Est-ce que on connaît un exemple pratique de la vie de tous les jours?

L'équation d'Einstein

- L'équation d'Einstein est l'expression mathématique de la relativité générale et de toute la physique de la gravitation. Il s'agit d'une formule fondamentale, qui ne peut être dérivée d'une théorie sous-jacente dont elle dériverait.
- Sa forme générale $\chi = \Lambda T$ signifie: courbure de l'espace-temps = densité locale d'énergie.
- χ est le tenseur d'Einstein qui représente la courbure de l'espace-temps en un point.
- T est le tenseur énergie-impulsion représentant la contribution de toute la matière (et énergie) à la densité d'énergie en ce point du champ gravitationnel.
- $\Lambda = \pi G/c^4 - \Omega$ est un simple facteur dimensionnel, permettant d'exprimer l'équation dans les unités usuelles et de faire correspondre l'équation à la réalité physique et à la valeur observée de la constante gravitationnelle.
 - Ω est une quantité qui définit le type d'Univers dans lequel on vit: en expansion, statique, en condensation gravitationnelle, ...
- Cette équation exprime et concentre les idées principales d'Einstein gouvernant la relativité générale: le principe d'équivalence amène à affirmer que la gravitation n'est pas une véritable force, mais la manifestation de la courbure de l'espace-temps due à la présence d'une masse.
- Cette équation est locale: elle indique la manière avec laquelle l'espace-temps se courbe en un *point* de l'espace-temps en fonction de la densité de matière qui s'y trouve et, réciproquement, la disposition ou l'évolution de la matière en un point en fonction de la courbure à ce point.
- Le caractère local de l'équation a pour conséquence que selon la relativité générale, il n'existe pas d'action instantanée à distance: la matière courbe localement l'espace-temps, ce qui perturbe l'espace-temps un peu plus loin et ainsi de suite: l'espace-temps agit sur la matière, qui elle-même agit sur l'espace-temps ...

Tests expérimentaux de la relativité générale:

- Einstein calcula en 1915 la déviation des positions apparentes des étoiles par le Soleil: le 29 Mai 1919, les mesures furent faites par Eddington lors d'une éclipse solaire, et malgré quelques imprécisions de mesure, cela constitua une première confirmation de la théorie.
- Rotation lente de l'ellipse de révolution de Mercure, en accord parfait avec les observations.
- La gravitation doit ralentir le temps mesuré à distance, donc modifier les fréquences et les longueurs d'onde des rayonnements reçus et émis à distance: on peut citer par exemple l'expérience de Pound-Rebka en 1959, qui a permis de détecter un changement de la longueur d'onde d'une source monochromatique de cobalt provoqué par le champ gravitationnel terrestre sur une altitude de 22.5 mètres.
 - Conséquence pratique: les horloges atomiques en orbite autour de la Terre du système de positionnement GPS (*Global Positioning System*) nécessitent une correction pour compenser l'effet dû à la gravité terrestre ($t \neq t'$, $R \neq R'$: correction de l'ordre de 50msec en temps, qui corresponds en position à 2km) environ.
- Expansion de l'Univers, mesuré par le décalage vers le rouge de la lumière provenant des objets astronomiques lointains: ceci n'est pas un effet du Doppler shift (\rightarrow les objets ne se déplacent pas avec une vitesse relative) mais est dû à l'expansion de l'Univers, qui est une conséquence de la relativité générale, car en présence de masse l'Univers devrait «condenser» sur lui-même par cause de la courbure de l'espace-temps.
 - L'expansion de l'Univers est la solution théorique trouvée par Friedmann pour rendre compte du fait que l'Univers ne se soit pas déjà effondré sous l'effet de la gravitation.
 - La conséquence immédiate de l'expansion de l'Univers est que celui-ci était par le passé plus dense et donc plus chaud \rightarrow c'est le concept du Big Bang.
 - L'expansion continue ou la contraction ultime de l'Univers est aussi lié au fait que les trois type («flavours» = le gout) de neutrinos (tau: ν_τ , muon: ν_μ , électron: ν_e) aient ou pas de la masse au-delà de la valeur théorique maximale prédict par la modèle standard de l'Univers, c'est-à-dire $m_{\nu_\tau} + m_{\nu_\mu} + m_{\nu_e} = 0.3\text{eV}$ qui est très faible, $m_e \approx 5.11 \times 10^{-5}\text{eV}$ (c'est pour ceci qu'on dit que le neutrino n'a pas de masse) \rightarrow l'observation récente (2001) de la fable masse des neutrinos explique l'anomalie dans la production/observation de neutrinos solaires.

Les ondes gravitationnelles.

- Les perturbations de l'espace-temps donnent naissance aux ondes gravitationnelles.
- Des ondes gravitationnelles sont (par exemple) supposé avoir été produites par des fluctuations quantiques de la matière au moment du Big Bang.

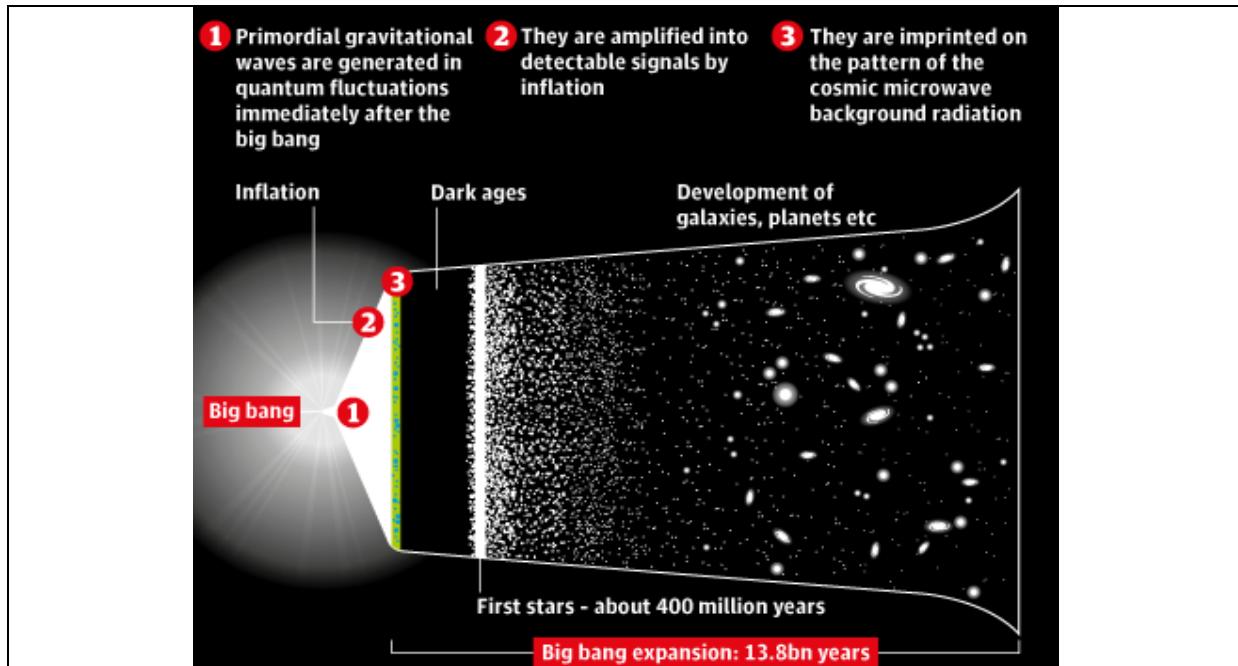
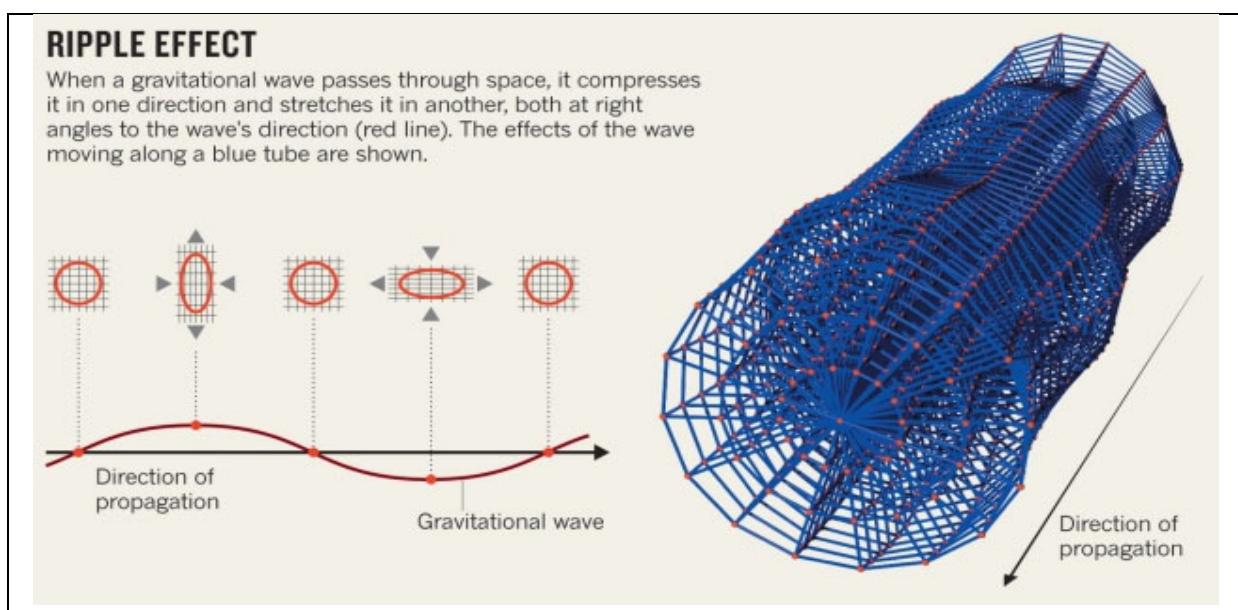


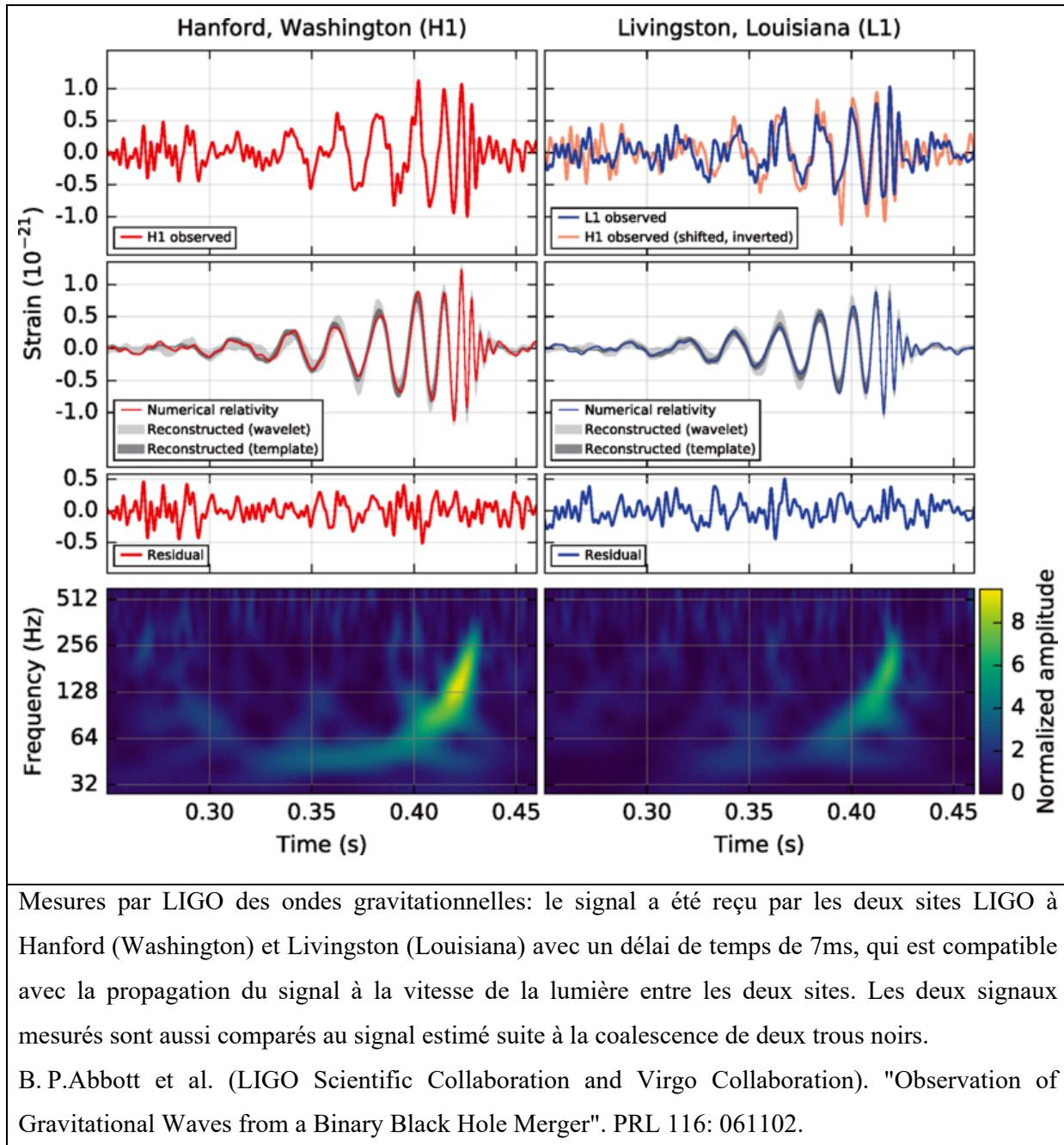
Image tirée du site du Guardian, 17 Mars 2014: <http://www.theguardian.com/science/>.

- Les ondes gravitationnelles se propagent dans l'espace-temps, en le comprimant et dilatant dans deux directions opposées, ainsi laissant leur trace sur la radiation de fond émise par l'Univers.



<http://www.nature.com/news/telescope-captures-view-of-gravitational-waves-1.14876>

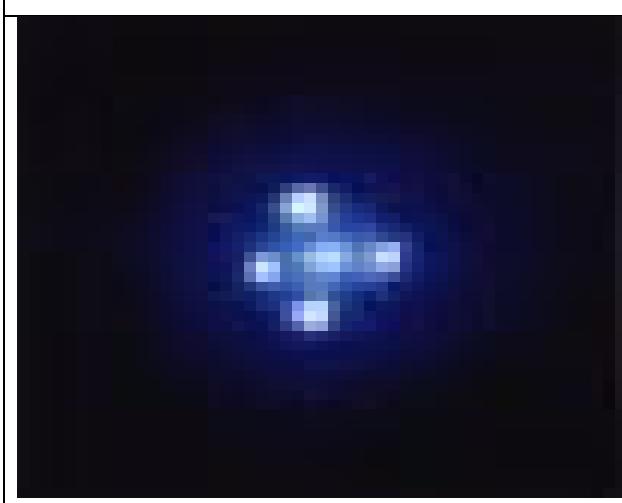
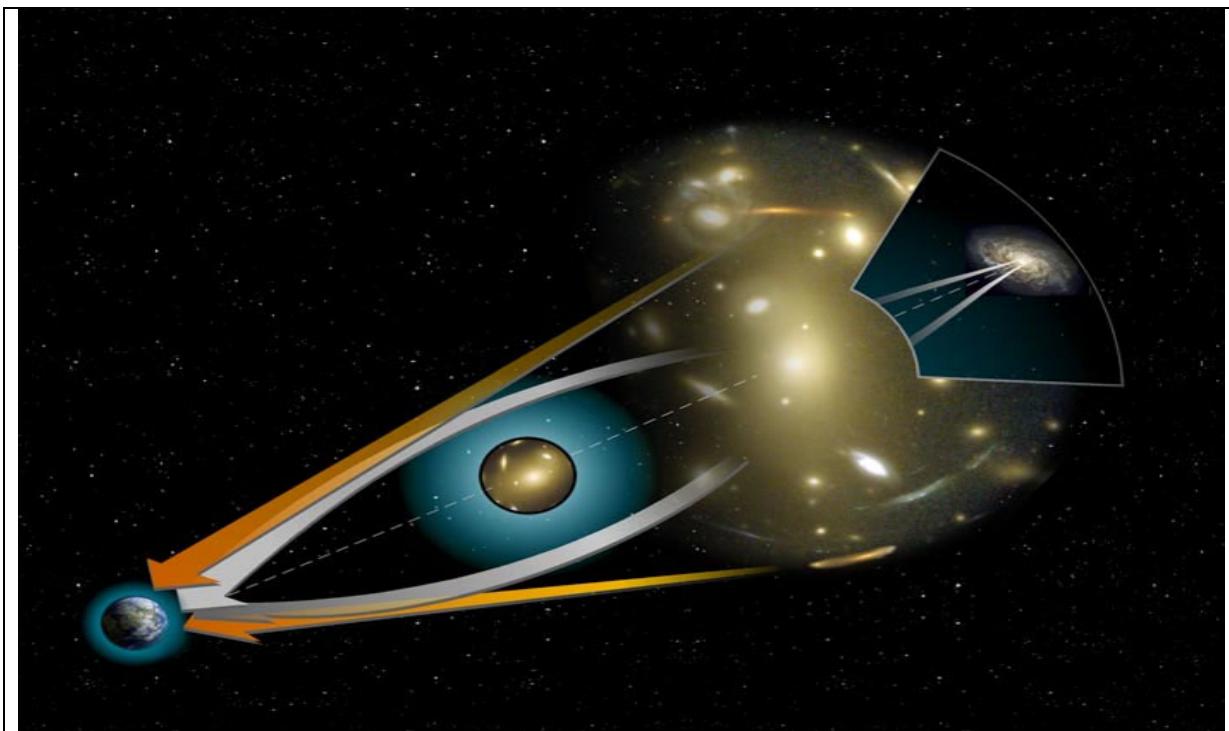
- Les ondes gravitationnelles se propagent à la vitesse de la lumière dans le vide, comme toute autre onde, mais car leur amplitude est très faible, les ondes gravitationnelles sont très difficile à mesurer ➔ voir le projet LIGO (Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory: <http://www.ligo.caltech.edu/>) à Caltech aux USA et le télescope BICEP (Background Imaging of Cosmic Extragalactic Polarization: https://cosmology.caltech.edu/projects/BICEP_Array) à l'observatoire Amundsen–Scott au Pôle Sud, et les mesure du satellite Planck de l'agence spatial Européenne (http://www.esa.int/Our_Activities/Space_Science/Planck).
- Première détection confirmée des ondes gravitationnelles par le projet LIGO le 14.09.2015!



- Le principe de fonctionnement de LIGO: <https://youtu.be/B4XzLDM3Py8>.
- Une vidéo pour illustrer la génération et la propagation des ondes gravitationnelles: <https://youtu.be/FIDtXIBrAYE>.
- Le signal sonore émis par la coalescence de deux trous noirs, c'est-à-dire le signal mesuré par LIGO: <https://youtu.be/QyDcTbR-kEA>.
- Again! Gravitational waves detected from a 2nd black hole collision: <https://youtu.be/-zqN1kwKjkQ>.
- The first detection of a merger between a black hole and a neutron star: <https://www.youtube.com/embed/vMehrzEk8oQ>.

Lentilles gravitationnelles: la croix de Einstein

- Contrairement aux prévisions newtoniennes, la trajectoire de la lumière peut être fortement défléchie en présence d'un corps massif (une planète particulièrement massive, un amas de galaxies, ...) près de la trajectoire d'un rayon.
- La lumière suit les géodésiques (des lignes d'espace-temps) qui sont déformées aux abords d'un corps massif par effet de la gravitation.
- Même deux rayons issus d'un même corps présent d'un côté de la planète massive, et dirigés dans des directions différentes, peuvent se rejoindre du côté opposé et créer une image dédoublée, une sorte de mirage d'origine gravitationnelle ➔ c'est la croix de Einstein.



En haut: exemple de modélisation d'une lentille gravitationnelle.

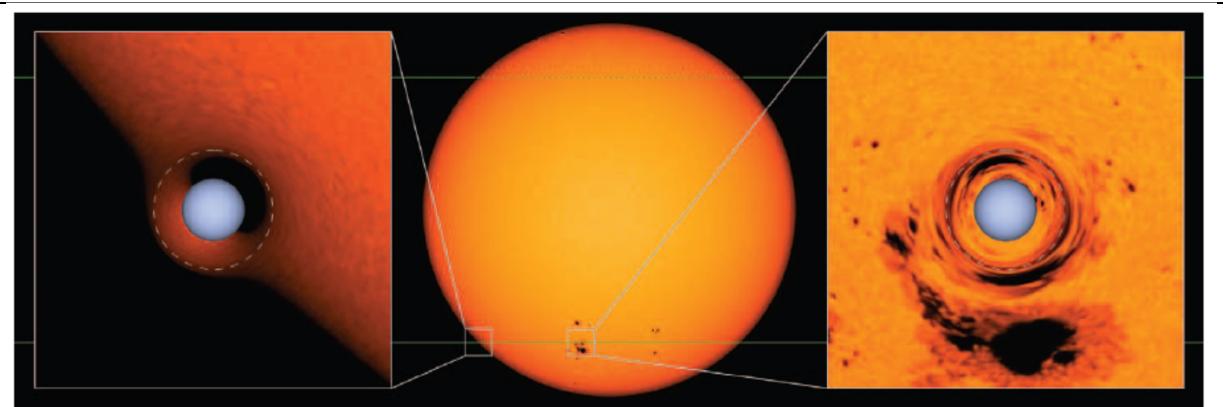
A gauche: une vraie lentille gravitationnelle: c'est le quasar G2237 + 0305, aussi connu avec le nom *la croix d'Einstein*: ce quasar se situe à 8 milliards d'années lumières de la Terre.

Image tirée de:

<https://hubblesite.org/contents/media/images/1990/20/22-Image.html>.

Un autre exemple de phénomène dû à une lentille gravitationnelle est l'augmentation de l'émission lumineuse d'une étoile dans un système double lors d'une éclipse. Ce phénomène résulte d'une microlentille gravitationnelle, produite par la très grande gravité de surface d'une étoile blanche naine qui orbite autour d'une étoile plus grande mais moins massive, de la taille du Soleil.

- Beaucoup de systèmes d'étoiles sont doubles, ayant deux étoiles qui orbitent l'une autour de l'autre, et ont des fois des exo planètes qui aussi orbitent autours d'elles.
- Dans certains cas, les orbites sont alignées dans la ligne d'observation d'un télescope, de sorte qu'une étoile éclipse périodiquement l'autre et obscurcit la lumière que nous voyons en provenance de la deuxième étoile. Ce phénomène serait le même si l'éclipse était causée par une exoplanète.
- Toutefois, si une petite étoile massive éclipse son compagnon, la gravité de la petite étoile devrait amplifier la lumière de l'autre étoile de façon à pouvoir surmonter l'assombrissement provoqué par l'éclipse. Ce phénomène de microlentille gravitationnelle est dû à la théorie générale de la relativité d'Einstein, selon laquelle la masse courbe la lumière, et n'aurait pas lieu si l'éclipse avait été causée par une exoplanète.
- Ce phénomène vient d'être observé pour la première fois en décembre 2013 en utilisant les données de la mission Kepler pour l'étoile KOI-3278, qui se trouve à environ 808 parsecs (2'600 années lumières) de la Terre, dans la constellation Lyra.
- Voir aussi: http://www.nature.com/news/white-dwarf-acts-as-cosmic-magnifying-glass-1.15072?WT.ec_id=NEWS-20140422.



Une illustration de ce phénomène de lentille gravitationnelle. Au centre, l'étoile-Soleil du système double KOI-3278, avec en vert la trajectoire de l'étoile blanche naine. A gauche/droite: un zoom de deux portions de cette trajectoire, qui montrent l'augmentation de l'émission lumineuse.

Question: comment fait USS Enterprise à arriver dans l'orbite de Vulcan (16 année-lumière de la Terre) en moins de 2 minutes?

- On utilise un «warp drive»: bien décrit (en Anglais) sur un site de divulgation de la NASA (<https://ntrs.nasa.gov/api/citations/20110015936/downloads/20110015936.pdf>).
- A «warp drive» est un moteur de Alcubierre, qui fonctionne en principe comme un trottoir roulant.
- Bien que la relativité restreinte interdise objets à déplacer plus vite que la lumière dans l'espace-temps, on ne sait pas à quelle vitesse l'espace-temps lui-même peut se déplacer.
- Pour utiliser une analogie, imaginez que vous êtes dans une de ces trottoirs roulants qui peuvent être trouvés dans certains aéroports.
- Le moteur de Alcubierre est comme un de ces trottoirs roulants: bien qu'il puisse y avoir une limite à la vitesse à laquelle on peut marcher sur le sol (analogie à la limite de la vitesse de la lumière), que diriez-vous si vous étiez sur une section mobile de plancher qui se déplace plus vite que vous pouvez marcher (analogie à une partie mobile de l'espace-temps qui avance avec une vitesse $v>c$)?
- Dans le cas du moteur de Alcubierre, cette partie mobile de l'espace-temps est créé en élargissant l'espace-temps derrière le navire (analogie à l'endroit où le trottoir sort de sous le plancher), et en contractant l'espace-temps à l'avant du navire (analogie à l'endroit où le trottoir retourne dans le sol).
- Tout d'abord, pour créer cet effet, vous auriez besoin d'un anneau avec beaucoup d'énergie négative enroulée autour du navire. Il est encore débattue en physique si l'énergie négative peut exister: la physique classique tend vers un «non», tandis que la physique quantique se penche à un «peut-être, oui» → annihilation photon en matière/antimatière (OK: on le fait déjà à CERN) avec masse positive (OK) et négative (pas encore ...), on extrait de l'antimatière à masse négative qui produit donc de l'énergie négative ...
- Ensuite, vous auriez besoin d'un moyen de contrôler cet effet pour l'allumer et l'éteindre à volonté; ce sera particulièrement délicat, car cet effet de chaîne est un effet propre du navire.
- Attention: ces concepts évoquent les mêmes paradoxes de voyage dans le temps que les concepts de trou de ver!!!
- Propulsion de masse négative: il a été démontré que c'est théoriquement possible de créer un effet continu de propulsion par la juxtaposition de masse négative et masse positive, et qu'un tel

système ne viole pas la conservation de la quantité de mouvement ou de l'énergie. Une hypothèse essentielle à la réussite de ce concept est que la masse négative a inertie négative. L'interaction parmi masse négative et masse positive produit une accélération soutenue des deux masses dans la même direction. Ceci est un concept assez vieux, datant des années 1955-1960, avec une analyse des propriétés de masse négative hypothétique par Bondi, et a été revu dans le contexte de propulsion par Winterberg dans les années 1980.

- En ce qui concerne la physique de la masse négative, on ne sait pas si la masse négative existe ou s'il est même théoriquement autorisé, mais des méthodes ont été proposées pour rechercher des preuves de masse négative dans le contexte de la recherche de preuves astronomiques de trous de ver.
- Est-ce que le «warp drive» est donc possible?
OUI!!! un moteur «warp drive» n'est rien d'autre qu'un trottoir roulant (très très très rapidement, on est d'accord), comme ceux qui se trouvent dans les aéroports ...