Exercice 1 (25 points)

Tous les référentiels (réfs.) sont inertiels et tous les objets (planètes, fusées) sont assimilés à des points matériels. À l'instant t_A (mesuré dans le réf. de la Terre), une fusée $F1$ entre sur l'autoroute galactique, sur l'axe Terre-Jupiter, à la position de la Terre. Jupiter est immobile dans le réf. de la Terre. La vitesse de la fusée est $v_{F1} = 0.72\,c$ dans la direction de Jupiter, mesurée dans le réf. de la Terre. La distance Terre-Jupiter dans le réf. de la Terre est $L_{T-J} = 7 \times 10^9$ m. Une deuxième fusée $F2$ voyage sur l'axe Terre-Jupiter en direction de la Terre, avec une vitesse $v_{F2} = 0.7\,c$.

a) Quelle est la distance (mesurée dans le réf. de $F1$) entre la Terre et Jupiter ? Quelle est la vitesse de $F1$ mesurée par $F2$?

Dans le réf. de la Terre, à l'instant t_A, un signal radio est envoyé depuis la Terre en direction de Jupiter. À l'instant t_B, la fusée $F2$ se trouve à la même position que le signal radio, entre la Terre et Jupiter, et la fusée $F1$ a parcouru une distance $D_{T-F1} = 2 \times 10^9$ m.

b) Quel est l'intervalle de temps (mesuré dans le réf. de $F2$), entre l'événement "envoi du signal radio depuis la Terre" et l'événement "signal radio et $F2$ à la même position" ?

Dans le réf. de la Terre, à l'instant t_C, le signal radio se trouve à une distance $S_{s-J} = 4 \times 10^8$ m de Jupiter entre la Terre et Jupiter. Une fusée de la police galactique P, qui voyage en direction de Jupiter sur l'axe Terre-Jupiter à une vitesse $v_P = v_{F1}$, reçoit le signal à l'instant t_C.

c) Quelle est la distance (S_{F1-P}) entre la fusée $F1$ et la fusée de la police, mesurée dans le réf. de P ?

Dès que le signal radio est reçu par P, il est instantanément renvoyé vers $F1$, qui le reçoit à l'instant t_D (mesuré dans le réf. de la Terre).

d) Quel est l'intervalle spatial (mesuré dans le réf. de $F1$) entre l'événement "réception du signal radio par la police" et l'événement "réception du signal radio par $F1$" ?

La vitesse limite autorisée sur l'autoroute galactique est $v_{lim} = 0.7\,c$ (mesurée dans le réf. de la Terre). Soit m_{F1} la masse au repos de la fusée $F1$. L'équipage de la fusée $F1$, pour ne pas recevoir d'amende, ralentit instantanément la fusée en lançant un réservoir (masse au repos $m_R = 0.2\,m_{F1}$) vers Jupiter avec une vitesse $v_R = 0.95\,c$, à un $\Delta t_{exp} = 0.5$ s (mesuré dans le réf. de la Terre) après l'envoi du signal radio par la police. On définit t_E l'instant (mesuré dans le réf. de la Terre) où la fusée reçoit le signal radio de la police après l'expulsion du réservoir.

e) Quelle est la vitesse de la fusée $F1$ (mesurée dans le réf. de la Terre) après l'expulsion du réservoir ?

f) La fusée recevra-t-elle une amende si on considère que sa vitesse moyenne entre t_A et t_E ne doit pas dépasser la vitesse limite autorisée dans le réf. de la Terre ?

Indications : vitesse de la lumière $c = 3 \times 10^8$ m/s.

Corrigé

a) (4 pt)
La longueur L_{T-J} est une longueur propre dans le référentiel de la Terre (distance entre 2 objets fixes dans un référentiel). Donc pour trouver la longueur vue par $F1$, il suffit de contracter cette longueur :

$$L'_{T-J} = \frac{L_{T-J}}{\gamma_{F1}} = 4.86 \cdot 10^9 \, \mathrm{m} \tag{1}$$

avec $\gamma_{F1} = \left(\sqrt{1 - \frac{v_{F2}^2}{c^2}}\right)^{-1} = 1.44$.

La vitesse de $F1$ mesurée dans $F2$ se calcule grâce à la transformation de Lorentz pour les vitesses. Attention à bien poser les référentiels : $v_x = v_{F1} = 0.72\ c$ et $v = v_{F2} = -0.7\ c$:

$$v''_x = \frac{v_x - v}{1 - \frac{v_x v}{c^2}} \quad \Longrightarrow \quad v''_{F1} = \frac{v_{F1} - v_{F2}}{1 - \frac{v_{F1} v_{F2}}{c^2}} = 0.94\ c \tag{2}$$

b) (4 pt)
En connaissant D_{T-F1}, nous pouvons trouver l'intervalle de temps entre l'émission et la réception, mesuré dans le référentiel de la Terre :

$$\Delta t_{AB} = \frac{D_{T-F1}}{v_{F1}} = 9.26 \text{ s} \tag{3}$$

ainsi que :

$$\gamma_{F2} = \left(\sqrt{1 - \frac{v_{F2}^2}{c^2}}\right)^{-1} \qquad , \qquad D_{T-F2} = \Delta t_{AB} c \tag{4}$$

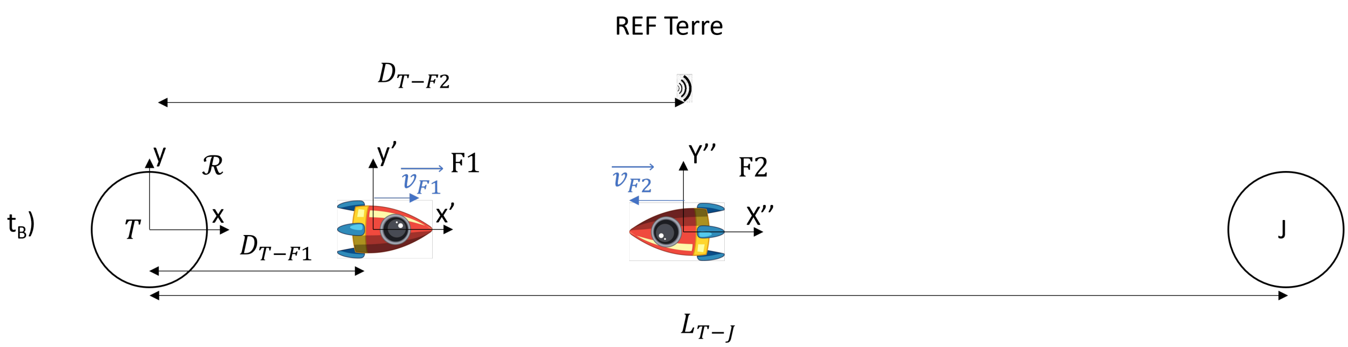


Figure 1 – Schéma pour la question b)

Nous pouvons ensuite appliquer les transformations de Lorentz (notez que $v_{F2} < 0$ au vu de la géométrie du problème) :

$$\Delta t''_{AB} = \gamma_{F2} \left(\Delta t_{AB} - v_{F2} \frac{D_{T-F2}}{c^2} \right) = 22 \text{ s} \tag{5}$$

Une autre solution aurait été de considérer le réf. de la fusée $F2$ comme fixe. Les grandeurs sont échangées, c'est-à-dire qu'on cherche Δt_{AB} et le temps calculé à l'équation (3) est en fait $\Delta t''_{AB}$. De même, la distance calculée à l'équation (4) se nomme D''_{T-F2}. La transformée de Lorentz s'écrit alors :

$$\Delta t_{AB} = \gamma_{F2}\left(\Delta t''_{AB} + v_{F2}\frac{D''_{T-F2}}{c^2}\right) = 22 \text{ s} \tag{6}$$

Dans ce cas, on a bien que $v_{F2} > 0$ et donc les deux calculs donnent le même résultat.

c) (5 pt)
Dans ce cas, la distance entre les deux fusées est une distance propre dans le référentiel des fusées, vu qu'elles vont à la même vitesse (donc c'est bien la distance entre deux objets fixes dans un référentiel). Nous pouvons d'abord écrire la distance S_{T-s} entre la Terre et le signal :

$$S_{T-s} = L_{T-J} - S_{s-J} = 6.60 \cdot 10^9 \text{ m} \tag{7}$$

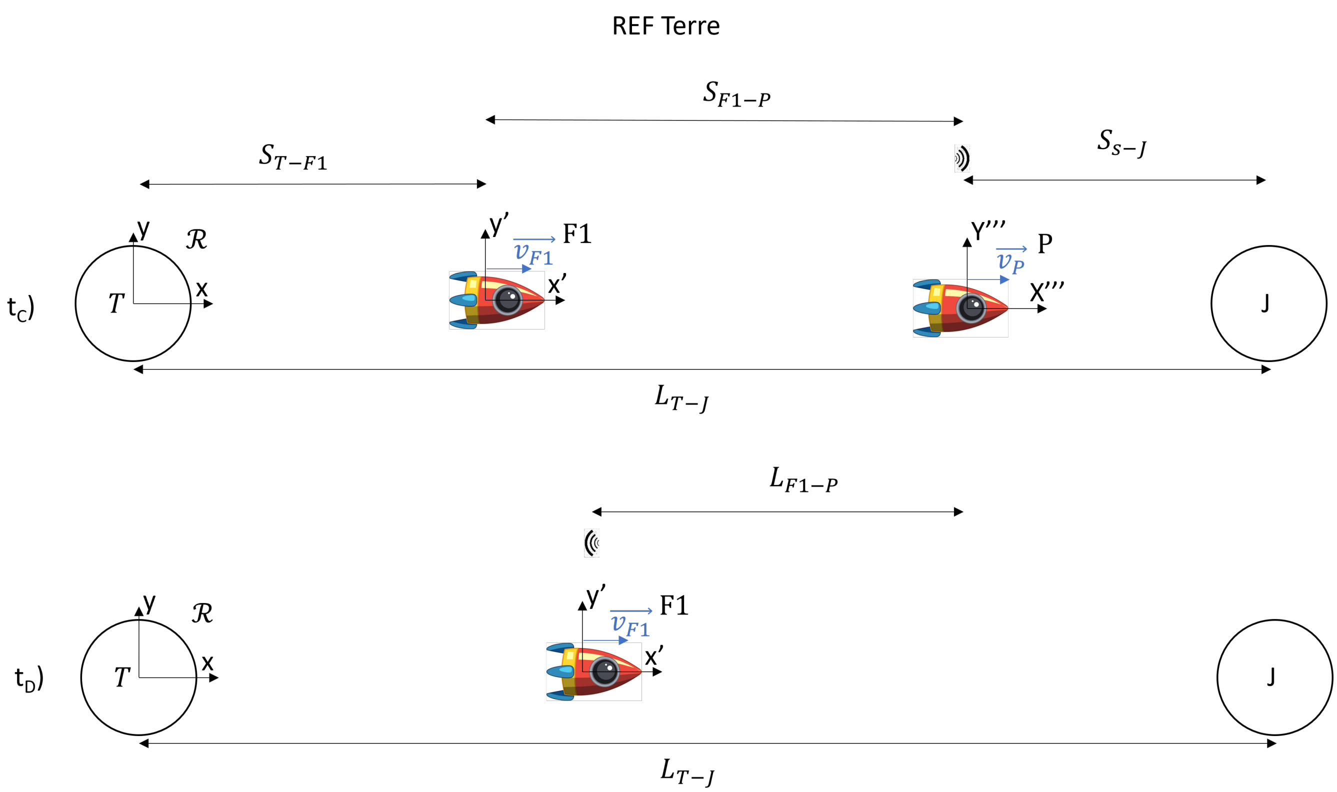


FIGURE 2 – Schéma pour la question c) et d)

Pour trouver la distance S_{T-F1} entre la Terre et la fusée $F1$ au moment t_C, il faut d'abord calculer l'intervalle de temps Δt_{AC} :

$$\Delta t_{AC} = \frac{L_{T-J} - S_{s-J}}{c} \tag{8}$$

pour ainsi écrire la distance totale parcourue par la fusée depuis son départ :

$$S_{T-F1} = v_{F1}\Delta t_{AC} \tag{9}$$

La distance entre $F1$ et P au moment t_C dans le référentiel de la Terre est :

$$S_{F1-P} = S_{T-s} - S_{T-F1} = 1.85 \cdot 10^9 \text{ m} \tag{10}$$

et celle dans le référentiel de P est :

$$S'''_{F1-P} = S_{F1-P}\gamma_P = 2.66 \cdot 10^9 \text{ m} \qquad \text{avec} \qquad \gamma_P = \gamma_{F1} = \left(\sqrt{1 - \frac{v_{F1}^2}{c^2}}\right)^{-1} \tag{11}$$

En effet, S'''_{F1-P} est une longueur propre comme spécifié précédemment.

N.B. : une autre méthode aurait pu être utilisée pour calculer S_{T-F1}. On aurait pu calculer l'intervalle de temps entre les événements B et C, puis effectuer :

$$S_{T-F1} = D_{T-F1} + v_{F1}\Delta t_{BC} \qquad \text{avec} \qquad \Delta t_{BC} = \frac{L_{T-J} - D_{T-F2} - S_{s-J}}{c} \tag{12}$$

les calculs sont équivalents et le reste de la résolution est la même. Notez qu'on retrouve bien $\Delta t_{AC} = \Delta t_{AB} + \Delta t_{BC}$ ce qui montre la cohérence des calculs.

d) (4 pt)
On définit l'événement C comme la réception du signal radio par la police et l'événement D comme la réception du signal par $F1$. Dans le réf. de la Terre, on a :

$$(x_C, t_C) = (S_{T-s}, \Delta t_{AC}) \qquad (x_D, t_D) = (t_D v_{F1}, \Delta t_{AC} + \Delta t_{CD}) \tag{13}$$

On doit donc trouver Δt_{CD} grâce à une équation similaire à l'équation (8) :

$$\Delta t_{CD} = \frac{S_{F1-P}}{v_{F1} + c} = 3.58 \, \text{s} \tag{14}$$

Ce qui donne pour x_D :

$$x_D = \Delta t_{AD} v_{F1} = 5.53 \cdot 10^9 \, \text{m} \qquad \text{avec} \qquad \Delta t_{AD} = \Delta t_{AC} + \Delta t_{CD} = 25.58 \, \text{s} \tag{15}$$

Maintenant que tous les éléments ont été calculés (on effectue $\Delta x_{CD} = x_D - x_C = -1.07 \times 10^9$ m.), on transforme dans le réf. $F1$ avec Lorentz :

$$\Delta x'_{CD} = \gamma_{F1}(\Delta x_{CD} - v_{F1}\Delta t_{CD}) = -2.66 \cdot 10^9 \text{ m} \tag{16}$$

Cette distance est négative, ce qui signifie que l'événement D se passe plus proche de la Terre que l'événement C dans le réf. de $F1$.

Une autre méthode de résolution pour calculer Δx_{CD} serait de prendre le temps t_{CD} et de dire que le signal se propage à la vitesse de la lumière pendant ce temps-là. Attention par contre, comme le signal se propage vers la Terre, sa vitesse est de -c. On a donc :

$$\Delta x_{CD} = -c\Delta t_{CD} = -1.07 \cdot 10^9 \, \text{m} \tag{17}$$

On voit que les résultats sont cohérents.

Enfin, une dernière possibilité aurait été de d'abord transformer le temps Δt_{CD} dans le réf. de $F1$ (ce qui donne $\Delta t'_{CD}$) puis de multiplier par $-c$ (la vitesse du signal) pour trouver la distance demandée. Attention néanmoins à bien prendre $\Delta x_{CD} < 0$ dans la transformée.

e) (4 pt)
Ce problème doit être résolu avec la conservation de la quantité de mouvement relativiste. On ne peut pas utiliser la conservation de l'énergie cinétique, car c'est un choc inélastique et dès lors E_{cin} n'est pas conservée avant et après la collision.

Nous pouvons donc écrire la conservation de la quantité de mouvement relativiste :

$$\gamma_{F1-av} m_{F1} v_{F1-av} = 0.8 m_{F1} \gamma_{F1-ap} v_{F1-ap} + 0.2 m_{F1} \gamma_R v_R \tag{18}$$

On identifie $\gamma_R = \left(\sqrt{1-\frac{v_R^2}{c^2}}\right)^{-1} = 3.20$. Les masses m_F se simplifient, et les autres grandeurs sont connues du problème. On cherche v_{F1-ap}, qui se retrouve dans le membre de droite mais aussi dans γ_{F1-ap}, qu'il faut expliciter.
Un peu d'algèbre nous permet d'obtenir :

$$v_{F1-ap} = \frac{(\gamma_{F1-av} v_{F1} - 0.2\gamma_R v_R)/0.8}{\sqrt{1+[(\gamma_{F1-av} v_{F1} - 0.2\gamma_R v_R)/0.8]^2/c^2}} = 0.47\ c \tag{19}$$

f) (4 pt)
On veut comparer la vitesse moyenne totale avec v_{lim}. Par définition, la vitesse moyenne est le rapport entre la distance totale parcourue et le temps total ($= t_E$ si on pose $t_A = 0\,\mathrm{s}$).

On sait que pendant un temps $\Delta t_{CA} + \Delta t_{exp}$, la fusée voyage à une vitesse $v_{F1} = 0.72\,c$. Il reste à trouver le temps restant, c'est à dire $\Delta t_{ral} = t_E - (\Delta t_{CA} + \Delta t_{exp})$. Pour trouver ce temps, on revient à la définition de S_{F1-P} :

$$\Delta t_{exp}(v_{F1} + c) + \Delta t_{ral}(v_{F1-ap} + c) = S_{F1-P} \tag{20}$$

$$\Longrightarrow \Delta t_{ral} = \frac{S_{F1-P} - \Delta t_{exp}(v_{F1} + c)}{v_{F1-ap} + c} = 3.60\ \mathrm{s} \tag{21}$$

On peut par ailleurs trouver la distance totale parcourue :

$$D_{tot} = v_{F1}(t_C + \Delta t_{exp}) + v_{F1-ap}\Delta t_{ral} = 5.37 \cdot 10^9\ \mathrm{m} \tag{22}$$

Et en connaissant le temps total ($t_E = \Delta t_{CA} + \Delta t_{exp} + \Delta t_{ral}$), on trouve donc la vitesse moyenne :

$$v_{moy} = \frac{D_{tot}}{t_E} = 0.69\,c \quad < \quad v_{lim} \tag{23}$$

La fusée $F1$ ne recevra pas d'amende.

Exercice 2 (25 points)

Une startup de l'EPFL développe une nouvelle boisson, qui est obtenue à partir de jus à l'état solide contenu dans un gobelet. La chaleur Q nécessaire pour fondre le jus solide est fournie par un gaz à la température T_g qui est comprimé de manière isotherme. Le gaz (n moles) est contenu dans un cylindre, fermé par un piston (surface A) qui peut coulisser sans frottement à l'intérieur du cylindre. Les parois du cylindre et le piston sont rigides et ne permettent pas d'échange de matière avec l'extérieur, qui est à la pression p_{atm}. Le gaz est comprimé à partir d'un état initial de volume V_i jusqu'à un état final de volume V_f, où $V_f < V_i$. Dans l'état initial et final, le piston est à l'équilibre mécanique. L'équipe de R&D de la startup, dont vous faites partie, étudie différents gaz et différentes transformations isothermes.

Considérez un gaz parfait qui subit une compression isotherme réversible entre l'état initial et final.

a) Exprimez la chaleur échangée $Q_{id,rev}$ lors d'une transformation isotherme réversible en fonction de T_g, V_i, V_f et n.

Considérez ensuite un gaz parfait qui subit une compression isotherme irréversible entre l'état initial et final. La transformation isotherme irréversible est obtenue à partir de l'état initial en appliquant sur le piston une force F qui reste constante jusqu'à l'obtention de l'état final.

b) Déterminez la pression du gaz à l'état initial et final en fonction de F, p_{atm} et A. Exprimez la chaleur échangée $Q_{id,irrev}$ lors de la transformation isotherme irréversible en fonction de T_g, V_i, V_f et n.

Considérez les deux transformations des points a) et b).

c) Montrez que $|Q_{id,irrev}| > |Q_{id,rev}|$.

Considérez ensuite un gaz réel qui subit une compression isotherme réversible entre l'état initial et final. Faites l'hypothèse que le gaz réel soit décrit par l'équation de Van der Waals, où on néglige les interactions à longue distance entre les molécules du gaz.

d) Exprimez la chaleur échangée $Q_{reel,rev}$ en fonction de T_g, V_i, V_f et n, dans le cas ou $T_g > T_c$, avec T_c la température critique du gaz.
e) Montrez que $|Q_{reel,rev}| < |Q_{id,rev}|$ et donnez une explication physique qualitative.

Considérez enfin le même gaz réel qui subit une compression isotherme réversible entre l'état initial et final dans le cas ou $T_g < T_c$, avec T_c la température critique du gaz.

f) Représentez qualitativement la compression isotherme dans un diagramme $p - V$ dans le cas où la pression à l'état final est plus petite que la pression de vapeur saturante à la température T_g.
g) Représentez qualitativement la compression isotherme dans un diagramme $p-V$ dans le cas où la pression à l'état final est plus grande que la pression de vapeur saturante à la température T_g.

Indications : Solution générale de l'intégrale $\int \frac{1}{\alpha x+\beta}dx = \frac{1}{\alpha}\ln(\alpha x+\beta)$

Corrigé

a) (4 pt)
Le premier principe de la thermodynamique énonce :

$$\Delta U = Q - W.$$

Le travail fait par le système (le gaz), dans le cas d'une transformation réversible, s'exprime comme :

$$\delta W = +pdV. \tag{24}$$

Puisque la température reste constante, nous avons $\Delta U = 0$ et donc $Q = W$, ce qui nous permet de calculer la chaleur en utilisant l'équation précédente, comme :

$$Q_{id,rev} = W = \int pdV = nRT_g \ln\left(\frac{V_f}{V_i}\right) \tag{25}$$

b) (5 pt)
Encore une fois, puisque les températures initiale et finale sont les mêmes, $\Delta U = 0$ et $Q = W$. Donc, pour calculer la chaleur on peut calculer le travail W. Différemment qu'au point précèdent, il faut noter que, comme la transformation n'est pas réversible, on ne peut pas utiliser l'Eq. 24. Tout d'abord, on peut remarquer que à l'état initial, la force externe due a la pression atmosphérique est équilibrée par la force due à la pression du gaz, donc :

$$p_i = p_{ext}.$$

Instantanément, une force F est appliquée sur le piston en perturbant l'équilibre initial. Cette force est constante jusqu'à l'obtention de l'état finale d'équilibre. Le travail total fait par la force F et la pression atmosphérique sur le piston est :

$$W_f = (\mathbf{F} + p_{atm} \cdot A)\Delta\mathbf{z}.$$

En suivant la direction de z indiquée sur la figure on obtient l'expression suivante du travail :

$$W_f = -(F + p_{atm} \cdot A)\Delta z.$$

Le travail fait par le système est donc de signe opposé $W_s = -W_f$:

$$W_s = (F + p_{atm} \cdot A)\Delta z$$

À la fin de la compression, l'équilibre des forces suivant doit s'appliquer sur le piston :

$$F + p_{atm} \cdot A = p_f \cdot A$$

en utilisant la loi des gaz parfaits

$$p_f = \frac{nRT_g}{V_f},$$

en substituant dans l'équation du travail ci-dessus, on obtient

$$Q_{id,irrev} = p_f \cdot A \cdot \Delta z = \frac{nRT_g}{V_f} \cdot (V_f - V_i).$$

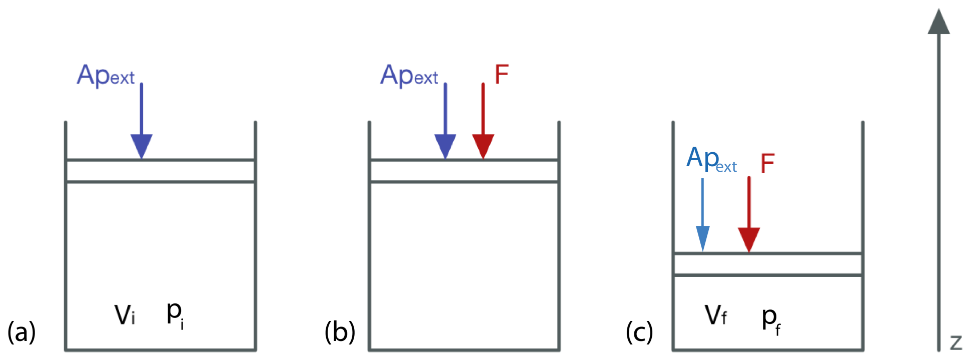


FIGURE 3 – (a) État d'équilibre initial avec uniquement la force due à la pression atmosphérique. (b) L'équilibre est perturbé en rajoutant un force F. (c) État d'équilibre final.

c) (3 pt)
Les deux équations finales trouvées dans les points précédents sont :

$$Q_{id,rev} = nRT_g \ln\left(\frac{V_f}{V_i}\right)$$

$$Q_{id,irrev} = nRT_g \cdot (1 - V_i/V_f)$$

On définit le le ratio $x = V_i/V_f > 1$. Si nous traçons les deux équations en fonction de ce ratio on obtient le graphique montré en Fig. 4. Puisque $V_f < V_i$, le ratio $x = V_i/V_f$ entre les deux volumes est supérieur à 1, on considère le graphique dans la région $x > 1$. On voit clairement que $|Q_{id,irrev|}$ est supérieur à $|Q_{id,rev}|$.

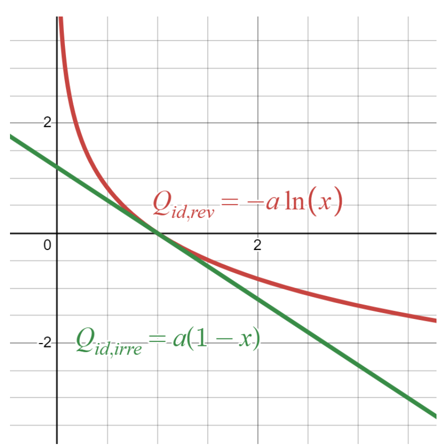


FIGURE 4 – Comparaison de deux chaleurs $Q_{id,rev}$ et $Q_{id,irrev}$ en fonction du paramètre $x = V_i/V_f > 1$.

d) (5 pt)
L'équation générale des gaz réels de Van der Waals est donnée par :

$$p = \frac{RT}{V/n - b} - \frac{a}{(V/n)^2}$$

où n est le nombre de moles et b est le volume occupé par une mole, a est une constante qui dépend du gaz, et qui rajoute dans l'équation l'effet des interactions à longue distance entre les molécules de gaz. Comme spécifié dans énoncé, on ignore les interactions à longue distance en imposant $a = 0$ dans l'Eq. de gaz réels de Van der Waals.
De la même manière que pour la partie a), comme la transformation est réversible, et en résolvant l'intégrale, le travail peut être réécrit comme :

$$Q_{reel,rev} = W = \int pdV = \int \frac{RT_g}{V/n - b} dV = nRT_g \ln\left(\frac{V_f/n - b}{V_i/n - b}\right). \tag{26}$$

e) (4 pt)
Encore une fois, les deux équations doivent être comparées directement

$$Q_{reel,rev} = nRT_g \ln\left(\frac{V_f/n - b}{V_i/n - b}\right) = nRT_g \ln\left(\frac{V_f - nb}{V_i - nb}\right) \tag{27}$$

et

$$Q_{id,rev} = nRT_g \ln\left(\frac{V_f}{V_i}\right)$$

Nous pouvons réécrire l'équation suivante et la démontrer :

$$\frac{V_f}{V_i} > \frac{V_f - nb}{V_i - nb}.$$

Puisque $V_i - nb$ et V_i sont positifs, on peut réécrire

$$V_f \cdot (V_i - nb) > (V_f - nb) \cdot V_i \qquad V_f V_i - nbV_f > V_f V_i - nbV_i$$

Sachant que b est positif, on obtient

$$V_f < V_i,$$

qui est consistant avec les données du problème. Une explication physique qualitative est la suivante et qui donc prouve l'inégalité. La correction de volume $(-nb)$ dans le cas de Van der Waals signifie que les molécules de gaz occupent déjà une partie du volume, ce qui rend l'espace restant inférieur à ce qu'il serait dans l'hypothèse d'un gaz idéal. Cela réduit effectivement le volume « compressible ». Par conséquent, le travail nécessaire pour comprimer le gaz dans le cas de Van der Waals est moindre car nous comprimons un volume effectif plus petit.

f) (2 pt) Pour un gaz réel, le diagramme p-V général est montré en Fig. 5, où p_E est la pression de vapeur saturante. La saturation se produit uniquement si le gaz est à une température T inférieure à la température critique T_c.

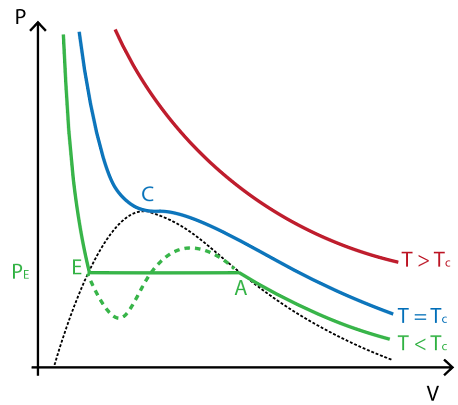
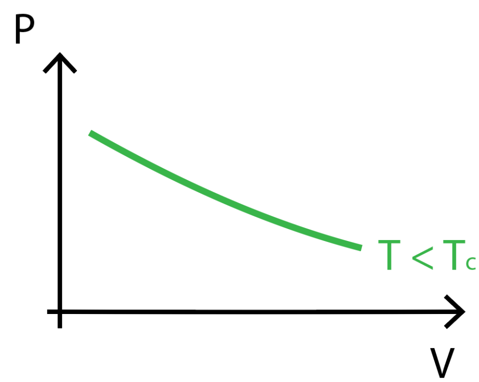
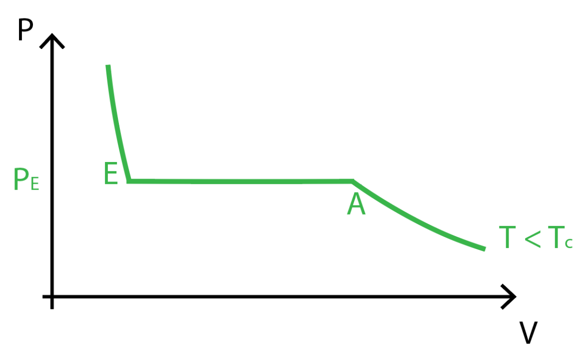


FIGURE 5 – Diagramme p-V pour une transformation isotherme d'un gaz réel. T_c indique la température critique.

Pour cette question, il est indiqué que la température du gaz T_g est inférieure à T_c et que la pression finale est inférieure à p_E. Par conséquent, le graphique est simplement :



g) (2 pt)
Dans ce cas, la pression finale est plus élevée que celle de saturation, donc le point E a été atteint et le gaz se liquéfie complètement. Le graphique inclut la phase de liquéfaction.



Exercice 3 (25 points)

Un cycle moteur, composé des trois transformations suivantes considérées comme réversibles, est effectué par 100 moles d'un gaz parfait monoatomique :

1) A $\Rightarrow$ B : transformation isobare depuis [$T_A = 600$ K, $V_A = 1$ m^3] jusqu'à $V_B = 2$ m^3.
2) B $\Rightarrow$ C : transformation isochore.
3) C $\Rightarrow$ A : transformation isotherme.

Les états A, B et C sont des états d'équilibre.

a) Calculez les valeurs (T, p, V) du gaz aux états A, B, C. Ensuite, tracez le cycle dans un diagramme $p - V$ en indiquant le sens dans lequel chaque transformation est parcourue.
b) Calculez le travail et la chaleur échangée lors de chaque transformation 1), 2), 3), ainsi que pour le cycle complet. Évaluez ensuite le rendement du cycle moteur.

Un inventeur développe un cycle moteur entre les mêmes états d'équilibre A, B, C. Les transformation 1) et 2) restent les mêmes, mais la transformation 3) est modifiée pour obtenir un rendement, prétendu par l'inventeur, de 60%.

c) Démontrez que l'inventeur se trompe, en sachant que la température T du gaz lors de la transformation 3) modifiée par l'inventeur est telle que $T_A \leq T \leq T_B$.

Lors de la transformation 2), la chaleur est échangée entièrement et uniquement avec un métal 1, qui contient $n_{m1} = 360/17$ moles du métal, et qui se trouve à la température initiale de 173 K quand le gaz se trouve à l'état B. Le métal 1 a les propriétés suivantes : température de fusion $T_{f1} = 273$ K, chaleur spécifique molaire à l'état solide $c_{s1} = 3R$, chaleur spécifique molaire à l'état liquide $c_{l1} = 5R$, chaleur latente molaire de fusion $L_{f1} = 8300$ J/mol.

d) À la fin de la transformation 2), le métal 1 s'est-il chauffé ou refroidi ? Y-a-t il eu une transformation de phase ? Calculez la température du métal 1 à la fin de la transformation 2).

Considérez dans la suite un métal 2 qui a les propriétés suivantes : température de fusion $T_{f2} = 273$ K, chaleur spécifique molaire à l'état solide qui dépend de la température $c_{s2}(T) = (R/50) \times (T - 123)$ avec T en Kelvin et c_{S2} en J/mol/K, chaleur spécifique molaire à l'état liquide $c_{l2} = 5R$, chaleur latente molaire de fusion $L_{f2} = 8300$ J/mol. Lors de la transformation 2), la chaleur est échangée entièrement et uniquement avec $n_{m2} = 100$ moles de ce métal, qui se trouve à la température initiale de 173 K quand le gaz se trouve dans l'état B au premier cycle.

e) Lors du premier cycle, à la fin de la transformation 2), le métal s'est-il chauffé ou refroidi ? Y-a-t il eu une transformation de phase ? Calculez la température du métal 2 à la fin de la transformation 2) ainsi que son changement d'entropie.
f) Calculez le nombre maximal de cycles complets ABCA que l'on peut effectuer.

Indications : Constante universelle des gaz parfaits $R = 8.3$ J/mol/K.

Corrigé

a) (4 pt)

Nous pouvons calculer toutes les valeurs de p, V, T aux points A, B, C comme ceci :

1) Expansion isobare **A ⇒ B** :

Si la pression est constante :

$$\frac{V_A}{T_A} = \frac{V_B}{T_B} => T_B = \frac{V_B}{V_A} T_A = 1200 \text{ K}. \quad (28)$$

Et nous pouvons trouver la pression en utilisant la loi des gaz parfaits :

$$p_A = p_B = \frac{nRT_A}{V_A} \simeq 5 \cdot 10^5 \text{ Pa}. \quad (29)$$

2) Transformation isochore **B ⇒ C** :

Le processus 3) étant isotherme, nous pouvons affirmer que $T_C = T_A = 600$ K.

Si le volume est constant :

$$\frac{p_B}{T_B} = \frac{p_C}{T_C} => p_C = \frac{T_C}{T_B} p_B = 2.5 \cdot 10^5 \text{ Pa}. \quad (30)$$

Et, donné dans la question :

$$V_C = V_B = 2 \text{ m}^3, \quad (31)$$

Ainsi, nous avons les valeurs suivantes :

	A	B	C
p [Pa]	$5 \cdot 10^5$	$5 \cdot 10^5$	$2.5 \cdot 10^5$
V [m^3]	1	2	2
T [K]	600	1200	600

En utilisant ces valeurs, nous pouvons tracer le diagramme P-V, donné sur la figure 6.

Indication : Dans cette partie, ainsi que dans toutes les parties futures de l'exercice, toutes les réponses calculées soit avec $R = 8.3$ J/mol/K, soit $R = 8.31$ J/mol/K, soit avec la valeur arrondie de la pression de la partie a) ($p_A = p_B = 4.98 \cdot 10^5 \simeq 5 \cdot 10^5$) sont acceptées comme réponses correctes.

b) (7 pt)

Calculons le travail effectué et la chaleur de chaque processus :

1) Expansion isobare **A ⇒ B** :

Le travail est donné par :

$$W_{AB} = \int_A^B p\,dV = p_A(V_B - V_A) = 5 \cdot 10^5 \text{J}, \quad (32)$$

L'énergie interne est donnée par :

$$\Delta U_{AB} = \frac{3}{2} nR(T_B - T_A) = 7.5 \cdot 10^5 \text{J}, \quad (33)$$

Ainsi, en utilisant le premier principe de la thermodynamique :

$$Q_{AB} = W_{AB} + \Delta U_{AB} = 12.5 \cdot 10^5 \text{J}. \quad (34)$$

Notez que la chaleur échangée aurait pu être calculer en utilisant directement $\delta Q = nC_p dT$, ou C_p est calculé pour un gaz idéal mono-atomique.

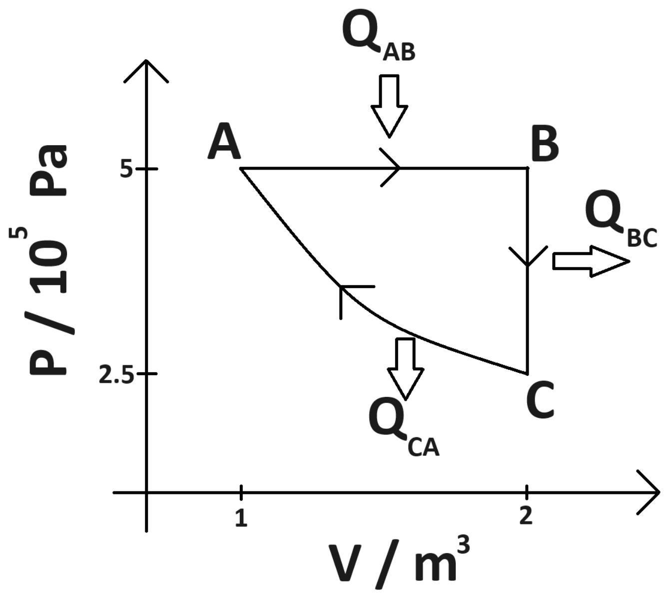


FIGURE 6 – Schéma pour la question a)

2) Transformation isochore **B** $\Rightarrow$ **C** :
Le travail est nul par la définition :

$$W_{BC} = 0, \tag{35}$$

L'énergie interne est :

$$\Delta U_{BC} = \frac{3}{2} nR(T_C - T_B) = -7.5 \cdot 10^5 \text{J}, \tag{36}$$

La chaleur vaut donc :

$$Q_{BC} = W_{BC} + \Delta U_{BC} = -7.5 \cdot 10^5 \text{J}. \tag{37}$$

Notez que, comme au point précèdent, la chaleur échangée aurait pu être calculer en utilisant directement $\delta Q = nC_V dT$, ou C_V est calculé pour un gaz idéal mono-atomique.

3) Transformation isotherme **C** $\Rightarrow$ **A** :
Dans la transformation isotherme, le travail peut être calculé comme suit :

$$W_{CA} = \int_C^A p\, dV = \int_C^A \frac{nRT}{V}\, dV = \int_C^A \frac{P_C V_C}{V}\, dV = P_C V_C ln\left(\frac{V_A}{V_C}\right) \tag{38}$$

$$= -3.5 \cdot 10^5 \text{J}, \tag{39}$$

L'énergie interne est nulle par la définition :

$$\Delta U_{CA} = 0, \tag{40}$$

qui nous permet de calculer la chaleur :

$$Q_{CA} = W_{CA} + \Delta U_{CA} = -3.5 \cdot 10^5 \text{J}. \tag{41}$$

Le travail total est donné par :

$$W_{tot} = W_{AB} + W_{BC} + W_{CA} = 1.5 \cdot 10^5 \mathrm{J}, \tag{42}$$

et la chaleur totale :

$$Q_{tot} = Q_{AB} + Q_{BC} + Q_{CA} = 1.5 \cdot 10^5 \mathrm{J}. \tag{43}$$

Nous pouvons finalement calculer le rendement en divisant le travail total par la chaleur donnée au système :

$$\eta = \frac{W_{tot}}{Q_{AB}} = 0.12 = 12\%. \tag{44}$$

c) (1.5 pt)

Le rendement maximale dans tout cycle thermodynamique est donnée par le rendement de Carnot :

$$\eta_{carnot} = 1 - \frac{T_C}{T_H} = 0.5 = 50\%. \tag{45}$$

Ainsi, le scientifique n'a pas pu obtenir une valeur de 60%.

d) (4 pt)

La chaleur dégagée par le processus BC est la chaleur reçue par le métal, donc : $Q_{BC} < 0 => Q_{m1} = -Q_{BC} > 0$, ainsi, le métal va se réchauffer.
Chaleur nécessaire pour élever la T à $0C^{\circ}$:

$$Q_{-100->0} = n_{m1} c_{s1} \Delta T_1 = 5.27 \cdot 10^4 \mathrm{J}. \tag{46}$$

Parce que la chaleur nécessaire pour atteindre zéro degré Celsius est inférieure à celle donnée au métal : $Q_{-100->0} < Q_{m1}$, il doit y avoir une transition de phase.
La chaleur nécessaire pour une transformation est :

$$Q_{s->l} = n_{m1} L_{f1} = 1.76 \cdot 10^5 \mathrm{J}. \tag{47}$$

Parce que la chaleur nécessaire pour monter la température à zéro et faire fondre le bloc entier est inférieure à la chaleur donnée au métal :$Q_{s->l} + Q_{-100->0} < Q_{m1}$, la température continuera à augmenter dans la phase liquide.
La chaleur transférée au bloc en phase liquide est :

$$Q_{0->T} = Q_{m1} - Q_{s->l} - Q_{-100->0} = 5.21 \cdot 10^5 \mathrm{J}. \tag{48}$$

Ainsi, on peut trouver une différence de température :

$$Q_{0->T} = n_{m1} c_{l1} \Delta T_2 => \Delta T_2 = \frac{Q_{0->T}}{n_{m1} c_{l1}} = 593\,^{\circ}C. \tag{49}$$

Et donc la température finale est : $\Delta T_2 = T_f - 0^{\circ}C => T_f = 593\,^{\circ}C = 866\mathrm{K}$.
On voit que la température T_f est supérieure à T_C, ce qui n'est pas possible, puisque ceci viole le deuxième principe. Pour tenir compte de cela et trouver la bonne température T_f', nous devons prendre en compte la chaleur du gaz dans le processus BC.
Nous pouvons assimiler toute la chaleur du système :

$$Q_{-100->0} + Q_{s->l} + Q_{0->T'} + Q_{gaz} = 0, \tag{50}$$

où $Q_{0->T'} = n_{m1}c_{l1}(T_f^{'} - 273\text{K})$ est la chaleur nécessaire pour que le métal atteigne une température d'équilibre $T_f^{'}$. Et où $Q_{gas} = 3/2nR(T_f^{'} - T_B)$ est la chaleur du gaz pour atteindre une température d'équilibre.
Ainsi, on peut trouver le $T_f^{'}$:

$$T_f^{'} = \frac{\frac{3}{2}nRT_B + n_{m1}c_{l1} \times 273\text{K} - Q_{-100->0} - Q_{s->l}}{n_{m1}c_{l1} + \frac{3}{2}nR} \simeq 709\text{K}. \tag{51}$$

e) (5.5 pt)
Pour la même raison qu'à la partie d) : $Q_{BC} < 0 => Q_{m2} = -1 \times Q_{BC} > 0 =>$ le métal va se réchauffer.
Parce que la chaleur spécifique molaire dépend de la température, pour calculer correctement la chaleur il faut trouver toutes les contributions de tous les petits changements de température : $dQ_{-100->0} = n_{m2}c_{s2}dT$.
Et nous devons donc faire l'intégration :

$$Q_{-100->0} = \int_{T_1}^{T_2} n_{m2}\frac{R}{50}(T - 123\text{K})\,dT = \frac{n_{m2}R}{100}(T_2^2 - T_1^2) - \frac{123\text{K} \times n_{m2}R}{50}(T_2 - T_1) \simeq$$

$$\simeq 1.66 \cdot 10^5\text{J}. \tag{52}$$

Comme on peut le voir, la chaleur nécessaire pour atteindre zéro degré est inférieure à la chaleur donnée au métal : $Q_{m2} > Q_{-100->0} =>$ il y a une transformation de phase. La chaleur nécessaire pour faire fondre le bloc est :
$Q_{s->l} = n_{m2}L_{f2} = 8.3 \cdot 10^5\text{J}$.
Vu que $Q_{s->l} = 8.3 \cdot 10^5\text{J} > Q_{m2} - Q_{-100->0} = 5.84 \cdot 10^5\text{J}$, il y aura une fusion partielle et $T_f = 0°$.
Partie à l'état liquide après fusion :

$$n_f = \frac{Q_{m2} - Q_{-100->0}}{L_{f2}} = 70 \text{ moles}. \tag{53}$$

La variation d'entropie en augmentant la température jusqu'à zéro est :

$$\Delta S_{-100->0} = \int \frac{dQ_{-100->0}}{T} = \int_{T_1}^{T_2} \left(\frac{n_{m2}R}{50} - \frac{123n_{m2}R}{50T}\right) dT =$$

$$\frac{n_{m2}R}{50}(T_2 - T_1) - \frac{123n_{m2}R}{50}\ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) = 730 \text{ J/K} \tag{54}$$

Et la variation d'entropie lors de la fusion est donnée par :

$$\Delta S_{s->l} = \frac{Q_{m2} - Q_{-100->0}}{T} = 2140 \text{ J/K}, \tag{55}$$

Donc l'entropie totale :

$$\Delta S_{tot} = 2870 \text{ J/K}. \tag{56}$$

f) (3 pt)

$T_{max} = 600\text{K} = 327\,^{\circ}C$ parce que après avoir atteint cette T_{max}, le métal commencerait à donner de la chaleur au processus 2) et donc le cycle va s'arreter. La chaleur échangée pour atteindre cette température :

$$Q_{tot} = Q_{-100->0} + Q_{s->l} + Q_{0->327} \simeq 2.36 \cdot 10^6\text{J}, \tag{57}$$

Où on a utilisé : $Q_{0->327} = n_{m2} c_{l2} \Delta T = 1.36 \cdot 10^6\text{J}$.
Ainsi, un nombre maximum de cycles :

$$i_{max} = \frac{Q_{tot}}{Q_{BC}} = 3.15. \tag{58}$$

Ainsi, puisque le nombre de cycles doit être un nombre entier (comme demande aa dans cette question), le nombre maximum et 3.

Exercice 4 (25 points)

Rentré à la maison après le cours, Ivo veut cuisiner un steak de tofu. Le steak est un parallélépipède à base carrée (superficie de la base $A = 40$ cm^2 et hauteur $L = 2$ cm). Ivo dépose le steak sur une plaque chauffante horizontale à la température $T_p = 80\,°\mathrm{C}$. La surface inférieure du steak en contact avec la plaque chauffante atteint instantanément l'équilibre thermique avec celle-ci. L'air ambiant autour du steak est à la température $T_{ext} = 20\,°\mathrm{C}$.

a) Calculez la température de la surface supérieure du steak, T_s, dans le cas où celle-ci échange de la chaleur par convection avec l'air ambiant (négligez l'échange de chaleur par rayonnement).

b) Calculez le flux de chaleur et la puissance thermique fournis par la plaque chauffante dans les conditions de la question a).

c) Calculez la température de la surface supérieure du steak, T_s, dans le cas où celle-ci échange de la chaleur par convection avec l'air ambiant ainsi que par rayonnement, en sachant qu'une puissance nette (somme de puissance émise et absorbée) de $P_{ray} = 0.3\,W$ est perdue par rayonnement par le steak.

N'étant pas satisfait de la cuisson obtenue avec la plaque chauffante, Ivo utilise un four à micro-ondes d'une puissance thermique P, qui est complètement et uniformément absorbée dans le tofu. L'air ambiant autour du steak est à la température $T_{ext} = 20\,°\mathrm{C}$ et le steak est tenu à l'horizontale à l'aide de deux broches fixées dans ses surfaces verticales.

d) Calculez la puissance P nécessaire pour que les deux surfaces horizontales du steak soient à $80\,°\mathrm{C}$ dans le cas où ces deux surfaces échangent de la chaleur par convection avec l'air ambiant (négligez l'échange de chaleur par rayonnement).

Définissez x la coordonnée selon l'axe perpendiculaire à la base du steak, telle que $x = L/2$ au niveau de la surface supérieure et $x = -L/2$ au niveau de la surface inférieure.

e) Montrez que dans les conditions de la question d), la température du tofu est décrite par l'équation :

$$T(x) = T_{ext} + \bar{\omega}L/(2h) + \bar{\omega}/(2\kappa_t) \times [(L/2)^2 - x^2],$$

où $\bar{\omega} = P/(A \times L)$.

f) En utilisant l'équation $T(x)$ ci-dessus, représentez la distribution de la température du tofu en fonction de la coordonnée x en identifiant les températures aux deux surfaces et au centre du steak.

Indications : On suppose que le transfert de chaleur se fait en régime stationnaire. Le steak est traité en géométrie plane infinie et sa base est à l'horizontale. Tout transport de chaleur à travers les surfaces verticales du steak est négligé. Conductivité thermique du tofu $\kappa_t = 0.38$ W/m/K. Coefficient de transfert de la chaleur par convection tofu-air $h = 65$ W/ (m^2 K).

a) (5 pt)
Dans le cas stationnaire, la puissance absorbée par conduction depuis la plaque est la même que la puissance perdue par convection avec l'air ambiant. Donc, nous pouvons écrire

$$\frac{\kappa_t A}{L}(T_p - T_s) = hA(T_s - T_{ext}), \tag{59}$$

où le terme à gauche est la puissance absorbée par conduction et le terme à droite est la puissance perdue par convection. En isolant T_s, on obtient :

$$T_s = \frac{LhT_{ext} + \kappa_t T_p}{\kappa_t + Lh} \simeq 306.7\,K \tag{60}$$

ou en degrés Celisus $T_s = 33.6\,°C$.

b) (3 pt)
La puissance thermique fournie par la plaque est donnée par :

$$P = \frac{\kappa_t A}{L}(T_p - T_s) \simeq 3.5\,W, \tag{61}$$

où nous avons utilisé le résultat de l'exercice précédent. Le flux de chaleur (Φ) est la puissance par unité de surface. Donc on écrit :

$$\Phi = \frac{P}{A} = \frac{\kappa_t}{L}(T_p - T_s) \simeq 882\,W/m^2. \tag{62}$$

c) (5 pt)
La résolution du problème est lq même que l'exercice précédent, mais maintenant nous devons considérer la puissance émise par rayonnement P_{ray}. Donc, on peut écrire l'équation (59) en ajoutant le terme de rayonnement à droite

$$\frac{\kappa_t A}{L}(T_p - T_s) = hA(T_s - T_{ext}) + P_{ray}. \tag{63}$$

Donc, la température finale de la surface supérieure est

$$T_s = \frac{LhT_{ext} + \kappa_t T_p - \frac{P_{ray}L}{A}}{\kappa_t + Lh} \simeq 305.8\,K \tag{64}$$

ou en degrés Celisus $T_s = 32.7\,°C$.
Notez que la température est plus basse que dans l'exercice précédent. En effet, le steak de tofu perd également de la chaleur par rayonnement, et non plus seulement par convection. Cependant, cette puissance est faible et la température finale n'est inférieure que d'un degré par rapport à celle de l'exercice 4a.

d) (3 pt)
Dans ce cas, la puissance émise par le micro-ondes est complètement absorbée par les **deux** surfaces du steak, qui échange ensuite de la chaleur avec l'air par convection. On peut donc à nouveau utiliser la formule de la puissance échangée par convection et trouver la puissance nécessaire pour chauffer les deux surfaces à une température $T_s = 80^oC$

$$P = h(2A)(T_s - T_{ext}) = 31.2\,W. \tag{65}$$

Le facteur 2 dans la formule vient du fait que nous avons deux surfaces à chauffer.

e) (6 pt)
Nous commençons par écrire l'équation unidimensionnelle de la tempéraure dans le cas stationnaire ($\partial T/\partial t = 0$)

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + S = 0, \tag{66}$$

où S est le terme de source, donné par $S = P/(A\kappa_t L) \equiv \bar{\omega}/\kappa_t$.
Nous pouvons alors procéder à l'intégration de l'équation (66) :

$$\int dx \frac{\partial T}{\partial x} = -\int dx \frac{\bar{\omega}}{\kappa_t} \tag{67}$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = -\frac{\bar{\omega}}{\kappa_t}(x + C_1) \tag{68}$$

où C_1 est une constante d'intégration. Nous pouvons intégrer une autre fois pour obtenir la température :

$$T(x) = -\frac{\bar{\omega}}{\kappa_t}\left(\frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2\right) \tag{69}$$

où C_2 est une autre constante d'intégration. Maintenant, nous pouvons déterminer C_1 et C_2 en utilisant les conditions aux bords

$$\begin{cases} T(x = -L/2) = T_s \\ T(x = L/2) = T_s \end{cases} \tag{70}$$

T_s est donnée par l'exercice précédent par l'équation (65) :

$$T_s = T_{ext} + \frac{P}{2Ah} = T_{ext} + \frac{\bar{\omega}}{2h}L. \tag{71}$$

Ainsi, en insérant l'équation (71) dans l'équation (70), nous obtenons :

$$\begin{cases} -\frac{\bar{\omega}}{\kappa_t}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{L}{2}\right)^2 - C_1\frac{L}{2} + C_2\right] = T_{ext} + \frac{\bar{\omega}}{2h}L \\ -\frac{\bar{\omega}}{\kappa_t}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{L}{2}\right)^2 + C_1\frac{L}{2} + C_2\right] = T_{ext} + \frac{\bar{\omega}}{2h}L \end{cases} \tag{72}$$

Ainsi, si nous résolvons le système pour C_1 et C_2, nous pouvons obtenir :

$$\begin{cases} C_1 = 0 \\ C_2 = -\frac{1}{2}\left(\frac{L}{2}\right)^2 - \frac{\kappa_t}{\bar{\omega}}\left(T_{ext} + \frac{\bar{\omega}}{2h}L\right). \end{cases} \tag{73}$$

Donc, en insérant les C_1 et C_2 trouvés dans (69), nous obtenons :

$$T(x) = -\frac{\bar{\omega}}{\kappa_t}\left[\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{L}{2}\right)^2 - \frac{\kappa_t}{\bar{\omega}}\left(T_{ext} + \frac{\bar{\omega}}{2h}L\right)\right], \tag{74}$$

et donc

$$T(x) = T_{ext} + \frac{\bar{\omega}}{2h}L + \frac{\bar{\omega}}{2\kappa_t}\left[\left(\frac{L}{2}\right)^2 - x^2\right]. \tag{75}$$

f) (3 pt)
On observe que l'équation (75) est une parabole orientée vers le bas. Nous pouvons identifier les températures aux deux surfaces et au centre du steak par substitution. Donc, la température au centre du steak sera donnée par

$$T(x=0) = T_{ext} + \frac{\bar{\omega}}{2h}L + \frac{\bar{\omega}}{2\kappa_t}\left(\left(\frac{L}{2}\right)^2\right) \simeq 405\,K \;\simeq 132\,°C, \tag{76}$$

et la température aux deux surfaces sera

$$T(x=\pm L/2) = T_{ext} + \frac{\bar{\omega}}{2h}L \simeq 353\,K \simeq 80\,°C. \tag{77}$$

Notez que la température sur les cotés du steak est précisément celle indiquée par l'énoncé du problème.
Enfin, nous pouvons dessiner la température T en fonction de x (figures 7 et 8)

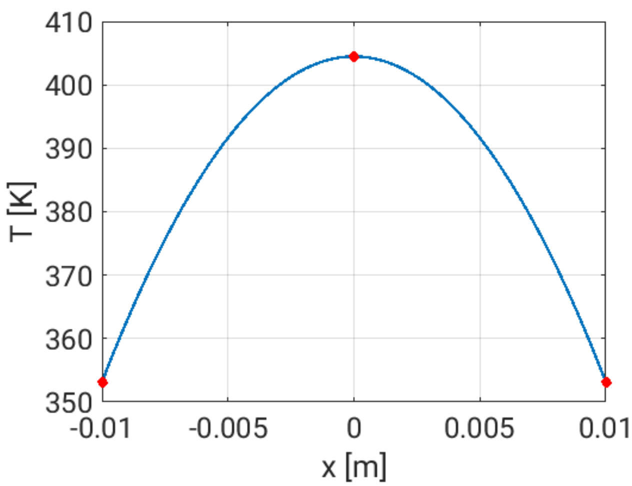


FIGURE 7 – Température (en Kelvin) en fonction de l'épaisseur du steak.

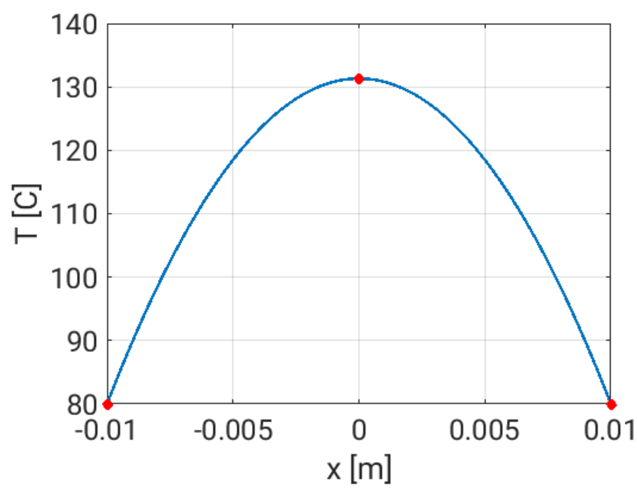


FIGURE 8 – Température (en Celsius) en fonction de l'épaisseur du steak.