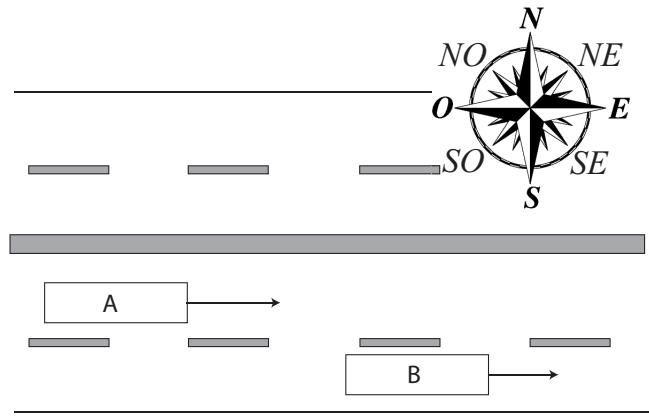


Cet examen comporte 5 exercices. Les exercices peuvent être traités dans n'importe quel ordre. Vous avez à disposition 5 feuillets, vous traiterez donc chaque exercice sur un feuillet distinct. Inscrivez votre nom sur tous les feuillets que vous rendez.

Exercice 1

(20 points au total)

Deux voitures identiques A et B (masse au repos $m = 1000 \text{ kg}$, longueur au repos $L_0 = 10 \text{ m}$) roulent, à vitesse constante, vers l'Est sur une autoroute terrestre rectiligne, orientée Ouest-Est. Robert, un observateur dans le référentiel terrestre, mesure la vitesse de chaque voiture : $v_A = 4/5c$ et $v_B = 3/5c$. La voiture A veut dépasser la voiture B . Dans le référentiel de Robert, la manœuvre de dépassement commence quand l'avant de la voiture A et l'arrière de la voiture B sont alignés à la direction Nord-Sud et termine quand l'avant de la voiture B et l'arrière de la voiture A sont alignés à la direction Nord-Sud.

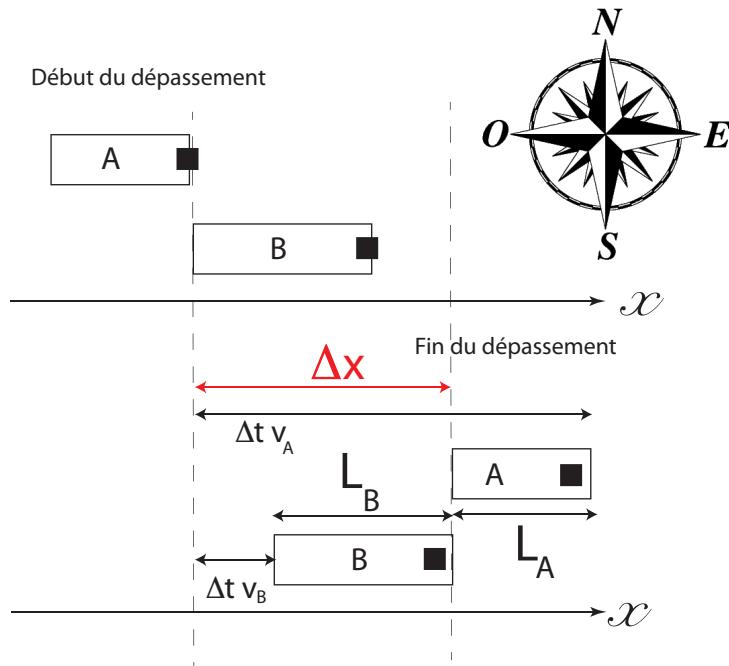


- Quelle est la durée de la manœuvre de dépassement mesurée dans le référentiel de Robert ?
- Au début de la manœuvre, un photon est lancé vers l'Est depuis l'avant de la voiture A . On définit l'événement suivant : le photon et l'avant de la voiture B sont alignés à la direction Nord-Sud dans le référentiel de Robert. Combien de temps s'est-il écoulé depuis le lancement du photon, mesuré dans le référentiel de Robert ? Même question, mesuré dans le référentiel de la voiture B .
- Un photon est lancé depuis la voiture B . Dans le référentiel de Robert, le photon voyage vers le Nord-Est. Sa trajectoire forme ainsi un angle de $\pi/4$ avec la direction Ouest-Est. Dans le référentiel de la voiture B , quelle est la valeur de l'angle que la trajectoire du photon forme avec un axe dirigé selon la direction Ouest-Est ?
- Pour atteindre la vitesse v_B finale depuis une situation de repos dans le référentiel de Robert, la voiture B a subi une phase d'accélération pendant laquelle une force constante $F = 2.25 \times 10^6 \text{ N}$, parallèle à l'autoroute et selon le sens de marche, a été appliquée. Dans le référentiel de Robert, combien de temps a duré cette phase d'accélération ?

Indications : Vitesse de la lumière : $c = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$.

Corrigé

- a) (5 points)



Dans le référentiel de Robert, les longueurs des voitures sont contractées par rapport à leur longueur au repos :

$$L_A = \frac{L_0}{\gamma_A} = L_0 \sqrt{1 - \frac{v_A^2}{c^2}} = \frac{3}{5} L_0 \quad \text{et} \quad L_B = \frac{L_0}{\gamma_B} = L_0 \sqrt{1 - \frac{v_B^2}{c^2}} = \frac{4}{5} L_0 \quad \boxed{2.5 \text{ points}}_A.$$

2.5 points même si seulement un des deux est calculé. On en demande pas cela en fait

Comme indiqué sur la figure, dans le référentiel de Robert, la distance Δ séparant les deux événements peut s'écrire de deux façons :

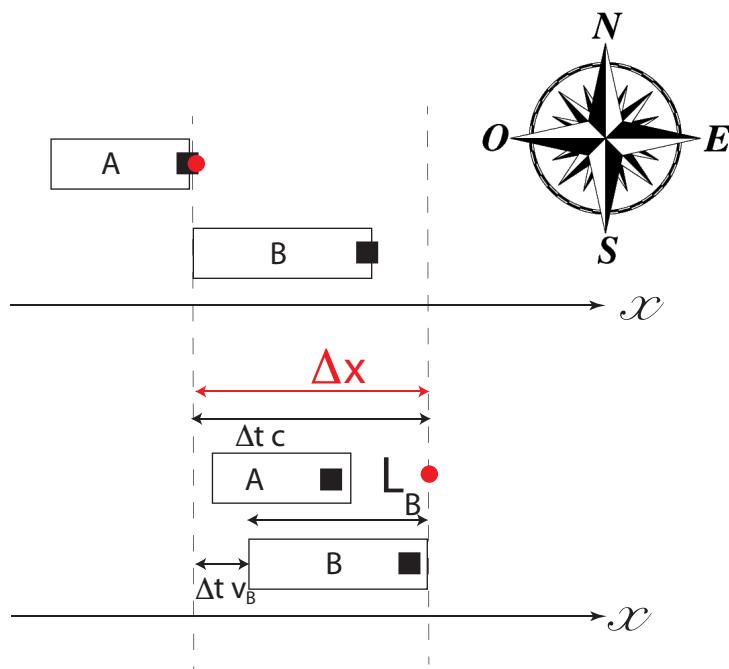
$$\Delta x = v_A \Delta t - L_A = v_B \Delta t + L_B \quad \boxed{1.5 \text{ points}}_B \Rightarrow \Delta t(v_A - v_B) = L_B + L_A,$$

donc

$$\Delta t = \frac{L_B + L_A}{v_A - v_B} = \frac{L_0 \left(\frac{4}{5} + \frac{3}{5} \right)}{c \left(\frac{4}{5} - \frac{3}{5} \right)} = 7 \frac{L_0}{c} \quad \boxed{0.5 \text{ point}}_C. \quad (1)$$

Application numérique : $\Delta t \simeq 2.33 \times 10^{-7} \text{ s}$ **0.5 point** _D.

b) **(6 points)**



Dans le référentiel de Robert, la distance entre les deux événements peut s'écrire comme

$$\Delta x = c\Delta t = v_B\Delta t + L_B \quad \boxed{1 \text{ point}}_{\text{E}} \Rightarrow \Delta t(c - v_B) = L_B,$$

donc

$$\Delta t = \frac{L_B}{c - v_B} = \frac{\frac{4}{5}L_0}{c(1 - \frac{3}{5})} = 2\frac{L_0}{c} \quad \boxed{1 \text{ point}}_{\text{F}}.$$

Application numérique : $\Delta t \simeq 6.67 \times 10^{-8}$ 1 point _{Gs.}

Dans le référentiel de la voiture B, ce temps est donné par la transformation de Lorentz :

$$\begin{aligned} \Delta t|_B &= \gamma_B \left(\Delta t - \frac{v_B}{c^2} \Delta \right) \quad \boxed{2 \text{ points}}_{\text{H}} = \gamma_B \left(\Delta t - \frac{v_B}{c^2} \Delta t c \right) = \gamma_B \Delta t \left(1 - \frac{v_B}{c} \right) \\ &= \frac{5}{4} \Delta t \left(1 - \frac{3}{5} \right) = \frac{\Delta t}{2}. \end{aligned}$$

Application numérique : $\Delta t|_B \simeq 3.333 \times 10^{-8}$ 1 point _I s.

Remarque : on peut arriver au même résultat en remarquant que dans le référentiel de la voiture B, celle-ci est au repos. Donc le photon doit parcourir la distance L_0 à la vitesse à c : $\Delta t|_B = \frac{L_0}{c} = \frac{10}{3 \times 10^8} = 3.333 \times 10^{-8}$ s.

c) (5.5 points)

La trajectoire du photon forme un angle de $\theta = \pi/4$ avec l'axe x dans le référentiel de Robert. Les composantes de la vitesse du photon s'écrivent :

$$v_{ph,x} = \cos \theta \times c = \frac{\sqrt{2}}{2}c \quad \text{et} \quad v_{ph,y} = \sin \theta \times c = \frac{\sqrt{2}}{2}c \quad \boxed{1.5 \text{ points}}_{\text{K}}$$

En considérant le référentiel de la voiture B, avec x' Ouest-Est et y' selon Sud-Nord, les composantes de la vitesse du photon sont modifiées selon les transformations de Lorentz 0.5 point _L. On peut exprimer les composantes dans ce référentiel :

$$v'_{ph,x} = \frac{v_{ph,x} - v_B}{1 - \frac{v_B v_{ph,x}}{c^2}} \quad \boxed{1 \text{ point}}_{\text{M}} \quad \text{et} \quad v'_{ph,y} = \frac{v_{ph,y}}{\gamma_B \left(1 - \frac{v_B v_{ph,x}}{c^2} \right)} \quad \boxed{1 \text{ point}}_{\text{N}} \quad (2)$$

et donc

$$\theta' = \tan^{-1} \left(\frac{v'_{ph,y}}{v'_{ph,x}} \right) = \tan^{-1} \left(\frac{v_{ph,y}}{\gamma_B (v_{ph,x} - v_B)} \right). \quad \boxed{1 \text{ point}}_{\text{O}} \quad (3)$$

Application numérique : $\theta = \tan^{-1} \left(\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{1.25 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 0.6 \right)} \right) \simeq 79^\circ$ 0.5 point _P.

d) (3.5 points)

La quantité de mouvement de la voiture B, lorsque sa vitesse vaut v_B est donnée par l'expression relativiste $p_B = \gamma_B m_B v_B$ 1.5 points _Q.

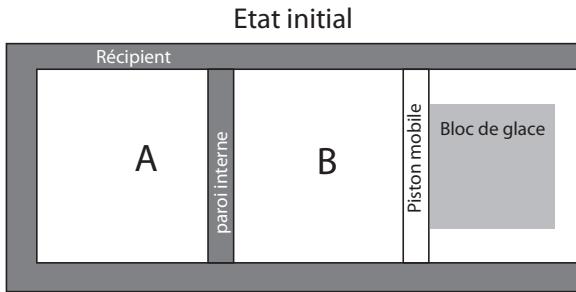
Pour augmenter la quantité de mouvement de la voiture B, une force F constante est appliquée pendant un temps Δt :

$$\frac{dp}{dt} = F \Rightarrow \text{Intégration : } p - p_0 = F\Delta t = p_B - 0 \quad \boxed{1 \text{ point}}_{\text{R}} \Rightarrow \Delta t = \frac{\gamma_B m_B v_B}{F}. \quad \boxed{0.5 \text{ point}}_{\text{S}}$$

Application numérique : $\Delta t = \frac{1.25 \times 1000 \times 0.6 \times 3 \times 10^8}{2.25 \times 10^6} = 1 \times 10^5$ s 0.5 point _T.

Exercice 2

(20 points au total)



Un récipient à parois rigides et thermiquement isolées est fermé par un piston mobile qui peut coulisser sans frottement et qui permet d'échanger de la chaleur mais pas de matière. Le récipient est encore divisé en deux chambres (A et B) par une paroi interne fixe, rigide et thermiquement isolante et qui ne permet pas d'échange de matière. Dans l'état initial, les deux chambres ont le même volume $V_A = V_B = 0.664 \text{ m}^3$.

La chambre A contient $n_A = 40$ moles d'un gaz parfait di-atomique à la pression $p_A = 2$ bar. La chambre B contient $n_B = 40$ moles d'un gaz parfait mono-atomique à la pression $p_B = 1.6$ bar. Chaque chambre, individuellement, est à l'équilibre. Dans cet exercice, on arrondit la valeur de la constante des gaz parfaits à $R = 8.3 \text{ J/K/mol}$.

Le gaz de la chambre B subit une compression isotherme réversible jusqu'à l'état final qui correspond à la pression $p_{B,f} = 16$ bar.

- Donnez les valeurs de la température, de la pression et du volume du gaz dans chaque chambre à l'état final (fin de la compression isotherme réversible).
- Pour le gaz de la chambre B, calculez la chaleur échangée et le travail effectué lors de la compression isotherme réversible.

Au cours de la compression isotherme réversible, le gaz de la chambre B échange de la chaleur seulement avec un bloc de glace de masse de 2 kg, à travers le piston. A l'état initial, la température de la glace est 200 K.

- Calculez, entre l'état initial et l'état final, le changement d'entropie du gaz dans chaque chambre ainsi que celui de l'univers.
- Représentez la transformation pour le gaz B dans un diagramme $T - S$.

Une fois l'état final atteint, le piston devient instantanément thermiquement isolant et est bloqué dans sa position. Dans ces conditions, la paroi interne qui sépare les deux chambres se brise et les deux gaz se mélangent jusqu'à l'équilibre à la température $T_f = 370$ K.

- Calculez le nombre de degrés de liberté des molécules di-atomiques du gaz de la chambre A.

Indication : Chaleur spécifique de la glace $c_{\text{glace}} = 2.44 \text{ kJ/kg/K}$; Négligez l'épaisseur et la masse de la paroi interne et du piston mobile.

Corrigé

- a) (4.5 points)

- Chambre A : Aucun changement pour le gaz dans la chambre A après la compression isotherme du gaz de la chambre B, puisque la paroi interne ainsi que la paroi du récipient sont fixes, rigides et thermiquement isolantes.
- $V_A = 0.664 \text{ m}^3$ (donné)
- $p_A = 2 \text{ bar}$ (donné)
- La température est donnée par la loi des gaz parfaits :

$$T_A = \frac{p_A V_A}{n_A R} \quad \boxed{1 \text{ point}}_A.$$

Application numérique :

$$T_A = \frac{2 \times 0.664}{40 \times 8.3} = 400 \text{ K.} \quad \boxed{0.5 \text{ point}}_B$$

- Chambre B :

- pression : $p_B = 16$ bar (donné)
- Comme la transformation est isotherme, la température du gaz dans la chambre B est calculée avec l'équation des gaz parfaits avec les conditions initiales :

$$T_B = \frac{p_{B,i} V_{B,i}}{n_B R} \quad \boxed{1 \text{ point}} \text{ C}$$

Application numérique :

$$T_B = \frac{1.6 \times 10^5 \times 0.664}{40 \times 8.3} = 320 \text{ K} \quad \boxed{0.5 \text{ point}} \text{ D}$$

- Le volume final de la chambre B est donné par la loi des gaz parfaits avec les conditions finales :

$$V_{B,f} = \frac{n_B R T_B}{p_{B,f}} \quad \boxed{1 \text{ point}} \text{ E}$$

Application numérique : $V_{B,f} = 0.0664 \text{ m}^3$. 0.5 point F

b) (2 points)

C'est une transformation isotherme donc d'après le premier principe de la thermodynamique la variation d'énergie interne est nulle ($\Delta T = 0$) donc la chaleur dégagée par le gaz correspond au travail effectué sur le gaz. Pour un gaz parfait, cela correspond à :

$$Q = W = n_B R T_B \ln \left(\frac{V_{B,f}}{V_{B,i}} \right) \quad \boxed{1 \text{ point}} \text{ G} \quad (4)$$

Application numérique : $W = 40 \times 8.3 \times 320 \times \ln(0.1) \simeq -244.6 \text{ kJ}$ 1 point H.

Comme attendu le signe du travail est négatif (travail *fait* sur le gaz).

c) (8.5 points)

Le gaz dans la chambre A ne subit aucune transformation. Il reste dans son état d'équilibre, sa variation d'entropie est donc nulle :

$$\Delta S_A = 0 \quad \boxed{1 \text{ point}} \text{ I} \quad (5)$$

Le gaz dans la chambre B subit une compression isotherme. Etant un gaz idéal, le changement d'entropie peut être calculé comme suit :

$$\Delta S_B = n_B R \ln \left(\frac{V_{B,f}}{V_{B,i}} \right) \quad \boxed{1 \text{ point}} \text{ J.} \quad (6)$$

Application numérique : $\Delta S_B = -0.7645 \text{ kJ/K}$ 1 point K.

Le changement d'entropie de l'univers est la somme du changement d'entropie du gaz dans la chambre B et du changement d'entropie du bloc de glace.

$$\Delta S_{\text{univers}} = \underbrace{\Delta S_A}_{=0} + \Delta S_B + \Delta S_{\text{glace}} \quad \boxed{1 \text{ point}} \text{ L,} \quad (7)$$

avec

$$\Delta S_{\text{glace}} = \int_{T_{\text{glace},i}}^{T_{\text{glace},f}} \frac{\delta Q}{T} = m_{\text{glace}} c_{\text{glace}} \int_{T_{\text{glace},i}}^{T_{\text{glace},f}} \frac{dT}{T} = m_{\text{glace}} c_{\text{glace}} \ln \left(\frac{T_{\text{glace},f}}{T_{\text{glace},i}} \right) \quad \boxed{1 \text{ point}} \text{ M.} \quad (8)$$

La température du bloc de glace augmente car il reçoit toute la chaleur dégagée par le gaz :

$$T_{\text{glace},f} = T_{\text{glace},i} + \frac{Q}{m_{\text{glace}} c_{\text{glace}}} \quad \boxed{1 \text{ point}} \text{ N.} \quad (9)$$

Applications numériques :

$$T_{\text{glace,f}} = 200 + \frac{244.6 \times 10^3}{2 \times 2.44 \times 10^3} \simeq 250 \text{ K} \quad \boxed{0.5 \text{ point}}_O,$$

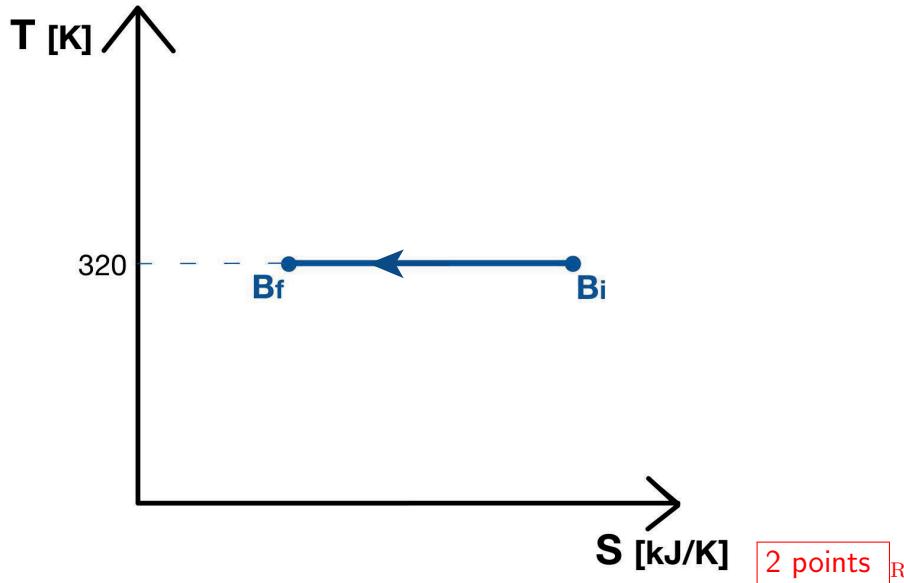
$$\Delta S_{\text{glace}} = 2 \times 2.44 \times 10^3 \ln \left(\frac{250}{200} \right) \simeq 1.09 \times 10^3 \text{ J/K} \quad \boxed{1 \text{ point}}_P,$$

$$\Delta S_{\text{univers}} = 764.5 + 1.09 \times 10^3 \simeq 324.44 \text{ J/K} \quad \boxed{1 \text{ point}}_Q.$$

L'entropie de l'univers augmente comme attendu.

- d) (2 points) Enlever un point si sens de parcours pas indiqué

Le gaz A ne subit aucune transformation. Le gaz B subit une transformation isotherme réversible que l'on peut représenter dans le diagramme $T - S$ comme suit :



- e) (3 points)

D'où partir pour répondre à la question posée ? On nous dit que le gaz est di-atomique donc sa molécule peut avoir 5 ou 7 degrés de liberté. En conséquence la réponse " $\nu_A = 5$ car le gaz est di-atomique" n'est pas valable !

On doit donc estimer $c_{V,A} \equiv \frac{\nu_A}{2} R$.

Lorsque la paroi se brise et que les 2 gaz se mélangent jusqu'à thermalisation, il n'y a pas d'échange de chaleur avec l'extérieur (parois isolantes) et pas de travail effectué (volume total constant). En conséquence, la variation totale d'énergie interne est nulle :

$$\Delta U = 0 \Leftrightarrow \Delta U_A = -\Delta U_B \quad \boxed{1 \text{ point}}_S \quad (10)$$

$$\mathcal{N}_A c_{V,A} (T_f - T_A) = -\mathcal{N}_B c_{V,B} (T_f - T_B) \quad \Rightarrow \quad c_{V,A} = -c_{V,B} \frac{T_f - T_B}{T_f - T_A} \quad \boxed{1 \text{ point}}_T$$

avec les valeurs numériques obtenues au point a) pour les températures, on obtient :

$$c_{V,A} = -c_{V,B} \frac{370 - 320}{370 - 400} = \frac{5}{3} c_{V,B} \quad \boxed{0.5 \text{ point}}_U.$$

Or la valeur de $c_{V,B}$ est connue et non-ambigüe : le gaz B est monoatomique donc $c_{V,B} = \frac{3}{2} R$. Finalement,

$$c_{V,A} = \frac{5}{3} \frac{3}{2} R = \frac{5}{2} R \quad \Rightarrow \quad \nu_A = 5. \quad \boxed{0.5 \text{ point}}_V \quad (11)$$

Exercice 3

(20 points au total)

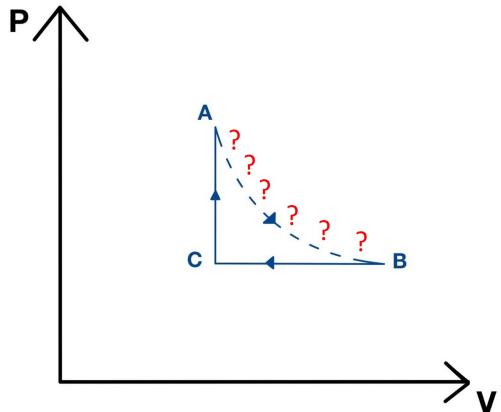
Un gaz idéal mono-atomique subit un cycle moteur constitué d'une expansion adiabatique irréversible d'un état A avec volume $V_A = 1 \text{ m}^3$, pression $p_A = 2 \text{ bar}$ à un état B avec $V_B = 2 \text{ m}^3$, suivi d'une compression isobare réversible jusqu'à un état C et enfin d'une transformation isochore réversible jusqu'à l'état initial

A. Dans les états A , B et C , le gaz est à l'équilibre.

- Représentez le cycle ABCA sur un diagramme $p - V$.
- Lors de l'expansion adiabatique $A \rightarrow B$, la variation d'énergie interne vaut $\Delta U_{AB} = -0.9 \times 10^5 \text{ J}$. Calculez la pression du gaz en C .
- Calculez les chaleurs échangées lors des transformations $B \rightarrow C$ et $C \rightarrow A$ ainsi que le rendement du cycle.
- Calculez le rendement du cycle de Carnot idéal qui échange de la chaleur avec deux sources aux températures extrêmes du cycle ABCA considéré.
- Sur le diagramme du cycle ABCA de la question a), dessinez l'adiabatique réversible $A \rightarrow B'$ subissant le même changement de volume que lors de la transformation $A \rightarrow B$.
- Soit une transformation adiabatique irréversible d'un gaz parfait, à partir d'un état d'équilibre initial avec pression p_{initial} et volume V_{initial} jusqu'à un état d'équilibre final avec pression p_{final} et volume V_{final} . Un résultat tout à fait général est : $p_{\text{final}}V_{\text{final}}^{\gamma} > p_{\text{initial}}V_{\text{initial}}^{\gamma}$ où γ est l'exposant adiabatique. Démontrez cette relation.

Corrigé

- a) (4 points) : 3 points_A + 1 point_B : 1 point par transformation + 1 point pour sens de parcours
Le cycle en question est un cycle moteur donc le sens de parcours est sens horaire. La transformation adiabatique *irréversible* ne peut pas être dessinée avec un trait plein ! Le diagramme est :



- b) (4 points)

Notons tout d'abord que la pression en C est égale à la pression en B car le processus BC est isobare.

$$p_C = p_B. \quad \boxed{0.5 \text{ point}} \text{ C}$$

Le processus $A \rightarrow B$ étant une transformation adiabatique irréversible, il n'est pas possible d'utiliser l'équation $pV^{\gamma} = \text{const.}$ 0.5 point D

Si quelqu'un utilise pV^{γ} mais dit clairement que c'est faux car la transformation n'est pas réversible, il reçoit le 1/2 point D.

On part de la variation de l'énergie interne :

$$\Delta U_{AB} = nc_V(T_B - T_A) \quad \boxed{0.5 \text{ point}} \text{ E.}$$

Avec la loi des gaz parfaits $pV = nRT$ on peut remplacer $T_A = p_A V_A / nR$ et $T_B = p_B V_B / nR$.

Le nombre de moles n'est pas donné dans l'énoncé donc on doit le garder comme une variable 1 point F. En fait comme on le voit ci-après le nombre de moles en jeu et la constante des gaz

parfaits ($c_V = \frac{3}{2}R$ pour gaz mono-atomique) se simplifient systématiquement. Aucune information ne manquait dans l'énoncé !

$$\Delta U_{AB} = nc_V \left(\frac{p_B V_B}{nR} - \frac{p_A V_A}{nR} \right) = \frac{\cancel{nc_V}}{\cancel{nR}} (p_B V_B - p_A V_A) = \frac{\frac{3}{2}R}{R} (p_B V_B - p_A V_A) \quad (12)$$

Ce qui donne :

$$p_B = \frac{\frac{2}{3} \Delta U_{AB} + p_A V_A}{V_B} = p_C. \quad (13)$$

1 point G pour équations (12) ou (13), même si une hypothèse sur la valeur de n a été faite. Dit autrement, quelqu'un qui a supposé un nombre de moles ($n = 1$ par exemple) et fait tout juste, gagne tous les points sauf le point F.

Application numérique :

$$p_B = \frac{\frac{2}{3} \times (-0.9 \times 10^5) + 2 \times 10^5 \times 1}{2} = \frac{(-0.6 + 2) \times 10^5}{2} = 7 \times 10^4 \text{ Pa} = 0.7 \text{ bar} \quad \boxed{0.5 \text{ point}} \text{ H}$$

c) **(4.5 points)**

Pour calculer Q_{BC} on applique le premier principe de la thermodynamique au processus isobare :

$$\begin{aligned} \Delta U_{BC} &= Q_{BC} - W_{BC} \Rightarrow Q_{BC} = \Delta U_{BC} + W_{BC} \\ \Rightarrow Q_{BC} &= nc_V(T_C - T_B) + p_B(V_C - V_B) \quad \boxed{0.5 \text{ point}} \text{ I} \end{aligned}$$

Le 1/2 point I est aussi obtenu si on écrit : $Q_{BC} = nc_p(T_C - T_B)$.

$$\begin{aligned} Q_{BC} &= nc_V \left(\frac{p_C V_C}{nR} - \frac{p_B V_B}{nR} \right) + p_B(V_C - V_B) = p_B(V_C - V_B) \left(\frac{c_V}{R} + 1 \right), \\ \Rightarrow Q_{BC} &= p_B(V_C - V_B) \left(\frac{c_V}{R} + 1 \right) = \frac{5}{2} p_B(V_C - V_B) \quad \boxed{0.5 \text{ point}} \text{ J.} \end{aligned} \quad (14)$$

Remarque : On peut également partir de l'expression $Q_{BC} = nc_p \Delta T$ pour une transformation isobare.

Note pour correction : Si quelqu'un a supposé un nombre de moles ($n = 1$ par exemple) et fait tout juste, il gagne les points I et J

Pour calculer Q_{CA} on utilise à nouveau le premier principe de la thermodynamique sachant que le travail est nul car $V_A = V_C$.

$$\begin{aligned} \Delta U_{CA} &= Q_{CA} \Rightarrow Q_{CA} = nc_V(T_A - T_C) \quad \boxed{0.5 \text{ point}} \text{ K} \Rightarrow Q_{CA} = nc_V \left(\frac{p_A V_A}{nR} - \frac{p_C V_C}{nR} \right), \\ Q_{CA} &= \frac{c_V}{R} V_A (p_A - p_C) = \frac{3}{2} V_A (p_A - p_C) \quad \boxed{0.5 \text{ point}} \text{ L.} \end{aligned} \quad (15)$$

Note pour correction : Si quelqu'un a supposé un nombre de moles ($n = 1$ par exemple) et fait tout juste, il gagne les points K et L

Applications numériques :

$$Q_{BC} = \frac{5}{2} \times 0.7 \times 10^5 \times (1 - 2) = -1.75 \times 10^5 \text{ J} = -175 \text{ kJ} \quad \boxed{0.5 \text{ point}} \text{ M} < 0 \text{ comme attendu.}$$

$$Q_{CA} = \frac{3}{2} \times 1 \times (2 - 0.7) \times 10^5 = 1.95 \times 10^5 \text{ J} = 195 \text{ kJ} \quad \boxed{0.5 \text{ point}} \text{ N} > |Q_{BC}| \text{ car cycle moteur}$$

Etant donné qu'il n'y a pas d'échange de chaleur lors de la transformation $A \rightarrow B$, le rendement du cycle peut alors être calculé en utilisant la chaleur absorbée et la chaleur libérée :

$$\eta = 1 - \frac{|Q_{lib}|}{Q_{abs}} = 1 - \frac{|Q_{BC}|}{Q_{CA}} \quad \boxed{1 \text{ point}} \text{ O} = 0.102 \quad \boxed{0.5 \text{ point}} \text{ P} \quad (16)$$

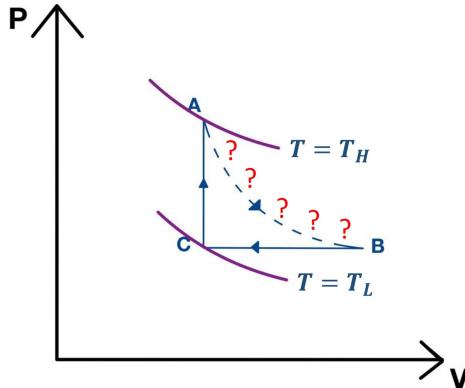
d) (3 points)

Le rendement d'un cycle de Carnot ideal est défini comme :

$$\eta = 1 - \frac{T_L}{T_H} \quad \boxed{0.5 \text{ point}}_Q, \quad (17)$$

où T_L et T_H sont les températures plus basse et plus élevée du cycle, respectivement.

Dans notre cas les deux températures extrêmes sont T_A et T_C comme on peut le voir sur la figure où sont indiquées les isothermes :



Encore une fois, nous utilisons la loi des gaz parfaits pour obtenir :

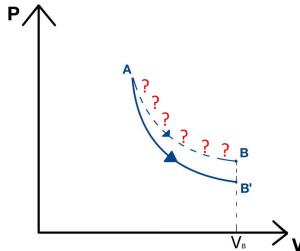
$$\eta = 1 - \frac{T_C}{T_A} \quad \boxed{1 \text{ point}}_R = 1 - \frac{p_C V_C}{p_A V_A} = 1 - \frac{p_C}{p_A} \quad \boxed{1 \text{ point}}_S = 0.65 \quad \boxed{0.5 \text{ point}}_T \quad (18)$$

e) (2 points) : 2 points si complètement juste, zero sinon. On ne demandait pas de justification.

Pour une transformation adiabatique réversible $pV^\gamma = \text{const.}$ ce qui donne :

$$p_A V_A^\gamma = p_{B'} V_{B'}^\gamma \Rightarrow p_{B'} = p_A \left(\frac{V_A}{V_{B'}} \right)^\gamma = p_A \left(\frac{V_A}{V_B} \right)^\gamma = p_A \left(\frac{1}{2} \right)^\gamma < p_B$$

Le diagramme est :



f) (2.5 points)

Pour démontrer que la quantité pV^γ dans le cas d'un processus adiabatique irréversible ne peut qu'augmenter, contrairement au cas réversible où elle reste constante, on part de la définition de l'entropie et on utilise le deuxième principe de la thermodynamique sur une transformation réversible :

$$dS = \frac{\delta Q}{T} = nc_V \frac{dT}{T} + p \frac{dV}{T} \quad \boxed{0.5 \text{ point}}_V$$

Maintenant nous intégrons dS pour trouver la différence d'entropie entre deux états génériques 1 et 2, et on utilise la loi des gaz parfaits $pV = nRT$, et $c_p = c_V + R = \frac{3}{2}R + R = \frac{5}{2}R$, et $\gamma = \frac{c_p}{c_V} = \frac{\frac{5}{2}R}{\frac{5}{2}R} = \frac{5}{3}$:

$$\int_1^2 dS = \int_1^2 nc_V \frac{dT}{T} + \int_1^2 nR \frac{dV}{V} \quad \boxed{0.5 \text{ point}}_W \Rightarrow \Delta S_{12} = nc_V \ln \frac{T_2}{T_1} + nR \ln \frac{V_2}{V_1} = nc_V \ln \frac{p_2 V_2}{p_1 V_1} + nR \ln \frac{V_2}{V_1},$$

$$\Rightarrow \Delta S_{12} = nc_V \ln \frac{p_2}{p_1} + nc_V \ln \frac{V_2}{V_1} + nR \ln \frac{V_2}{V_1} = nc_V \ln \frac{p_2}{p_1} + n(c_V + R) \ln \frac{V_2}{V_1} \quad \boxed{0.5 \text{ point}}_x.$$

De là, on obtient :

$$\frac{\Delta S_{12}}{nc_V} = \ln \frac{p_2}{p_1} + \frac{c_p}{c_V} \ln \frac{V_2}{V_1} = \ln \frac{p_2}{p_1} + \ln \left(\frac{V_2}{V_1} \right)^{\frac{c_p}{c_V}} = \ln \left(\frac{p_2 V_2^\gamma}{p_1 V_1^\gamma} \right).$$

Or nous savons que lors d'une transformation irréversible, l'entropie de l'univers augmente, donc :

$$\Delta S_{\text{univers}} = \Delta S_{12} > 0 \quad \boxed{0.5 \text{ point}}_y \Rightarrow \ln \left(\frac{p_2 V_2^\gamma}{p_1 V_1^\gamma} \right) > 0 \quad (19)$$

$$\Rightarrow \ln(p_2 V_2^\gamma) > \ln(p_1 V_1^\gamma) \Rightarrow p_2 V_2^\gamma > p_1 V_1^\gamma \quad \boxed{0.5 \text{ point}}_z. \quad (20)$$

Dans le cas réversible $\Delta S_{12} = 0$ et donc $p_2 V_2^\gamma = p_1 V_1^\gamma = \text{const.}$

Exercice 4

(20 points au total)

Ivo part en voyage vers une planète lointaine possédant une atmosphère et un grand océan qui ne sont pas à l'équilibre thermique entre eux. Au cours de sa phase d'approche, la fusée traverse l'atmosphère et se chauffe jusqu'à la température $T_{\text{fusée}}$. L'atmosphère, considérée comme un gaz parfait isotherme, est constituée d'azote (masse d'une molécule d'azote $m_a = 5.34 \times 10^{-26}$ kg) à la température de 80°C et à la pression de 1 bar, à la surface de la planète. L'océan est constitué d'eau.

Pour mesurer la température de l'eau de l'océan, T_{ocean} , Ivo fait l'expérience suivante, à la surface de la planète : une barre de métal de la fusée (longueur $L = 1$ m, masse $m = 4$ kg) est plongée dans un bain de 20 kg d'eau de l'océan. La chaleur est uniquement échangée entre la barre de métal et l'eau de ce bain jusqu'à ce que l'équilibre thermique entre les deux soit atteint. A ce moment-là, Ivo constate que 1 kg d'eau a été évaporé et la barre de métal s'est rétrécie de $\Delta L = 1.6$ cm.

- Calculez T_{ocean} et $T_{\text{fusée}}$.
- En considérant la barre de métal comme un corps noir, représentez graphiquement de manière qualitative son émittance spectrale ϵ_λ en fonction de la longueur d'onde λ avant sa plongée dans l'eau du bain et après sa thermalisation avec l'eau du bain. Justifiez l'allure des courbes.
- En sachant que, sur cette planète, l'eau bout à 300 K à 2700 m d'altitude, calculez l'accélération de gravité a de la planète.

Indications : Chaleur spécifique du métal $c_{\text{metal}} = 0.7$ kJ/kg/K ; chaleur spécifique de l'eau $c_{\text{eau}} = 4.186$ kJ/kg/K ; coefficient de dilatation thermique linéaire de la barre de métal $\alpha = 8 \times 10^{-6} \text{ K}^{-1}$; chaleur latente de vaporisation de l'eau $L_v = 2.2 \times 10^6$ J/kg ; constante des gaz parfaits $R = 8.314$ J/K/mol ; masse molaire de l'eau $M = 18$ g/mol ; constante de Boltzmann $k_B = 1.3810^{-23}$ J/K.

Faites l'approximation qu'à 100°C la pression de vapeur d'eau vaut 1 bar.

On rappelle que $\frac{dp}{dz} = -\rho(z)a$ où p est la pression atmosphérique, z est la coordonnée relative à l'altitude, $\rho(z)$ est la densité de l'atmosphère et a est l'accélération de gravité de la planète.

Corrigé

- a) (9 points)

On utilise l'équation sur la dilatation thermique pour trouver la température initiale de la barre de métal, c'est-à-dire la température de la fusée $T_{\text{fusée}}$,

$$\alpha(T_{\text{fusée}} - T_f) = \frac{\Delta L}{L} \quad \boxed{1 \text{ point}}_A \quad \Rightarrow T_{\text{fusée}} = \frac{\Delta L}{\alpha L} + T_f.$$

où T_f est la température finale de la barre de métal. Or la température finale est égale à la température d'équilibre entre la barre, l'eau et la vapeur et puisque il y a un équilibre thermique entre l'eau et la vapeur à la pression $p_0 = 1$ bar (à la surface de la planète), on a $T_f = 100^\circ\text{C}$ 1 point_B.

Application numérique :

$$T_{\text{fusée}} = \frac{0.016}{8 \times 10^{-6}} + 100 = 2100^\circ\text{C} \quad \boxed{1 \text{ point}}_C. \quad (21)$$

Pour calculer la température de l'eau avant de plonger la barre, c'est-à-dire la température de l'océan T_{ocean} , on utilise $Q_{\text{tot}} = \sum Q = 0$. On obtient

$$m_m c_m (T_{\text{fusée}} - T_f) = m_e c_e (T_f - T_{\text{ocean}}) + m_v L_v \quad \boxed{4 \text{ points}}_D, \quad (22)$$

où m_m , m_e et m_v sont les masses de la barre, de l'eau et de la vapeur, respectivement. On peut donc calculer T_{ocean} de l'équation (22),

$$T_{\text{ocean}} = T_f + \frac{m_v L_v - m_m c_m (T_{\text{fusée}} - T_f)}{m_e c_e} = T_f + \frac{m_v L_v - m_m c_m \frac{\Delta L}{\alpha L}}{m_e c_e} \quad \boxed{1 \text{ point}}_E. \quad (23)$$

Application numérique :

$$T_{\text{ocean}} = 100 + \frac{2.2 \times 10^3 - 4 \times 0.7 \times \frac{0.016}{8 \times 10^{-6}}}{20 \times 4.186} \simeq 59.4^\circ\text{C} \quad \boxed{1 \text{ point}}_F \quad (24)$$

- b) (4 points) 1 point _G pour allure des courbes + 1 point _H pour décalage correct + 1 point _I pour réduction de l'emittance.

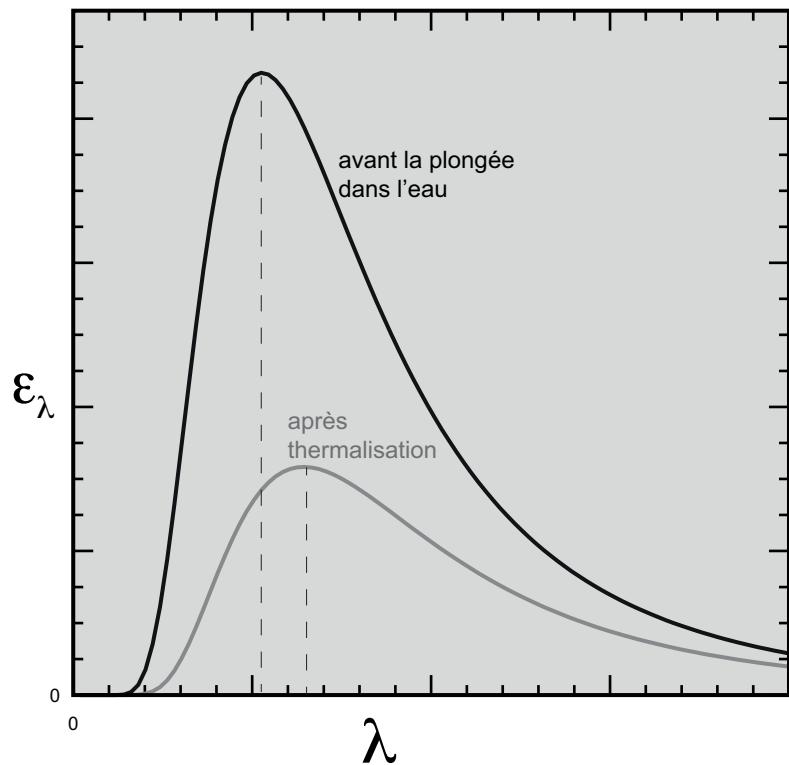
Les courbes demandées sont données sur la figure ci-après. On peut justifier l'allure ainsi :

— 1 point _J Un corps noir émet selon la loi de Planck.

ou

— 1 point _K Selon la loi de Wien, la longueur d'onde correspondant à l'émission maximale par rayonnement d'un corps augmente si la température diminue, $\lambda_{\max}T = \text{const.}$ L'emittance est réduite lorsque la température du corps est plus faible : $E \propto T^4$.

Emittance spectrale de la barre de métal



- c) (7 points) L'ébullition correspond à la condition de pression de vapeur égale à la pression ambiante 1 point _L. Pour déterminer l'accélération de gravité a de la planète, on utilise la loi de Pascal,

$$\frac{dp}{dz} = -\rho(z)a,$$

où p est la pression de l'atmosphère, z est la coordonnée relative à l'altitude, $\rho(z)$ est la densité de l'azote et a est l'accélération de gravité de la planète, et la loi de Clausius-Clapeyron,

$$\frac{dp}{dT} = \frac{mL_v}{(V_v - V_e)T} \quad \boxed{1 \text{ point}} \text{ M} \approx \frac{mL_v}{V_v T},$$

où on néglige V_e par rapport à V_v parce que $V_e \ll V_v$.

On intègre l'équation de Pascal en considérant la température constante et on obtient (calcul fait dans le cours)

$$p_f = p_0 \exp \left(-\frac{m_a h}{k_B T_0} a \right) \quad \boxed{1 \text{ point}} \text{ N}, \quad (25)$$

où $p_0 = 1$ bar est la pression à la surface de la planète et $T_0 = 80$ °C est la température de l'atmosphère.

En intégrant l'équation de Clausius-Clapeyron, on obtient (calcul fait dans le cours)

$$p_f = p_0 \exp \left[\frac{ML_v}{R} \left(\frac{1}{T_i} - \frac{1}{T_f} \right) \right] \quad \boxed{1 \text{ point}} \text{ O}, \quad (26)$$

où $T_i = 373$ K est la température d'ébullition de l'eau à la pression $p_0 = 1$ bar et $T_f = 300$ K est la température d'ébullition de l'eau à la pression p_f 1 point_P.

L'accélération de gravité a peut être obtenu des équations (25) et (26),

$$a = \frac{k_B T_0 M_L}{m_a h R} \left(\frac{1}{T_i} - \frac{1}{T_f} \right) \quad \boxed{1 \text{ point}}_{\text{Q}}. \quad (27)$$

Application numérique :

$$a = \frac{1.38 \times 10^{-23} \times 353 \times 40 \times 10^3}{4.8 \times 10^{-26} \times 2700 \times 8.314} \left(\frac{1}{300} - \frac{1}{373} \right) \simeq 118 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \quad \boxed{1 \text{ point}}_{\text{R}}. \quad (28)$$

Exercice 5

(20 points au total)

Un câble cylindrique en cuivre de section circulaire de rayon R et de longueur L est parcouru par un courant électrique I . Le câble est chauffé par effet Joule et sa conductivité thermique est notée κ_c . On suppose que le câble est thermiquement isolé par une gaine en plastique d'épaisseur Δ et de conductivité thermique κ_p . L'épaisseur Δ n'est pas négligeable par rapport à R . La température à la surface du câble vaut T_0 et la température à la surface externe de la gaine en plastique vaut T_1 . On suppose que le transfert de chaleur se fait en régime stationnaire et uniquement par conduction dans la direction radiale. On néglige les transferts de chaleur aux extrémités du câble. On décrit la direction radiale par la coordonnée $r \geq 0$ associée à un repère cylindrique centré sur l'axe du câble.

- Montrez que le flux de chaleur radial $J(r)$ dans la gaine en plastique est donné par l'équation différentielle $\frac{d}{dr}(rJ(r)) = 0$.
- Calculez l'expression de la température $T(r)$ dans la gaine en plastique en fonction de T_0 , T_1 , R , Δ .
- Calculez l'expression du flux de chaleur $J(r)$ dans la gaine en plastique en fonction de T_0 , T_1 , R , Δ et κ_p .
- Calculez l'expression du courant I en supposant qu'il est uniformément distribué dans le câble en cuivre en fonction de T_0 , T_1 , R , Δ , κ_p et ρ_c .

Indications : La puissance par unité de volume produite par effet Joule dans le câble en cuivre est donnée par $P = \rho_c j^2$, où ρ_c est la résistivité du cuivre et j la densité de courant.

Corrigé

a) (7 points)

On considère un régime stationnaire 1 point A. Dans ce régime et comme il n'y a pas de courant (et donc pas d'effet Joule) dans la gaine en plastique 1 point B, il y a la conservation de

$$\frac{\delta Q}{dt} = S(r)J(r) = \text{const.}, \quad \boxed{1 \text{ point}} \text{ C} \quad (29)$$

où $S(r)$ est la surface en r .

Méthode I : Comme $\delta Q/dt$ est une quantité conservée dans la gaine et est égale à la puissance totale passant à travers la gaine en plastique, le flux de chaleur $J(r)$ est donné par l'Eq. (29), avec $S(r) = 2\pi rL$ 1 point D, c'est-à-dire

$$J(r) = \left(\frac{\delta Q}{dt} \right) \frac{1}{2\pi rL} \quad (30)$$

On peut donc écrire que

$$rJ(r) = \left(\frac{\delta Q}{dt} \right) \frac{1}{2\pi L}, \quad \boxed{1 \text{ point}} \text{ E} \quad (31)$$

En évaluant la dérivée par rapport à r de l'Eq. (31) et en utilisant l'Eq. (29), on obtient

$$\frac{d}{dr}(rJ(r)) = \frac{1}{2\pi L} \frac{d}{dr} \left[\left(\frac{\delta Q}{dt} \right) \right] = 0, \quad \boxed{2 \text{ points}} \text{ F} \quad (32)$$

Méthode II : La conservation de $S(r)J(r)$ s'écrit entre r et r' (avec $r, r' \in [R, R + \Delta]$)

$$S(r)J(r) = S(r')J(r').$$

Or comme $S(r) = 2\pi rL$, l'équation précédente devient

$$2\pi LrJ(r) - 2\pi Lr'J(r') = 0 \quad [1 \text{ point}]_G.$$

En posant $r' \equiv r + dr$, on obtient

$$rJ(r) - (r + dr)J(r + dr) = r[J(r) - J(r + dr)] - drJ(r + dr) = 0.$$

Pour faire apparaître la dérivée, on utilise l'approximation suivante :

$$\frac{\partial}{\partial r}J(r) \simeq \frac{J(r + dr) - J(r)}{dr} \Rightarrow J(r) - J(r + dr) \simeq -dr\frac{\partial}{\partial r}J(r), \quad [1 \text{ point}]_H,$$

On obtient

$$r \left[-dr\frac{\partial}{\partial r}J(r) \right] - drJ(r + dr) = -dr \left[r\frac{\partial}{\partial r}J(r) + J(r) \right] 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial r}(rJ(r)) = 0 \quad [2 \text{ points}]_I. \quad (33)$$

a bis) (8 points)

En partant de l'équation de la chaleur en coordonnée cylindrique,

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} \left(r\frac{\partial}{\partial r}T(r) \right) + \frac{\varpi}{\kappa_p} = \frac{\rho c_V}{\kappa_p}\frac{\partial}{\partial t}T. \quad [2 \text{ points}]_J \quad [1 \text{ point}]_K \quad (34)$$

En régime stationnaire $\frac{\partial}{\partial t}T = 0$ et en l'absence de courant dans le câble en plastique, $\varpi = 0$, on obtient avec $J = -\kappa_p\frac{\partial}{\partial r}T$,

$$\frac{d}{dr}(rJ(r)) = 0. \quad [1 \text{ point}]_Q \quad (35)$$

b) (7 points)

Le flux de chaleur s'exprime par la loi de Fourier,

$$J_p(r) = -\kappa_p\frac{\partial}{\partial r}T(r). \quad [1 \text{ point}]_R \quad (36)$$

La température est donnée par

$$\frac{\partial}{\partial r}(rJ(r)) = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial r} \left(-\kappa_p r\frac{\partial}{\partial r}T(r) \right) = 0 \quad [1 \text{ point}]_S, \quad (37)$$

avec $r \in [R, R + \Delta]$. Pour trouver $T(r)$, il faut résoudre l'équation différentielle 45. Par intégration par rapport à r , on trouve

$$r\frac{\partial}{\partial r}T(r) = C \quad [0.5 \text{ point}]_T, \quad (38)$$

où C est une constante d'intégration à déterminer. Une seconde intégration par rapport à r donne

$$\begin{aligned} T(r) &= \int^r dr' \frac{C}{r'} + D \\ &= C \ln r + D \end{aligned} \quad (39)$$

où D est une deuxième constante d'intégration. Les constantes C et D sont à déterminer. Pour cela, il faut utiliser les conditions au bord telles que $T(R) = T_0$ et $T(R + \Delta) = T_1$. On obtient un système de deux équations,

$$T_0 = C \ln R + D, \quad (40a)$$

$$T_1 = C \ln (R + \Delta) + D. \quad (40b)$$

On peut écrire

$$(T_0 - T_1) = C \ln \left(\frac{R}{R + \Delta} \right) \Rightarrow C = \frac{(T_0 - T_1)}{\ln \left(\frac{R}{R + \Delta} \right)} \quad (41)$$

En injectant C dans 48a, on peut en déduire D telle que

$$D = T_0 - C \ln R \quad (42)$$

La température $T(r)$ dans la gaine est donc donné par la fonction

$$\begin{aligned} T(r) &= \frac{(T_0 - T_1)}{\ln \left(\frac{R}{R + \Delta} \right)} \ln r + T_0 - \frac{\ln R (T_0 - T_1)}{\ln \left(\frac{R}{R + \Delta} \right)} \\ T(r) &= (T_0 - T_1) \frac{\ln \left(\frac{r}{R} \right)}{\ln \left(\frac{R}{R + \Delta} \right)} + T_0. \end{aligned} \quad (43)$$

On peut vérifier que $T(R) = T_0$ et que $T(R + \Delta) = T_1$.

b bis) (6 points)

Le flux de chaleur s'exprime par la loi de Fourier,

$$J_p(r) = -\kappa_p \frac{\partial}{\partial r} T(r). \quad (44)$$

La température est donnée par

$$\frac{\partial}{\partial r} (r J(r)) = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial r} \left(-\kappa_p r \frac{\partial}{\partial r} T(r) \right) = 0 \quad (45)$$

avec $r \in [R, R + \Delta]$. Pour trouver $T(r)$, il faut résoudre l'équation différentielle 45. Par intégration par rapport à r , on trouve

$$r \frac{\partial}{\partial r} T(r) = C \quad (46)$$

où C est une constante d'intégration à déterminer. Une seconde intégration par rapport à r donne

$$\begin{aligned} T(r) &= \int^r dr' \frac{C}{r'} + D \\ &= C \ln r + D \end{aligned} \quad \boxed{0.5 \text{ point}}_C, \quad (47)$$

où D est une deuxième constante d'intégration. Les constantes C et D sont à déterminer. Pour cela, il faut utiliser les conditions au bord telles que $T(R) = T_0$ et $T(R + \Delta) = T_1$. On obtient un système de deux équations,

$$T_0 = C \ln R + D, \quad (48a)$$

$$T_1 = C \ln (R + \Delta) + D. \quad \boxed{1 \text{ point}}_D \quad (48b)$$

On peut écrire

$$(T_0 - T_1) = C \ln \left(\frac{R}{R + \Delta} \right) \Rightarrow C = \frac{(T_0 - T_1)}{\ln \left(\frac{R}{R + \Delta} \right)} \quad \boxed{1 \text{ point}}_E. \quad (49)$$

En injectant C dans 48a, on peut en déduire D telle que

$$D = T_0 - C \ln R \quad \boxed{1 \text{ point}}_F. \quad (50)$$

La température $T(r)$ dans la gaine est donc donné par la fonction

$$\begin{aligned} T(r) &= \frac{(T_0 - T_1)}{\ln \left(\frac{R}{R + \Delta} \right)} \ln r + T_0 - \frac{\ln R (T_0 - T_1)}{\ln \left(\frac{R}{R + \Delta} \right)} \\ T(r) &= (T_0 - T_1) \frac{\ln \left(\frac{r}{R} \right)}{\ln \left(\frac{R}{R + \Delta} \right)} + T_0. \end{aligned} \quad \boxed{1 \text{ point}}_G \quad (51)$$

On peut vérifier que $T(R) = T_0$ et que $T(R + \Delta) = T_1$.

c) **(2 points)**

Le flux de chaleur $J_p(r)$ dans la gaine en plastique est donné par la loi de Fourier exprimée en coordonnée cylindrique,

$$J_p(r) = -\kappa_p \frac{\partial}{\partial r} T(r).$$

En utilisant Eq. (51), on déduit

$$J_p(r) = -\kappa_p \frac{C}{r} = -\kappa_p \frac{(T_0 - T_1)}{\ln \left(\frac{R}{R + \Delta} \right)} \frac{1}{r} \quad \boxed{2 \text{ points}}_H. \quad (52)$$

d) **(4 points)**

En régime stationnaire, la puissance totale, P_{tot} , générée par effet Joule dans le volume du câble de cuivre doit être égale à la totale puissance qui traverse le câble en $r = R$, c'est-à-dire P_{out} . La puissance totale P_{tot} , générée par effet Joule, est donnée par

$$P_{tot} = PV_c = PL\pi R^2 \quad \boxed{1 \text{ point}}_I \quad (53)$$

avec $P = \rho_c j^2$, la puissance volumique associée à l'effet Joule, et $V_c = L\pi R^2$ le volume du câble du cuivre. j est la densité de courant dans le câble de cuivre. Comme I est uniformément distribué dans le câble de cuivre, la densité de courant j peut s'écrire

$$j = \frac{I}{\pi R^2} \quad \boxed{1 \text{ point}}_J, \quad (54)$$

on trouve que

$$P_{tot} = \rho_c j^2 L\pi R^2 = \rho_c \left(\frac{I}{\pi R^2} \right)^2 L\pi R^2 = \frac{L\rho_c I^2}{\pi R^2} \quad (55)$$

La puissance qui traverse dans le câble en $r = R$ s'écrit comme

$$P_{out} = SJ_p(R), \quad (56)$$

avec $S = 2\pi RL$ la surface externe du câble de cuivre. Le flux de chaleur $J_p(R)$ peut s'exprimer par la loi de Fourier

$$J_p(R) = -\kappa_p \frac{\partial}{\partial r} T(R) = -\kappa_p \frac{C}{R}, \quad (57)$$

où on a utilisé Eq. (47). Ainsi, la puissance totale qui sort du câble de cuivre en $r = R$ est

$$P_{out} = 2\pi RL\kappa_p \frac{|C|}{R} = 2\pi L\kappa_p |C|. \quad (58)$$

En égalisant les 2 puissances : $P_{out} = P_{tot} \boxed{1 \text{ point}}_K$, on tire l'expression pour I :

$$\begin{aligned} \frac{L\rho_c I^2}{\pi R^2} &= 2\pi L\kappa_p |C| \\ \Rightarrow I &= \sqrt{\frac{2\pi^2 \kappa_p |C| R^2}{\rho_c}} = \sqrt{\frac{2\pi^2 \kappa_p R^2}{\rho_c}} \sqrt{\left| \frac{(T_0 - T_1)}{\ln \left(\frac{R}{R+\Delta} \right)} \right|} \boxed{1 \text{ point}}_L \end{aligned} \quad (59)$$