ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE | SWISS PLASMA CENTER

Physique Générale II SV
Prof. Fasoli

Examen (24 juin 2016)

Exercice 1 (20 points)

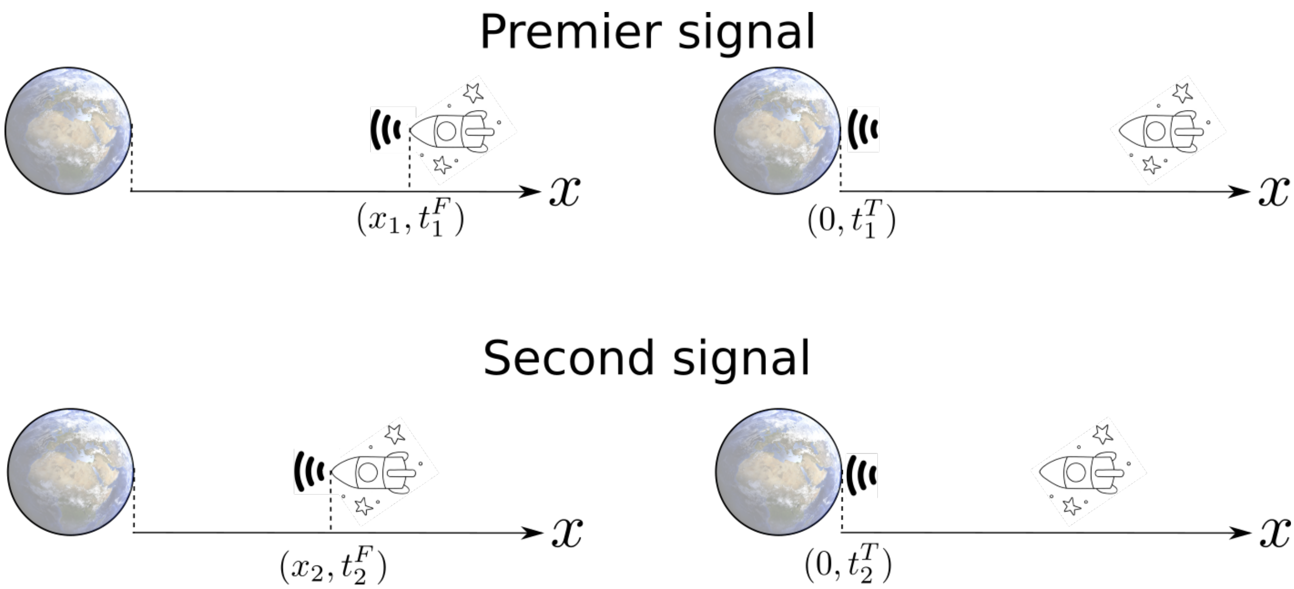
Une fusée s'approche de la Terre avec une vitesse inconnue. Le capitaine de la fusée communique à la base terrestre le temps qui lui reste pour arriver sur terre, à partir du moment où le message même est envoyé. Dans un premier message il dit que le temps qui reste est de 2h, dans le deuxième de 1h45'. Le premier message est reçu sur terre à 15h00, et le deuxième à 15h02.

a) Quelle est la vitesse de la fusée ?

b) A quelle heure exacte la fusée arrivera sur Terre ?

c) Pendant son trajet vers la Terre, la fusée reçoit l'ordre de lancer un missile pour détruire un vaisseau extraterrestre qui s'approche de la Terre. Dans le référentiel de la Terre, le missile doit être lancé perpendiculairement par rapport à la trajectoire de la fusée, avec un vitesse de $0.6\,c$. Avec quel angle par rapport à la trajectoire de la fusée le missile est lancé dans le référentiel de la fusée ?

Corrigé



Nous commençons avec la définition du référentiel par rapport à la Terre S, et le référentiel par rapport à la fusée S'.

a) **6 points** Les équations qui lient le temps d'envoi des signales par le capitaine de la fusée, dans le référentiel de la Terre (t_1^F, t_2^F), sont :

$$\begin{cases} t_1^T = t_1^F + \frac{x_1}{c} \\ t_2^T = t_2^F + \frac{x_2}{c} \end{cases} \tag{1}$$

Avec la différence des deux équations, nous obtenons :

$$\Delta t^T = \Delta t^F - \frac{\Delta x}{c} = \Delta t^F - \frac{v \Delta t^F}{c} = \Delta t^F \left(1 - \frac{v}{c}\right) = \Delta t^{F'} \gamma \left(1 - \frac{v}{c}\right) \tag{2}$$

avec $\Delta t^T = t_2^T - t_1^T = 2min$, $\Delta t^F = t_2^F - t_1^F$, $\Delta x / c = (x_1 - x_2)/c$ et $\Delta t^{F'} = 15min$.

$$\Rightarrow \underbrace{\left(\frac{\Delta t^T}{\Delta t^{F'}}\right)^2}_{\Delta} = \frac{\left(1 - \frac{v}{c}\right)^2}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)} = \frac{\left(1 - \frac{v}{c}\right)}{\left(1 + \frac{v}{c}\right)}$$

Une autre façon de réfléchir est la suivant. Les premières deux messages nous indiquent que après un intervalle de temps $\Delta t^{F'} = 15min$ dans le référentiel de la fusée, qui correspond à $\Delta t^{F} = \Delta t^{F'}\gamma$ dans le référentiel de la Terre, la fusée a cumule un retard spatial ΔX par rapport à la lumière, qui est parcouru dans 2 minutes par la lumière mémé ($\Delta X = c \underbrace{\Delta t^{T}}_{=2\,min}$). Ce retard spatial peut être exprimé comme $\Delta X = \Delta x^{c} - \Delta x^{F} = c\Delta t^{F} - v\Delta t^{F}$. On trouve donc :

$$c\Delta t^{T} = c\Delta t^{F} - v\Delta t^{F} = (c-v)\Delta t^{F} = (c-v)\Delta t^{F'}\gamma\,, \tag{3}$$

qui correspond a l'équation 2.

$$\Rightarrow \quad \frac{v}{c} = \frac{1-\Delta}{1+\Delta}. \simeq 0.965. \tag{4}$$

Application numérique :

$$\Delta = \left(\frac{120}{900}\right)^{2} = 0.0178 \quad \Rightarrow \quad \frac{v}{c} = \frac{1-0.0178}{1+0.0178} = 0.965 \quad \Rightarrow \quad v = 0.965\,c.$$

b) **6 points** Nous pouvons réfléchir de façon itérative. Si la fusée se déplace avec une vitesse constante, la base terrestre doit recevoir un message à 15h14, ou le capitaine de la fusée dit que le temps qui reste est de 15 minutes. Donc à 15h16 le message reçu dit que le temps qui reste est de 0 minutes, qui signifie que la fusée est juste arrivée sur la Terre. Dans ce dernier cas, le message est envoyé et reçu au même temps.

Une autre façons d'analyser le problème est la suivante. Quand la fusée envoie le deuxième message, elle est temporellement plus proche à la Terre de 15 minutes dans son référentiel. Au même temps, le première message qui se propage avec une vitesse c, il s'est éloigne de 2 minutes par rapport à la fusée. Quand la fusée aura complété la distance temporelle de 2h jusq'à la Terre, elle aura cumule une distance temporelle de $\Delta T_{tot} = 2min \times (2h/15min) = 960s$ derrière le première message. Donc il arrive à $t_{\text{arrivée}} = 15h + 960s = 15h16$.

Nous pouvons résoudre ce problème de façon rigoureuse à partir du résultat de la question a). Par rapport au premier message, le temps qui reste avant l'arrivée de la fusée (ΔT^{F}) dans le référentiel de la Terre peut être écrit comme $\Delta T^{F} = \Delta T^{F'}\gamma$, avec $\Delta T^{F'} = 2$h. L'horaire de l'arrivée su la Terre est donnée par :

$$t_{\text{arrivée}} = t_1^{F} + \Delta T^{F} = t_1^{T} - \frac{\Delta T^{F} v}{c} + \Delta T^{F} = t_1^{T} + \Delta T^{F'}\gamma\left(1 - \frac{v}{c}\right) = t_1^{T} + \Delta T^{F'}\sqrt{\frac{\left(1-v/c\right)}{\left(1+v/c\right)}} \tag{5}$$

ou nous avons utilisée le fait que :

$$t_1^{T} - t_1^{F} = \frac{x_1}{c} = \frac{\Delta T^{F} v}{c} \tag{6}$$

En utilisant l'eq (4), nous trouvons :

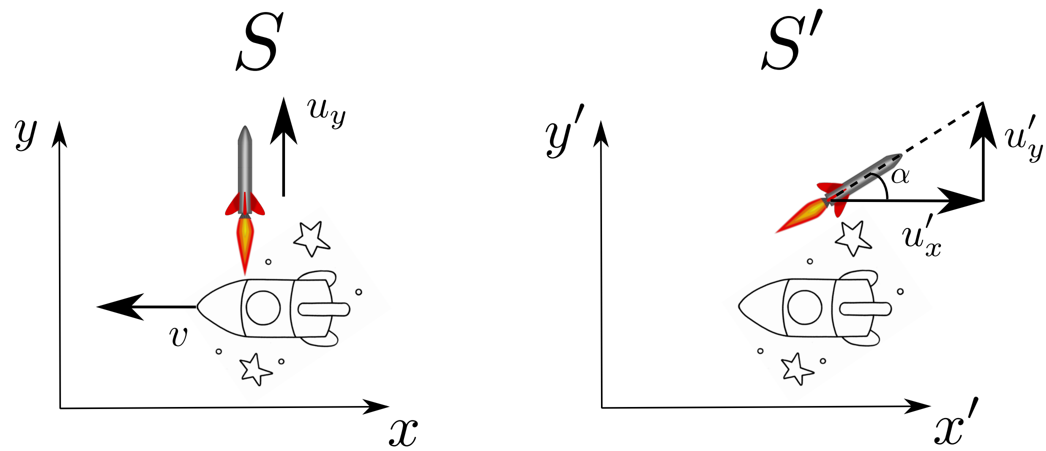
$$t_{\text{arrivée}} = t_1^{T} + \Delta T^{F'}\left(\frac{\Delta t^{T}}{\Delta t^{F'}}\right) \tag{7}$$

Application numérique :

$$t_{\text{arrivée}} = 15h + 2h \times \frac{2min}{15min} = 15h + 960s = 15h16$$

c) **8 points** En sachant que la vitesse du missile doit être $u_y = 0.6c$ dans le référentiel de la Terre, les composantes de la vitesse du missile dans le référentiel de la fusée peuvent être calculées avec les transformations inverse de Lorentz :

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1-(u_x v)/c^2} \underbrace{=}_{u_x=0} -v \qquad u'_y = \frac{u_y}{\gamma\left[1-(u_x v)/c^2\right]} \underbrace{=}_{u_x=0} \frac{u_y}{\gamma} \tag{8}$$



L'angle avec lequel le missile doit être lance dans le référentiel de la fusée est :

$$\alpha = \arctan\left(\frac{u'_y}{u'_x}\right) = \arctan\left(\frac{u_y}{\gamma v}\right) \tag{9}$$

Application numérique :

$$\alpha \simeq \arctan\left(\frac{0.6c}{3.81 \times 0.965c}\right) \simeq 0.16\,\text{rad} \simeq 9^\circ$$

Exercice 2 (20 points)

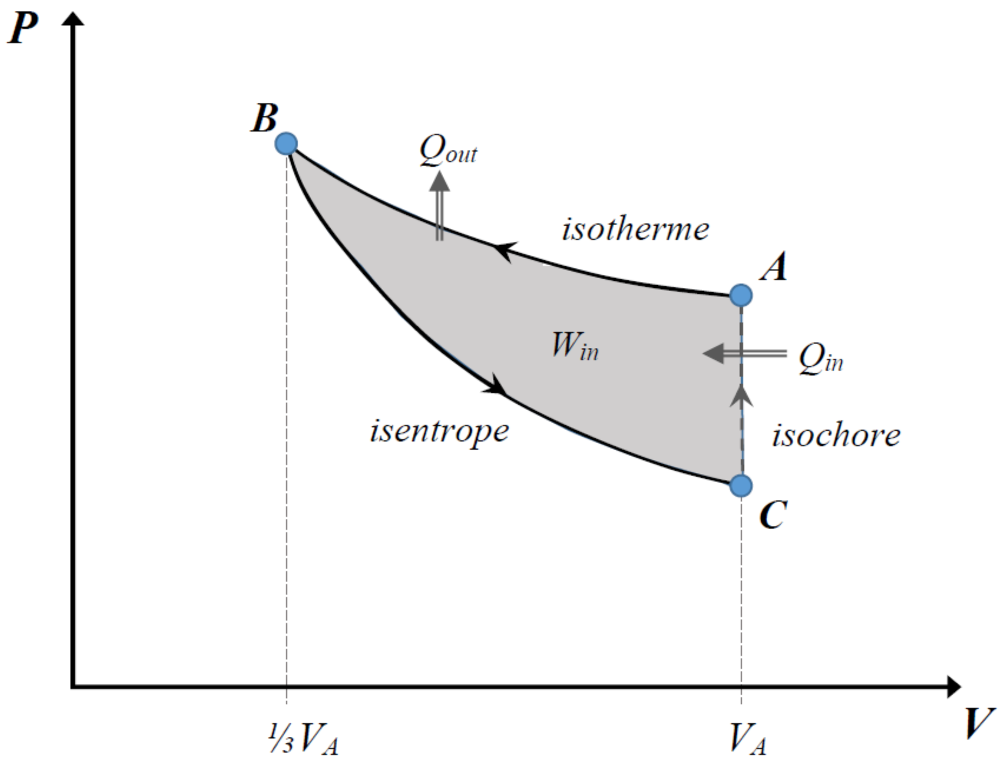
Un cylindre avec piston contient 3 moles de gaz idéal diatomique. Le cylindre est à l'équilibre thermique avec 100 litres d'eau à $T_A = 100\,°\text{C}$. Le gaz est comprimé de façon réversible à température constante, en restant en contact avec l'eau, jusqu'à un volume de $V_B = V_A/3$. Ensuite, une transformation adiabatique réversible ramène le gaz au volume initial V_A. Enfin, la température du gaz est ramenée à T_A en remettant le cylindre en contact avec l'eau, et en maintenant le volume constant.

a) Dessiner le cycle sur un diagramme $p - V$.
b) Calculer le travail nécessaire pour effectuer un cycle complet.
c) Combien de cycles sont-ils nécessaires pour faire évaporer 1 litre d'eau du réservoir ?
d) Quelle est la variation d'entropie du gaz et de l'eau dans la transformation isochore ?
e) Quelle est l'énergie inutilisable sur un cycle pour fournir du travail ?

Indications : Constante des gaz parfaits $R = 8.314\,\text{J}\,\text{mol}^{-1}\,\text{K}^{-1}$. Chaleur latente de vaporisation $L_v = 2250\,\text{kJ}\,\text{kg}^{-1}$.

Corrigé

a) **4 points** Diagramme $p - V$



Notez que la transformation $C \to A$ est irréversible, donc on ne peut pas l'indiquer directement dans un diagramme p-V, comme on est pas continuellement dans un état de quasi-équilibre défini par les deux variables d'état. L'indication des chaleurs et types de transformations n'est pas obligatoire, mais très utile pour le reste.
Le sens du parcours du cycle nous indique qu'il s'agit d'un réfrégirateur.
Le gaz est diatomique donc $\nu = 5$ et donc $\gamma = \frac{\nu+2}{\nu} = \frac{7}{5}$.

b) **5 points** Le travail effectué *par* ou *sur* le gaz au cours du cylcle s'écrit :

$$W = W_{AB} + W_{BC} + W_{CA} \quad \text{avec} \quad W_{initial \to final} \equiv \int_{initial}^{final} p\,dV$$

$A \to B$: Pour l'isotherme de ce gaz idéal, on trouve, en utilisant $pV = nRT$ et $V_B = \frac{V_A}{3}$:

$$W_{AB} = \int_{V_A}^{V_B} pdV = nRT_A \int_{V_A}^{V_B} \frac{dV}{V} = nRT_A \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right) = -nRT_A \ln(3).$$

$B \to C$: Sur l'isentrope on a $PV^\gamma = $ cst., on trouve (avec $T_B = T_A$ et $V_C = V_A = 3V_B$)

$$\begin{aligned} W_{BC} &= P_B V_B^\gamma \int_{V_B}^{V_C} \frac{dV}{V^\gamma} = P_B \left(\frac{V_A}{3}\right)^\gamma \frac{1}{1-\gamma} \left(V_A^{1-\gamma} - \left(\frac{V_A}{3}\right)^{1-\gamma}\right) \\ &= \frac{1}{1-\gamma} P_A V_A (3^{1-\gamma} - 1) = \frac{3^{1-\gamma}-1}{1-\gamma} nRT_A. \end{aligned}$$

où on a encore utilisé le loi des gaz parfaits et le fait que $pV = $ cst. sur l'isotherme pour trouver P_B.

$C \to A$: Même si cette transformation est irréversible, on a $W_{CA} = 0$ comme $dV = 0$ sur une isochore.

Finalement, :

$$W_{cycle} = W_{AB} + W_{BC} + W_{CA} = -nRT_A \ln(3) + \frac{3^{1-\gamma}-1}{1-\gamma} nRT_A = nRT_A \left(\frac{-5}{2}(3^{\frac{-2}{5}} - 1) - \ln(3)\right)$$

Application numérique :

$$W_{cycle} = 3 \times 8.314 \times 373.15 \times (-0.21) = -1951\,\mathrm{J}.$$

Comme $W_{cycle} < 0$, le travail est fait *sur* le gaz.

c) **6 points** L'eau va s'évaporer si elle reçoit plus de chaleur du gaz qu'elle n'en donne à celui-ci. Les échanges de chaleur se font sur les transformations $A \to B$ et $C \to A$ car $B \to C$ est adiabatique. Calculons les échanges de chaleur sur ces 2 transformations :

$A \to B$: Le premier principe de la thermodynamique s'écrit : $\Delta U = Q - W$. Or pour une isotherme, $\Delta U = 0$, donc

$$Q_{AB} = W_{AB} = -nRT_A \ln(3).$$

Cette quantité est négative : il s'agit donc de chaleur perdue par le gaz (donc reçue par l'eau).

$C \to A$: En utilisant le premier principe, on trouve $\Delta U_{CA} = Q_{CA}$ puisque $W_{CA} = 0$. Donc :

$$Q_{CA} = \int_{T_C}^{T_A} n\, C_V\, dT = n \frac{R}{\gamma - 1} (T_A - T_C) = n \frac{R}{\gamma-1} T_A \left(1 - \frac{T_C}{T_A}\right).$$

où on vient d'utiliser $R = C_p - C_V$ et $\gamma = \frac{C_p}{C_V}$.

Que vaut T_C ?

Pour une transformation adiabatique, on a $TV^{\gamma-1} = $ cst., donc $T_C V_C^{\gamma-1} = T_B V_B^{\gamma-1}$. Or, $T_B = T_A$ (isotherme), $V_C = V_A$ (isochore) et $V_B = V_A/3$. Donc :

$$T_C V_C^{\gamma-1} = T_B V_B^{\gamma-1} \quad \Rightarrow \quad T_C V_A^{\gamma-1} = T_A \left(\frac{V_A}{3}\right)^{\gamma-1} = T_A \frac{V_A^{\gamma-1}}{3^{1-\gamma}} \quad \Rightarrow \quad \frac{T_C}{T_A} = 3^{1-\gamma}.$$

Finalement,

$$Q_{CA} = n \frac{R}{\gamma-1} T_A \left(1 - 3^{1-\gamma}\right).$$

Cette quantité est positive c'est donc une quantité de chaleur reçue par le gaz (donc perdue par l'eau).

Le bilan de chaleur échangée au cours du cycle s'écrit donc :

$$Q_{cycle} = n\,R\,T_A \left(\frac{(1-3^{1-\gamma})}{\gamma - 1} - \ln(3)\right) = 3 \times 8.314 \times 373 \times (-0.21) = -1951\,,\mathrm{J}.$$

A chaque cycle, le gaz perd cette quantité de chaleur qui va servir à évaporer l'eau.
On aurait pu arriver directement au résultat en appliquant le premier principe de la thermodynamique au cycle complet :

$$\Delta U_{cycle} = Q_{cycle} - W_{cycle} \quad \Rightarrow \quad Q_{cycle} = W_{cycle},$$

car l'énergie interne est une variable d'état et donc $\Delta U_{cycle} = 0$. Ce raisonnement est également une solution parfaitement valable.
Finalement, le nombre de cycles N_{cyc} se calcule comme suit :

$$N_{cyc} = \left|\frac{Q_{\text{évap.}}}{Q_{cycle}}\right| = \left|\frac{m_{eau}\, L_v}{Q_{cycle}}\right|.$$

Application numérique :

$$N_{cyc} = \frac{1 \times 2250}{1.95} = 1153.8 \text{ où on a supposé } \rho_{eau}^{100°\mathrm{C}} = 10^3\,\mathrm{kg\,m^{-3}}.$$

Il faut donc 1154 cycles pour faire évaporer 1 litre d'eau complètement.

d) **3 points** La transformation isochore est irréversible, mais comme l'entropie est une variable d'état, on peut toujours choisir une transformation réversible pour aller de C à A. La variation d'entropie pour le gaz s'écrit :

$$\Delta S_{CA}^{gaz} = \int_C^A \frac{\delta Q}{T} = \int_{T_C}^{T_A} n\, C_V\, \frac{dT}{T} = n\frac{R}{\gamma - 1} \ln\left(\frac{T_A}{T_C}\right) = n\frac{R}{\gamma - 1} \ln\left(3^{\gamma - 1}\right).$$

Application numérique :

$$\Delta S_{CA}^{gaz} = 3 \times \frac{8.314}{2/5} \times 0.439 = 27.4\,\mathrm{J\,K^{-1}}.$$

Pour l'eau, que l'on peut bien traiter comme un réservoir parfait à température constante, on trouve

$$\Delta S_{CA}^{eau} = \int_C^A \frac{\delta Q}{T} = \frac{1}{T_A}\int_C^A \delta Q = \frac{-Q_{CA}}{T_A}$$

où le signe "-" indique que cette chaleur est perdue par l'eau.
Application numérique :

$$\Delta S_{CA}^{eau} = -\frac{8274}{373} = -22.2\,\mathrm{J\,K^{-1}}$$

e) **2 points** De d), il est clair que $\Delta S_{CA}^{univers} \equiv \Delta S_{CA}^{gaz} + \Delta S_{CA}^{eau} > 0$ en accord avec la transformation irréversible : pendant cette transformation, de l'énergie est fournie au gaz et dissipée. Elle devient donc inutilisable pour une conversion en travail. Comme les deux autres transformations sont réversibles, c'est la seule perte. Comme vu au cours en détail (série 09, exercice 1), on trouve en toute généralité (pour un cycle à 1 réservoir avec $T_H = T_L = T_A$)

$$Q_{indisp} = T_L\, \Delta S_{ABCA}^{univers} = T_A\, S_{CA}^{univers}.$$

Application numérique :

$$Q_{indisp} = 373 \times 5.23 = 1951\,\mathrm{J}.$$

Ceci ne veut PAS indiquer que dans chaque cycle moteur ou réfrigerateur $Q_{indisp} = W_{in} = Q_{out} - Q_{in}$. Généralement, on trouve des résultats, qui dependent de toutes les transformations.

Exercice 3 (20 points)

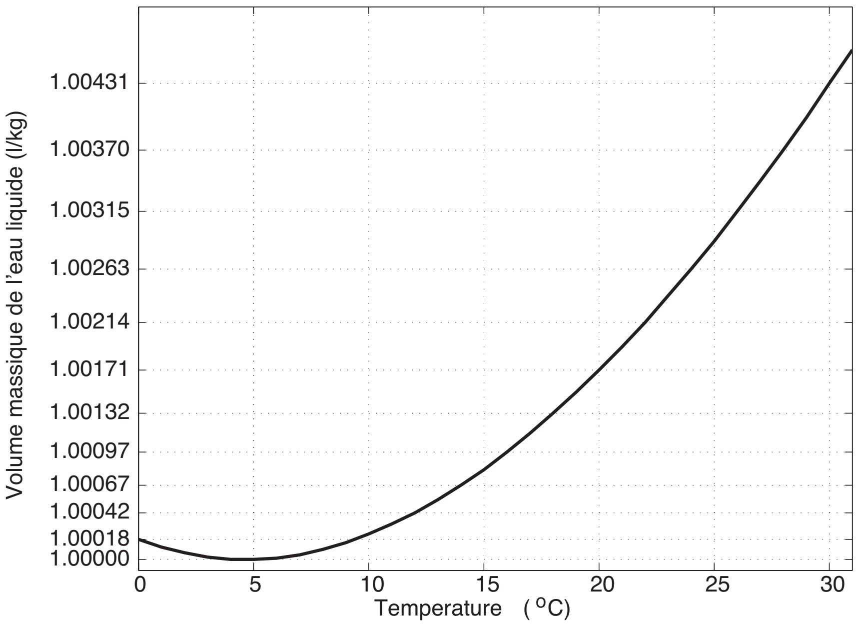
Un glaçon à température $-15\,°C$ est plongé dans un récipient de forme cylindrique, dont on néglige les pertes thermiques, contenant 1 kg d'eau à $30\,°C$. Uniquement les parois verticales du récipient sont sujettes aux déformations thermiques et sont à la même température que l'eau. A 30℃, le récipient a une capacité de 1.35 litres.

a) Quelle est la masse maximale de glace qui peut fondre dans l'eau ? Justifiez votre réponse. Dans la suite, on supposera que la masse initiale du glaçon est égale à la masse maximale trouvée au a).

b) Quelle est la variation d'entropie du système dans ce cas ?

c) A l'aide de la courbe ci-dessous, déterminer si l'eau déborde du récipient une fois l'équilibre thermique atteint.

Indication : chaleur spécifique de l'eau $c_{eau} = 4186\,\mathrm{J\,kg^{-1}°C^{-1}}$; chaleur spécifique de la glace $c_{glace} = 2050\,\mathrm{J\,kg^{-1}°C^{-1}}$; chaleur latente de fusion de la glace $L_f = 333.5\,\mathrm{kJ\,kg^{-1}}$; coefficient de dilatation linéaire du matériau du récipient $\alpha = 80 \times 10^{-6}\,\mathrm{K^{-1}}$.



Corrigé

a) **6 points** Les valeurs possibles pour la température d'équilibre (finale) sont $T_f \geq 0\,°C$. En effet, $T_f < 0\,°C$ n'est pas possible car la glace doit fondre.
Si $T_f \geq 0\,°C$:

$$c_{glace} m_{glace}(0 - T_{glace}) + m_{glace} L_f + c_{eau} m_{glace}(T_f - 0) = c_{eau} m_{eau}(T_{eau} - T_f)$$

$$\Rightarrow \quad m_{glace} = \frac{c_{eau} m_{eau}(T_{eau} - T_f)}{c_{glace}(0 - T_{glace}) + L_f + c_{eau}(T_f - 0)} \tag{10}$$

La quantité maximale de glace qui peut fondre est trouvée lorsque le numérateur est maximum (et le numérateur minimum), c'est à dire à $T_f = 0$.
Par conséquent,

$$m_{glace} = \frac{c_{eau} m_{eau} T_{eau}}{c_{glace}|T_{glace}| + L_f}. \tag{11}$$

Application numérique :

$$m_{glace} = \frac{4186 \times 1 \times 30}{2050 \times 15 + 333.5 \times 10^3} = 0.345\mathrm{kg}$$

Une autre façon de justifier $T_f = $ °C est de dire que toute la chaleur perdue par l'eau sert à fondre de la glace, mais que l'eau ne doit pas se transformer en glace.

b) **8 points** La variation d'entropie du système doit être calculée en 3 étapes :

1.- Réchauffement de la glace de −15 ℃ à 0 ℃

La quantité infinitésimale de chaleur pour chauffer la glace de dT est :

$$\delta Q = m_0 c_{\text{glace}}\, \mathrm{d}T. \tag{12}$$

Donc, la variation d'entropie de la glace s'écrit :

$$\Delta S_1 = \int_i^f \frac{\delta Q}{T} = m_0 c_{\text{glace}} \int_{T_i}^{T_f} \frac{\mathrm{d}T}{T} = m_0 c_{\text{glace}} \ln\left(\frac{T_f}{T_i}\right). \tag{13}$$

2.- Fusion de la glace à 0 ℃ en eau à 0 ℃

La chaleur transférée à la glace pour la fondre est :

$$Q = m_0 L_f. \tag{14}$$

Ainsi, la variation d'entropie de la glace lors de sa fonte (c.-à.-d. à température constante) est :

$$\Delta S_2 = \int_i^f \frac{\delta Q}{T} = \frac{1}{T}\int_i^f \delta Q = \frac{Q}{T} = \frac{m_0 L_f}{T}. \tag{15}$$

3.- Refroidissement de l'eau de 30 ℃ à 0℃

On obtient pour la variation d'entropie de l'eau refroidie :

$$\Delta S_3 = m_{\text{eau}} c_{\text{eau}} \int_{T_{i,eau}}^{T_f} \frac{\mathrm{d}T}{T} = m_{\text{eau}} c_{\text{eau}} \ln\left(\frac{T_f}{T_{i,eau}}\right). \tag{16}$$

Application numérique :

$$\Delta S_1 = m_0 \times 2050 \times \ln\left(\frac{273}{258}\right) = 115.85\, m_0\,\mathrm{J\,K^{-1}}.$$

$$\Delta S_2 = \frac{m_0 \times 3.335 \times 10^5}{273} = 1221 m_0\,\mathrm{J\,K^{-1}}.$$

$$\Delta S_3 = 1 \times 4186 \times \ln\left(\frac{273}{303}\right) = -436.43\,\mathrm{J\,K^{-1}}.$$

On a donc pour la variation totale d'entropie du système :

$$\Delta S_{\text{syst.}} = m_0 c_{\text{glace}} \ln\left(\frac{T_f}{T_{\text{i,glace}}}\right) + \frac{m_0 L_f}{T_f} + m_{\text{eau}} c_{\text{eau}} \ln\left(\frac{T_f}{T_{\text{i,eau}}}\right) S_3 = 1337\, m_0 - 436.43\,\mathrm{J\,K^{-1}}. \tag{17}$$

Avec $m_0 = 0.345\,\mathrm{kg}$, $\Delta S_{\text{syst.}} = 24.84\,\mathrm{J\,K^{-1}}$.
La variation d'entropie du système "glace+eau" est positive car c'est un processus irréversible.
On peut aussi dire que le désordre a augmenté.

c) **6 points** D'après la courbe donnée, le volume massique de l'eau à 0 °C est égal à $1.00018\,\mathrm{l\,kg^{-1}}$ donc la masse volumique de l'eau à 0 °C vaut $\rho_{\text{eau}} = \frac{1}{1.00018} = 0.998\,\mathrm{kg\,l^{-1}} = 999.8\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$.
A T_f, toute la glace a fondu donc la masse totale d'eau liquide est : $m_{eau} = 1 + 0.345 = 1.345\,\mathrm{kg}$ donc le volume total d'eau est :

$$V_{eau}(T = 0°\mathrm{C}) = \frac{m_{eau}}{\rho_{eau}}.$$

Application numérique :

$$V_{eau}(T = 0°\mathrm{C}) = \frac{1.345}{999.8} = 1.3452 \times 10^{-3}\,\mathrm{m^{-3}} = 1.3452\,\mathrm{l}.$$

Seules les parois du récipient se sont raccourcies sous l'effet du refroidissement (pas sa section) :

$$V_{r,T=0^\circ\mathrm{C}} = S_r h_{r,T=0^\circ\mathrm{C}} = S_r h_{r,T=30^\circ\mathrm{C}} \times (1+\alpha\Delta T) = V_{r,T=30^\circ\mathrm{C}} \times (1+\alpha\Delta T).$$

<u>Application numérique :</u>

$$V_{r,T=0^\circ\mathrm{C}} = 1.35 \times (1 + 80 \times 10^{-6} \times (-30)) = 1.3467\,\mathrm{l}.$$

Remarque : le récipient est un cylindre (section circulaire). Donc, on ne peut pas calculer une expansion/contraction volumique en utilisant comme coefficient d'expansion volumique $\beta = 3\alpha$ (ceci n'est valable que pour les parallélépipèdes).

A T=0℃, le volume d'eau liquide est légèrement plus petit que le volume du récipient donc l'eau ne déborde pas.

Exercice 4 (20 points)

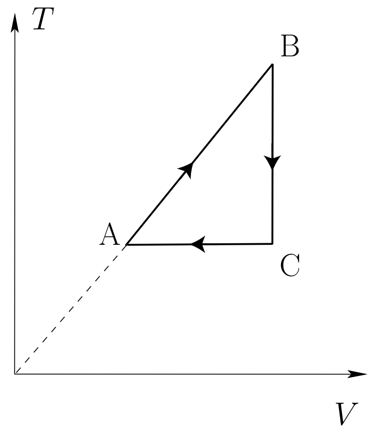
Trois moles d'un gaz parfait monoatomique suivent le cycle ABCA représenté par un triangle rectangle dans le diagramme $T-V$ (voir figure ci-dessous).

a) S'agit-il d'un moteur ou d'un réfrigérateur ?

b) En sachant que $T_B = 3T_A$, calculer le coefficient de performance ou le rendement du cycle.

c) Calculer la variation d'énergie libre de Gibbs ΔG sur la transformation $C \to A$ et sur tout le cycle pour $T_A = 80\,°\mathrm{C}$.

Indications : Constante des gaz parfaits $R = 8.314\,\mathrm{J\,mol^{-1}\,K^{-1}}$.



Corrigé

a) **6 points** Pour savoir s'il s'agit d'un moteur ou d'un réfrigérateur, on peut examiner le sens dans lequel tourne le cycle dans un diagramme $p-V$. Redessinons ce cycle dans un diagramme $p-V$. Pour cela nous devons trouver les allures des courbes représentant les transformations AB, BC et CA dans ce diagramme.

Transformation $A \to B$: D'après le cycle donné dans l'énoncé, la courbe de la transformation AB est une droite passant l'origine. L'équation de cette droite dans le diagramme $T-V$ est de la forme : $T = \alpha V$, où α est une constante. En utilisant la loi des gaz parfaits on trouve :

$$pV = nRT \qquad \Rightarrow \qquad T = \frac{p}{nR}V \qquad \Rightarrow \qquad \alpha = \frac{p}{nR}.$$

On en déduit que la transformation $A \to B$ est une isobare et peut donc être représentée par un segment de droite horizontale dans le diagramme $p-V$.

Transformation $B \to C$: Il s'agit d'une transformation isochore dont l'allure dans un diagramme $p-V$ ne changera pas.

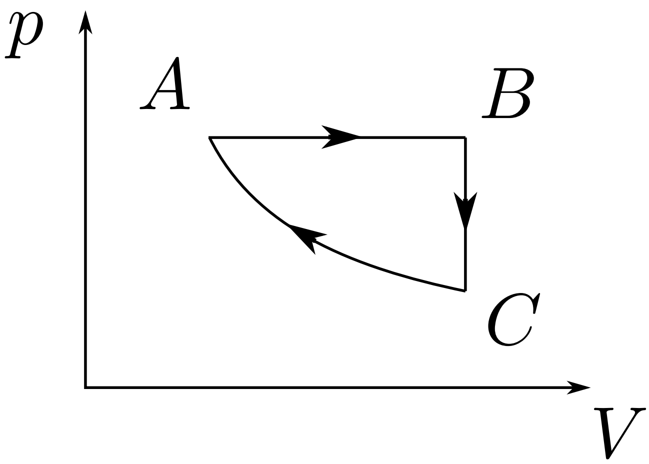
Transformation $C \to A$: C'est une transformation isotherme dont on connaît l'allure dans un diagramme $p-V$.

$$\boxed{\text{Le cycle dans le diagramme } p-V \text{, représenté ci-après, est parcouru dans le sens horaire : il s'agit donc d'un moteur.}}$$

b) **8 points** Comme il s'agit d'un moteur, on va calculer le rendement du cycle. Il est donné par le rapport entre le travail du gaz sur le cycle W_{cycle} et la chaleur échangée avec la source chaude Q_H :

$$\eta \equiv \frac{W_{cycle}}{Q_c}.$$

Calculons le travail effectué *par* ou *sur* le gaz et la chaleur échangée lors de chaque transformation :



Transformation $A \to B$:

$$W_{AB} = \int_A^B p dV = p_A (V_B - V_A) = p_A \left(\frac{nRT_B}{p_B} - \frac{nRT_A}{p_A} \right) = p_A \left(\frac{3nRT_A}{p_A} - \frac{nRT_A}{p_A} \right)$$

$$\Rightarrow W_{AB} = 2nRT_A = 2p_A V_A$$

$$Q_{AB} = \Delta U_{AB} + W_{AB} = nC_V (T_B - T_A) + 2nRT_A = \frac{3}{2} nR(3T_A - T_A) + 2nRT_A.$$

$$Q_{AB} = 5nRT_A > 0 \Rightarrow \text{ échange avec la source chaude}$$

Transformation $B \to C$:

$$W_{BC} = \int_B^C p\mathrm{d}V = 0 \text{ car transformation isochore.}$$

$$Q_{BC} = \Delta U_{BC} + W_{BC} = nC_V (T_C - T_B) = \frac{3}{2} nR (T_A - 3T_A) = -3p_A V_A$$

$$Q_{BC} = -3nRT_A < 0 \Rightarrow \text{ échange avec la source froide}$$

Transformation $C \to A$:

$$W_{CA} = \int_C^A p\mathrm{d}V = \int_C^A \frac{nRT}{V} \mathrm{d}V = nRT_A \ln \frac{V_A}{V_C} = p_A V_A \ln \frac{V_A}{V_C}$$

Or d'après la loi des gaz parfaits :

$$\frac{p_A V_A}{T_A} = \frac{p_B V_B}{T_B} \Rightarrow \frac{p_A V_A}{T_A} = \frac{p_A V_C}{3T_A} \Rightarrow V_A = \frac{V_C}{3}$$

Donc :

$$W_{CA} = -p_A V_A \ln(3) = -nRT_A \ln(3).$$

$$Q_{CA} = \Delta U_{CA} + W_{CA} = nC_v (T_C - T_A) - p_A V_A \ln 3$$

$$Q_{CA} = -nRT_A \ln(3) < 0 \Rightarrow \text{ échange avec la source froide}$$

Finalement :

$$\boxed{\begin{gathered} W_{cycle} = 2nRT_A + 0 - nRT_A \ln(3) = nRT_A(2 - \ln(3)). \\ Q_H = Q_{AB} = 5nRT_A. \\ \eta = \frac{W_{cycle}}{Q_H} = \frac{nRT_A(2 - \ln(3))}{5nRT_A} = \frac{2 - \ln(3)}{5} \simeq 0.18. \end{gathered}}$$

c) **6 points** La variation d'énergie libre de Gibbs lors de la transformation CA s'écrit :

$$\Delta G_{CA} = \int_C^A \mathrm{d}G = \int_C^A \mathrm{d}H - S\mathrm{d}T - T\mathrm{d}S$$
$$= \int_C^A \delta Q - \delta W + p\mathrm{d}V + V\mathrm{d}p - S\mathrm{d}T - T\mathrm{d}S$$

Comme $\delta W = p\mathrm{d}V$ et que la transformation isotherme CA peut être considérée quasi-statique ($\int_C^A T\mathrm{d}S = Q_{CA}$) alors :

$$\Delta G_{CA} = \int_C^A V\mathrm{d}p = nRT_A \int_C^A \frac{1}{p}\mathrm{d}p = p_A V_A \ln\left(\frac{p_A}{p_C}\right) = p_A V_A \ln\left(\frac{nRT_B}{nRT_A}\right) = p_A V_A \ln(3).$$

$$\Rightarrow \Delta G_{CA} = nRT_A \ln(3).$$

Application numérique : $\Delta G_{CA} = 3 \times 8.314 \times 353 \times \ln(3) \simeq 9.67\,\mathrm{kJ}$.
L'énergie libre de Gibbs est une fonction d'état, donc $\Delta G_{cycle} = 0J$.

Exercice 5 (20 points)

Un four à pizza de forme semi-sphérique (diamètre : 5 m) est maintenu à une température de 380 °C par un feu de bois. La température extérieure est de 20 °C. Les parois du four sont faites d'une couche interne en briques thermo-réfractaires, d'épaisseur 15 cm, et d'une couche externe en fer de 1 cm. La densité d'énergie du bois qui brûle est de 14 MJ kg^{-1}.

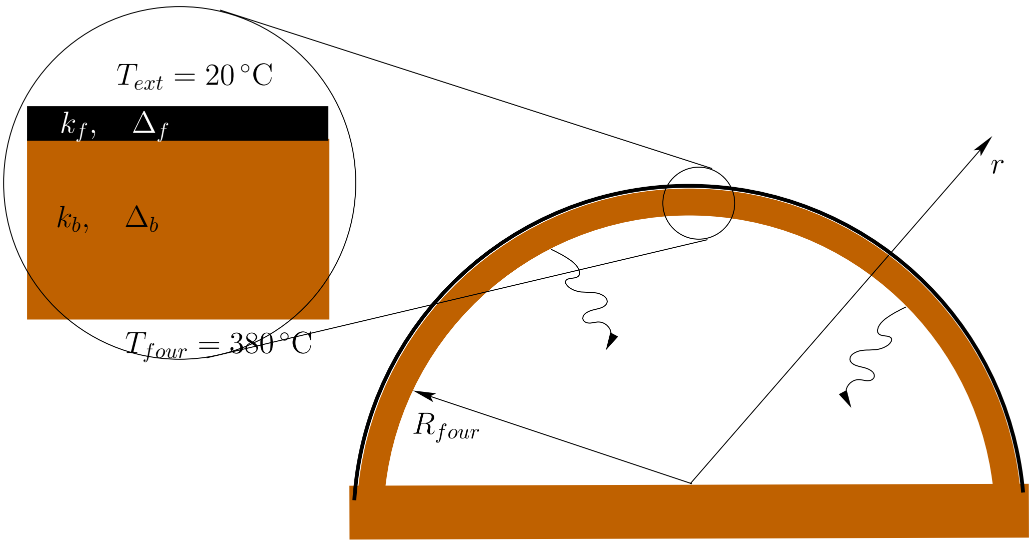
a) En supposant qu'une pizza ait besoin de 4 minutes pour cuire, qu'une seule pizza rentre dans le four à la fois, quelle masse de bois sera brûlée pendant une soirée où l'on doit servir 120 pizzas ? Faites l'hypothèse que la seule perte de chaleur se fait par conduction à travers les parois du four, sans aucune perte sur la base du four et que la masse de la pizza est négligeable.

b) En supposant que les pizzas, de forme circulaire (rayon : 25 cm), sont des corps gris, quelle est la différence de puissance due au rayonnement des parois du four absorbée par une pizza Margherita ($e = 0.8$) et absorbée par une pizza Quatre-fromages ($e = 0.6$). On fera le calcul lorsque les pizzas sont encore à température ambiante sitôt placées dans le four. On fera l'approximation que les parois du four rayonnent comme un corps noir.

c) Laquelle des deux pizzas sera cuite plus rapidement ? Justifier votre réponse

Indications : Constante de Stefan-Boltzmann $\sigma_B = 5.670 \times 10^{-8}$ W m^{-2} K^{-4} ; Conductivité thermique des briques $k_{\text{brique}} = 0.84$ W m^{-1}K^{-1} ; Conductivité thermique du fer $k_{\text{fer}} = 60.2$ W m^{-1}K^{-1}.

Corrigé



a) **12 points** L'apport de bois sert uniquement à compenser les pertes par conduction afin de maintenir la température à 380°C.
Selon la loi de Fourier, la densité de flux thermique, c'est-à-dire le flux par unité de surface, traversant une couche est donnée par :

$$J = -k\,\frac{dT}{dr},$$

où k est la conductivité thermique. Le flux thermique total $\delta Q/dt$ à travers la surface S est

$$\frac{\delta Q}{dt} = JS \; = \; -k\;2\pi r^2\,\frac{dT}{dr} \; = \text{cte},$$

avec $S = 2\pi r^2$ puisque le four est une demi-sphère. On remarque que S dépend de la position r à travers la couche.
Ici, le point important est que le flux thermique total $\delta Q/dt$ traversant les couches ne change pas (au contraire de la densité de flux J qui, elle, change).

$$\frac{\delta Q}{dt}\frac{1}{2\pi r^2}dr = \; -kdT \quad \Rightarrow \quad \frac{\delta Q}{dt}\frac{1}{2\pi}\int_{r_i}^{r_e}\frac{1}{r^2}dr = \; -k\int_{r_i}^{r_e} dT$$

Appliquons cette formule à notre problème. On définit $R_{b,i} = R_{four}$ le rayon à l'entrée de la couche de brique, $R_{b-f} = R_{four} + \Delta_b$ le rayon à l'interface brique-fer et $R_{f,f} = R_{four} + \Delta_b + \Delta_f$ le rayon à la sortie de la couche de fer. On note T_{b-f} la température à l'interface brique-fer.

$$\underbrace{\frac{1}{2\pi}\frac{\delta Q}{dt}\int_{R_{b,i}}^{R_{b-f}} r^{-2}dr = -k_b\int_{R_{b,i}}^{R_{b-f}} dT}_{\text{à travers la couche de brique}} \quad \text{et} \quad \underbrace{\frac{1}{2\pi}\frac{\delta Q}{dt}\int_{R_{b-f}}^{R_{f,f}} r^{-2}dr = -k_f\int_{R_{b-f}}^{R_{f,f}} dT}_{\text{à travers la couche de fer}}$$

donc

$$\frac{1}{2\pi}\frac{\delta Q}{dt}\left(R_{b-f}^{-1} - R_{b,i}^{-1}\right) = -k_b\left(T_{b-f} - T_{four}\right) \quad \text{et} \quad \frac{1}{2\pi}\frac{\delta Q}{dt}\left(R_{f,f}^{-1} - R_{b-f}^{-1}\right) = -k_f\left(T_{ext} - T_{b-f}\right).$$

Or $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{b-a}{ab}$, donc :

$$-\frac{1}{2\pi}\frac{\delta Q}{dt}\frac{1}{k_b}\frac{R_{b,i} - R_{b-f}}{R_{b,i}R_{b-f}} = T_{b-f} - T_{four} \quad \text{et} \quad -\frac{1}{2\pi}\frac{\delta Q}{dt}\frac{1}{k_f}\frac{R_{b-f} - R_{f,f}}{R_{f,f}R_{b-f}} = T_{ext} - T_{b-f}.$$

On additionne ces deux équations membre à membre :

$$T_{ext} - T_{four} = \Delta T = -\frac{1}{2\pi}\frac{\delta Q}{dt}\left(\frac{1}{k_b}\frac{R_{b,i} - R_{b-f}}{R_{b,i}R_{b-f}} + \frac{1}{k_f}\frac{R_{b-f} - R_{f,f}}{R_{f,f}R_{b-f}}\right).$$

Finalement,

$$\frac{\delta Q}{dt} = -2\pi\Delta T\frac{k_f k_b R_{b,i}R_{b-f}^2 R_{f,f}}{k_f R_{b-f}R_{f,f}(R_{b,i} - R_{b,f}) + k_b R_{b,i}R_{b-f}(R_{b-f} - R_{f,f})}.$$

L'application numérique donne :

$$\frac{\delta Q}{dt} \simeq -83.845\,\text{kW}.$$

Ceci est la puissance perdue par le four par conduction.

On peut obtenir un résultat plus simple en faisant une bonne approximation : la différence de température entre l'entrée et la sortie d'une couche est proportionnelle au rapport entre l'épaisseur de la couche et la conductivité thermique : $\Delta T_{couche} \propto \frac{\Delta_{couche}}{k_{couche}}$. Si on calcule ce rapport pour la couche de brique et la couche de fer, on trouve que $\frac{\Delta_b}{k_b} \gg \frac{\Delta_f}{k_f}$ donc la température à l'interface brique-fer est très proche de la température extérieure. On peut donc négliger la contribution de la couche de fer. Ce qui donne :

$$\left.\frac{\delta Q}{dt}\right|_{\text{Approx. 1}} \simeq -2\pi k_b\frac{(T_{f,f} - T_{b,i})}{\left(R_{b-f}^{-1} - R_{b,i}^{-1}\right)}.$$

On pourrait faire une deuxième approximation : le rayon du four étant grand devant l'épaisseur des couches, on pourrait considérer des surfaces planes :

$$\left.\frac{\delta Q}{dt}\right|_{\text{Approx. 2}} = JS = -2\pi R_{four}^2\frac{k_b}{\Delta_b}\Delta T.$$

On peut utiliser ces approximations à condition de bien les justifier.

Le temps total pour chauffer les 120 pizzas est $t_{\text{total}} = 4 \times 60 \times 120 = 28800\,\text{s}$.
Donc à la fin de la soirée, l'énergie perdue par le four est égale à

$$Q_{\text{pertes}} = \frac{\delta Q}{dt} \times t_{\text{total}} = -83.845 \times 28800 \simeq 2.41 \times 10^9\,\text{J} = -2.41\,\text{GJ}.$$

Cette chaleur perdue doit être égale à la chaleur fournie par le bois, donc la masse de bois brûlé est égale à

$$\boxed{m_{\text{bois}} = \frac{Q_{\text{pertes}}}{\mathcal{E}_{\text{bois}}} = \frac{2.41 \times 10^3}{14} \simeq 173\,\text{kg}.}$$

b) **4 points** Nous considérons le four comme un corps noir. Dès lors, la puissance effective absorbée par une pizza avec une émissivité e et une surface S_{pizza} vaut :

$$P = P_{\text{entrant}} - P_{\text{émise}} = \sigma_B \, e \, S_{pizza} \left(T_{four}^4 - T_{pizza}^4\right)$$

Application numérique : Attention : les températures doivent être exprimées en Kelvin.
Pour une pizza Margherita :

$$P_M = 5.670 \times 10^{-8} \times 0.8 \times \pi \times 0.25^2 \left(653.15^4 - 293.15^4\right) = 1555 \; W$$

Pour une pizza Quatre-fromages :

$$P_{QF} = 5.670 \times 10^{-8} \times 0.6 \times \pi \times 0.25^2 \left(653.15^4 - 293.15^4\right) = 1166 \; W$$

La différence de puissance est donc :

$$\boxed{\Delta P = P_M - P_{QF} = 389\,\text{W}.}$$

c) **3 points** La pizza Margherita absorbe plus de puissance que la pizza Quatre-fromages. Elle chauffera donc plus rapidement.