

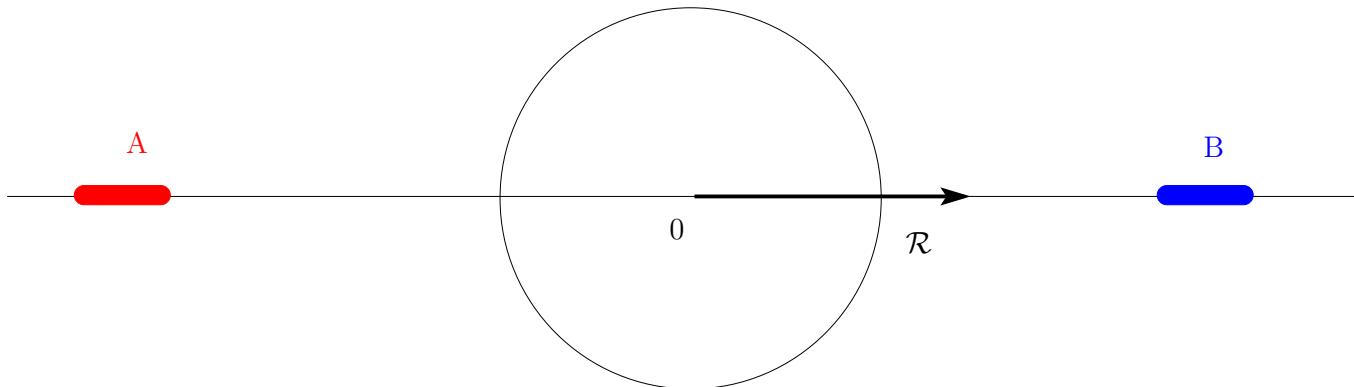
Cet examen comporte 5 exercices. Les exercices peuvent être traités dans n'importe quel ordre. Vous avez à disposition 5 feuillets, vous traiterez donc chaque exercice sur un feuillet distinct. Inscrivez votre nom sur tous les feuillets que vous rendez.

Exercice 1**(20 points au total)**

Sur une autoroute intergalactique rectiligne, deux voitures identiques circulent vers la Terre, à vitesse constante et dans des sens opposés. Les deux voitures et la Terre sont donc alignées. Un policier, au repos sur Terre, voit que la voiture A, venant depuis la gauche, roule à la vitesse maximale autorisée dans le référentiel terrestre tandis que la voiture B, venant depuis la droite, roule à $0.6c$. Le policier mesure la longueur des deux voitures : pour lui, A mesure 2.4 m et B mesure 3.2 m.

- Quelle est la longueur propre des voitures ?
 - Quelle est la vitesse maximale autorisée dans le référentiel terrestre ?
 - Quelle est la vitesse et la longueur de chaque voiture mesurées par le pilote de l'autre voiture ?
 - Combien de temps s'est-il écoulé entre l'émission du message et sa réception par le pilote de la voiture A, mesuré dans son référentiel ?
 - La voiture A n'arrive pas à freiner et s'écrase à pleine vitesse sur Terre. Son énergie cinétique est totalement dissipée en chaleur dans la glace terrestre ($m_{\text{glace}} = 4 \times 10^{15} \text{ kg}$) dont la température augmente de 10°C , cependant la glace ne fond pas. Quelle est la masse propre de la voiture ?
- Indications : Chaleur spécifique de la glace : $c_{\text{glace}} = 2046 \text{ J/kg/K}$. Vitesse de la lumière : $c = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$.

Corrigé



- a) (3 points)

Puisque les voitures sont identiques, il suffit de calculer la longueur propre d'une seule. On peut le faire à partir de la contraction des longueurs, mesurée par le policier sur Terre, pour la fusée venant de droite B :

$$L' = \frac{L_0}{\gamma} \Rightarrow L_{0,A} = L_{0,B} = L'_B \gamma_B = \frac{L'_B}{\sqrt{1 - v_B^2/c^2}} = 4 \text{ m},$$

avec

$$\gamma_B = \frac{1}{\sqrt{1 - v_B^2/c^2}} \simeq 1.25.$$

- b) (3 points)

Maintenant que l'on connaît la longueur propre de la voiture A, on peut calculer sa vitesse dans le

référentiel de la Terre :

$$L_{0,A} = L_{0,B} = L'_A \gamma_A = \frac{L'_B}{\sqrt{1 - v_B^2/c^2}} \Rightarrow \frac{v_A}{c} = \sqrt{1 - \left(\frac{L'_A}{L_{0,B}}\right)^2} = 0.8.$$

La vitesse maximale autorisée dans le référentiel de la Terre est $0.8c$.

c) (5 points)

La vitesse relative de la voiture B vue par le pilote de la voiture A est donnée par :

$$v_{B/A} = \frac{v_B - v_A}{1 - v_B v_A / c^2} = \frac{[0.6 - (-0.8)]c}{1 + 0.6 \times 0.8} \simeq 0.95c \quad \text{Attention au signe de } v_A !,$$

et la vitesse relative de la voiture A vue par le pilote de la voiture B est donnée par :

$$v_{A/B} = \frac{v_A - v_B}{1 - v_A v_B / c^2} \simeq -0.95c.$$

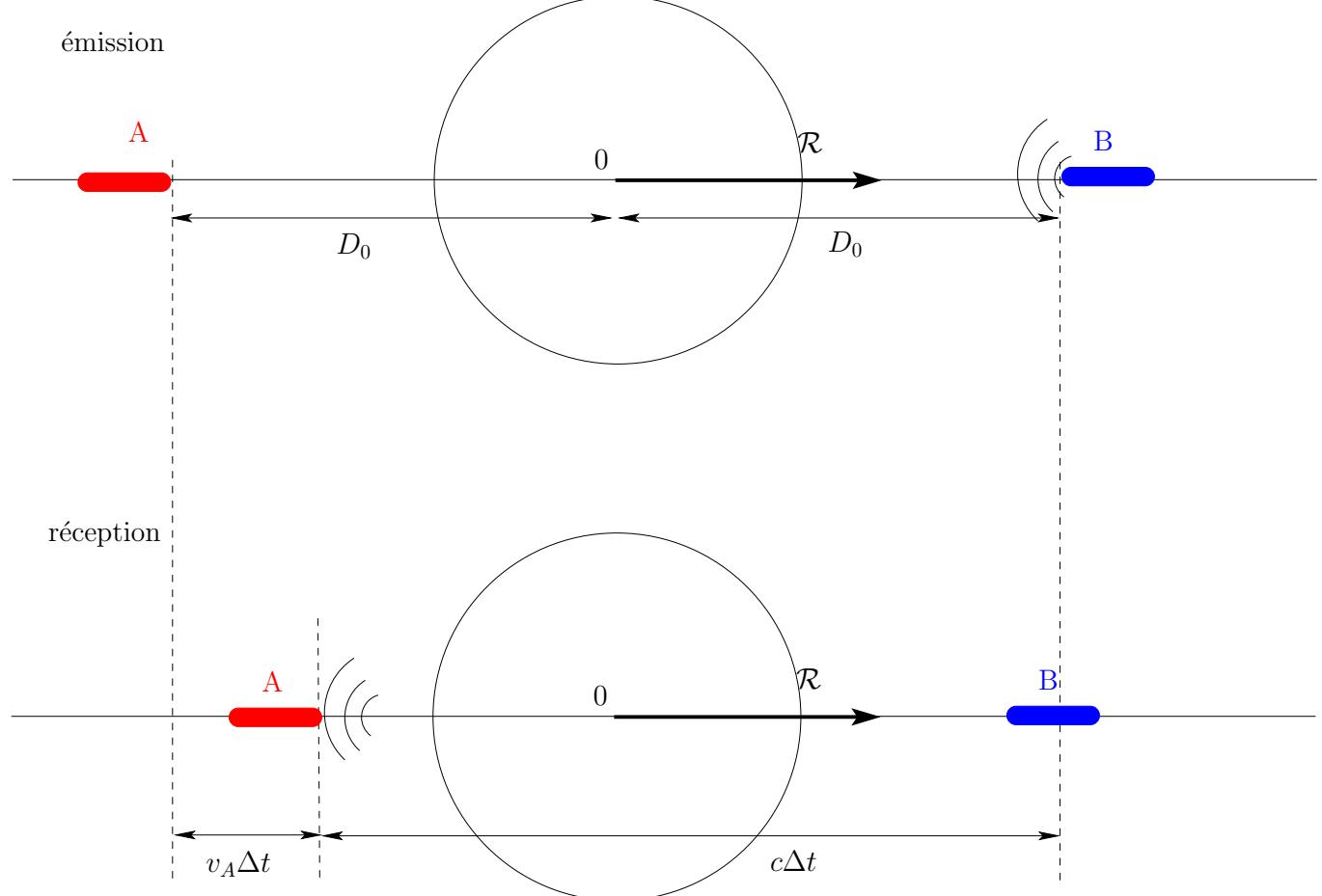
Etant donné que les voitures sont identiques, la longueur d'une voiture vue par le pilote de l'autre est la même :

$$L_{B/A} = L_{A/B} = \frac{L_{0,B}}{\gamma_{B/A}} = L_{0,B} \sqrt{1 - v_{B/A}^2/c^2} \simeq 1.29 \text{ m},$$

avec

$$\gamma_{B/A} = \frac{1}{\sqrt{1 - v_{B/A}^2/c^2}} \simeq 3.08.$$

d) (5 points)



Appelons D_0 la distance qui sépare les voitures de la Terre au moment de l'envoi du signal. Il s'agit ici de trouver le temps écoulé $\Delta t|_{\mathcal{R}'}$ entre deux événements : "émission du message" et "réception du message" mesuré par le conducteur de la voiture A dans son référentiel \mathcal{R}' .

Une manière de procéder est de calculer cet intervalle de temps dans le référentiel de la Terre (Δt) et ensuite utiliser les transformations de Lorentz pour le convertir dans le référentiel \mathcal{R}' .

Dans le référentiel de la Terre \mathcal{R} , la condition à satisfaire est que la distance parcourue par le signal ajoutée à la distance parcourue par A pendant Δt soit égale à deux fois la distance D_0 (voir figure) :

$$v_A \Delta t + c \Delta t = 2D_0 \quad \Rightarrow \quad \Delta t = \frac{2D_0}{v_A + c} \simeq 1 \text{ s}$$

Entre l'émission du signal et sa réception, la voiture A dans le référentiel \mathcal{R} , a parcouru la distance $\Delta x = v_A \Delta t \simeq 2.4 \times 10^8 \text{ m}$. Ainsi, vu que le référentiel de A, \mathcal{R}' , se déplace avec une vitesse $+v_A$ par rapport au référentiel \mathcal{R} , il est possible de transformer Δt dans \mathcal{R}' en appliquant la transformation :

$$\Delta t|_{\mathcal{R}'} = \gamma \left(\Delta t - \frac{v_A \Delta x}{c^2} \right) = \frac{1}{\sqrt{1 - 0.8^2}} \left(1 - \frac{0.8 \Delta x}{c} \right) \simeq 0.6 \text{ s}$$

e) (4 points)

L'énergie cinétique de la voiture A est donc donnée par

$$K = (\gamma_A - 1)m_A c^2,$$

avec $\gamma_A = \frac{1}{\sqrt{1-v_A^2/c^2}} \simeq 1.66$.

Cette énergie cinétique est entièrement gagnée par la glace donc

$$Q_{\text{recue}} = K = m_{\text{glace}} c_{\text{glace}} \Delta T \quad \Rightarrow \quad m_A = \frac{m_{\text{glace}} c_{\text{glace}} \Delta T}{(\gamma_A - 1)c^2}.$$

Application numérique :

$$m_A = m_B = \frac{4 \times 10^{15} \times 2046 \times 10}{(1.66 - 1) \times (3 \times 10^8)^2} \simeq 1360 \text{ kg.}$$

Exercice 2

(20 points au total)

On étudie le dispositif expérimental représenté sur la figure ci-contre. Une éprouvette indéformable, cylindrique (longueur $l = 10$ cm, rayon $r = 1$ cm) contenant de l'air humide est immergée dans un récipient contenant de l'eau. Le fond de l'éprouvette se trouve au niveau de la surface de l'eau du récipient. Le récipient est ouvert vers le haut et se trouve dans un labo à la pression atmosphérique $p_{\text{atm.}} = 1$ bar. Le dispositif expérimental est à l'équilibre et sa température est $T = 25^\circ\text{C}$. Dans cette situation, l'air humide occupe un volume correspondant à une hauteur $h = 9.5$ cm dans l'éprouvette. De plus, dans les conditions de l'expérience, la pression de vapeur d'eau est donnée par l'expression : $p_{\text{vap.}} = \alpha \times T + \beta$ avec $\alpha = 1.88 \times 10^{-3}$ bar/K et $\beta = -0.53$ bar.

- Enumérez les pressions qui déterminent l'équilibre mécanique entre l'air humide et l'eau dans l'éprouvette.
- Calculez le nombre de moles d'air et le nombre de moles de vapeur d'eau dans l'éprouvette.
- On augmente la température du dispositif expérimental et, une fois le nouvel équilibre atteint, on mesure la hauteur de l'air humide dans l'éprouvette pour en déduire la température.
- Calculez la température maximale que l'on peut mesurer avec cette méthode.
- Combien de moles d'eau sont évaporées à la température maximale ? Quelle quantité de chaleur est nécessaire pour les évaporer ?

Indications : Considérez l'air et la vapeur d'eau comme des gaz parfaits et négligez l'effet de la gravité sur l'air humide. Constante des gaz parfaits : $R = 8.314 \text{ J/K/mol}$. Chaleur latente d'évaporation de l'eau : $L_{\text{eau}} = 2256.4 \text{ kJ/kg}$. Densité de l'eau : $\rho_{\text{eau}} = 10^3 \text{ kg/m}^3$. 1 bar = 10^5 Pa . Masse molaire de l'eau : $M_{\text{H}_2\text{O}} = 18 \text{ g/mol}$.

Corrigé

Soit l la hauteur de l'éprouvette et h la hauteur dans l'éprouvette qu'occupe l'air humide.

a) (8 points)

Les pressions qui déterminent l'équilibre mécanique à l'interface entre l'air humide (air + vapeur d'eau) et l'eau dans l'éprouvette sont :

- La pression de l'air p_{air} contenu dans l'éprouvette donnée par la loi des gaz parfaits.
- La pression hydrostatique de l'eau $\Delta p = \rho_{\text{eau}} \times g \times h$.
- La pression de vapeur d'eau $p_{\text{vap.}}$ dans l'éprouvette qui dépend de la température de la vapeur selon l'équation de l'énoncé. Attention d'exprimer les coefficients en Pa ! $\alpha = 1.88 \times 10^2 \text{ Pa/K}$ et $\beta = -0.53 \times 10^5 \text{ Pa}$.
- La pression atmosphérique $P_{\text{atm.}}$ qui règne dans le labo.

b) (6 points)

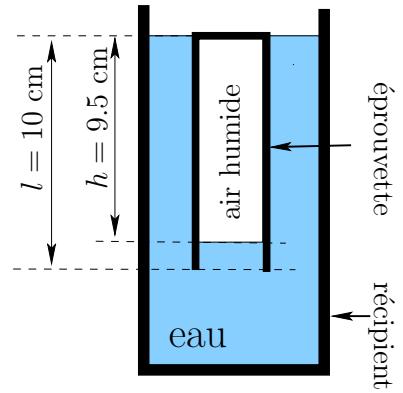
On nous dit qu'un équilibre thermodynamique entre l'air, la vapeur d'eau et l'eau est atteint : $T_{\text{air}} = T_{\text{vap.}} = T_{\text{eau}} = T = 25^\circ\text{C}$.

L'équilibre mécanique s'écrit :

$$\begin{aligned} p_{\text{atm.}} + \rho_{\text{eau}}gh &= p_{\text{air}} + p_{\text{vap.}}(T_{\text{vap.}}). \\ p_{\text{atm.}} + \rho_{\text{eau}}gh &= \frac{n_{\text{air}}RT_{\text{air}}}{V_{\text{air}}} + \alpha T_{\text{vap.}} + \beta \\ p_{\text{atm.}} + \rho_{\text{eau}}gh &= \frac{n_{\text{air}}RT}{V_{\text{air}}} + \alpha T + \beta, \end{aligned}$$

où la seule inconnue est le nombre de moles d'air que l'on peut isoler :

$$n_{\text{air}} = \frac{V_{\text{air}}}{RT} (p_{\text{atm.}} + \rho_{\text{eau}}gh - \alpha T - \beta).$$



Le nombre de moles de vapeur d'eau est donnée par la loi des gaz parfaits :

$$n_{\text{vap.}} = \frac{p_{\text{vap.}} V_{\text{vap.}}}{RT} = \frac{(\alpha T + \beta) V_{\text{vap.}}}{RT}.$$

Application numérique :

$$\begin{aligned} n_{\text{air}} &= \frac{\pi \times 0.01^2 \times 0.095}{8.314 \times 298} (1 \times 10^5 + 1 \times 10^3 \times 9.81 \times 0.095 - 1.88 \times 10^2 \times 298 + 0.53 \times 10^5) \\ &\simeq 1.2 \times 10^{-3} \text{ mol.} \end{aligned}$$

$$n_{\text{vap.}} = \frac{(1.88 \times 10^2 \times 298 - 0.53 \times 10^5) \times \pi \times 0.01^2 \times 0.095}{8.314 \times 298} \simeq 3.83 \times 10^{-5} \text{ mol.}$$

c) (4 points)

Que se passe-t-il quand on augmente la température de l'eau ? La pression de l'air humide augmente dans l'éprouvette, le niveau de l'eau dans l'éprouvette diminue et lorsque $h = l \Rightarrow \frac{l}{h} = 1$ (juste avant que l'air humide ne s'échappe), on a atteint la température maximale que l'on peut mesurer. En partant de nouveau de l'équation de l'équilibre mécanique où la seule inconnue est maintenant la température (puisque le nombre de mole d'air ne varie pas), on obtient :

$$T_{\text{max}} = \frac{p_{\text{atm}} + \rho_{\text{eau}} g l - \beta}{\frac{n_{\text{air}} R}{V_{\text{air}}} + \alpha}.$$

Application numérique :

$$T_{\text{max}} = \frac{1 \times 10^5 + 1 \times 10^3 \times 9.81 \times 0.1 + 0.53 \times 10^5}{\frac{1.2 \times 10^{-3} \times 8.314}{\pi \times 0.01^2 \times 0.1} + 1.88 \times 10^2} \simeq 308 \text{ K.}$$

Attention ! L'application numérique est très sensible à la valeur retenue pour n_{air} : avec $n_{\text{air}} = 1. \times 10^{-3} \text{ mol}$, on trouve $T_{\text{max}} \simeq 340 \text{ K}$.

d) (2 points)

Pour déterminer le nombre de moles d'eau qui ont été évaporées, il nous faut connaître la pression de vapeur d'eau dans l'éprouvette à la température $T = T_{\text{max}}$ que l'on calcule en utilisant la loi donnée. Le nombre de moles de vapeur d'eau, $n_{\text{vap.}}$, contenues dans le volume $V_{\text{epr.}}$ dans l'éprouvette, est donné par la loi des gaz parfaits :

$$n_{\text{vap.}} = \frac{p_{\text{vap.}}(T_{\text{max}}) V_{\text{epr.}}}{R T_{\text{max}}}.$$

La masse d'eau évaporée totale est donnée par $m_{\text{vap.}} = n_{\text{vap.}} \times M_{\text{H}_2\text{O}}$. On peut donc déduire la quantité d'énergie nécessaire pour évaporer $n_{\text{vap.}}$ moles d'eau est

$$Q_{\text{evap.}} = L_e m_{\text{H}_2\text{O}} = L_e \times M_{\text{H}_2\text{O}} \times \frac{p_{\text{vap.}}(T_{\text{max}}) V_{\text{epr.}}}{R T_{\text{max}}}.$$

Application numérique :

$$n_{\text{vap.}} = \frac{9.98 \times 10^3 \times \pi \times 0.01^2 \times 0.1}{8.314 \times 335} \simeq 5.99 \times 10^{-5} \text{ mol.}$$

$$Q_{\text{evap.}} = 2256.4 \times 10^3 \times 18 \times 10^{-3} \times 1.12 \times 10^{-4} \simeq 2.43 \text{ J,}$$

où $p_{\text{vap.}}(T_{\text{max}}) = 0.0488 \text{ bar}$.

Exercice 3

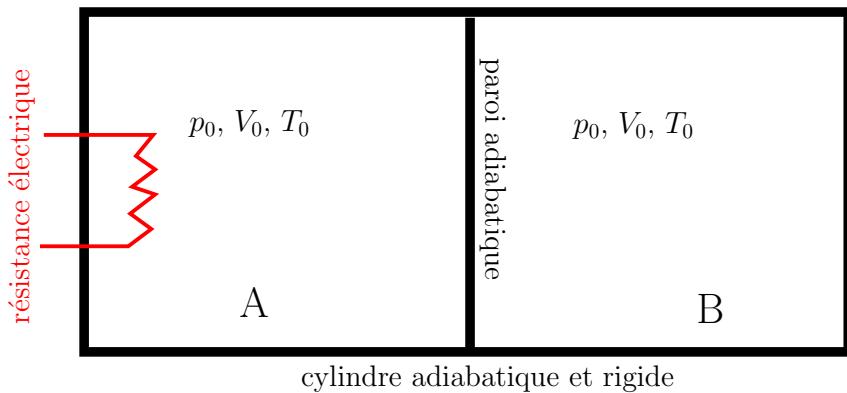
(20 points au total)

Un cylindre horizontal isolé thermiquement et fermé, est séparé en 2 chambres A et B par un piston qui isole thermiquement les deux chambres entre elles. Le piston peut bouger sans frottement et son épaisseur et sa masse sont négligeables. Dans la configuration initiale, les deux chambres contiennent le même gaz idéal (caractérisé par C_p , C_V et $\gamma=1.5$) aux mêmes pression, volume et température (p_0 , V_0 , T_0). Une résistance électrique, à la température constante $19T_0$, est placée dans la chambre A et fournit une quantité de chaleur au gaz qui s'y trouve. La pression à l'intérieur de la chambre A augmente lentement jusqu'à $p_{A,\text{final}} = \frac{27}{8}p_0$. En fonction des paramètres connus, calculez :

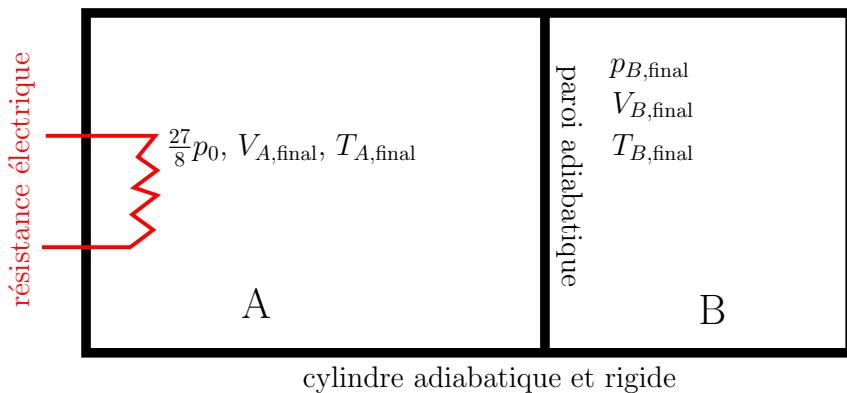
- le volume final et la température finale du gaz dans chacune des chambres,
- le travail effectué sur le gaz de la chambre B,
- la quantité de chaleur fournie par la résistance électrique,
- la variation d'entropie du gaz dans chaque chambre ainsi que la variation d'entropie de l'univers.

Corrigé

Etat initial



Etat final



- a) (9 points)

Tout d'abord, il est dit dans l'énoncé que la pression augmente *lentement* dans la chambre A (et donc dans la chambre B), ce qui veut dire que les processus sont *réversibles*. **Puisque une quantité de chaleur Q est apportée au gaz dans la chambre A, le processus n'est pas adiabatique.** Par contre, le gaz dans la chambre B subit une compression adiabatique puisque il n'y a pas d'échanges de chaleur avec l'environnement ni avec la chambre A. Comme le processus dans la chambre B est une adiabatique réversible, on peut donc utiliser

$$p_0 V_0^\gamma = p_{B,\text{final}} V_{B,\text{final}}^\gamma.$$

L'état final est atteint lorsqu'un nouvel équilibre mécanique est atteint

$$p_{B,\text{final}} = p_{A,\text{final}}.$$

Cependant la donnée ne dit pas explicitement si, à l'état final, un équilibre thermique est également atteint entre le gaz et la résistance thermique dans la chambre A . Si on fait cette hypothèse, on a

$$T_{A,\text{final}} = T_{\text{res.}} = 19T_0,$$

ce qui donne,

$$V_{A,\text{final}} = \frac{p_0}{p_{A,\text{final}}} \frac{T_{A,\text{final}}}{T_0} V_0,$$

puisque, selon la loi des gaz parfaits,

$$\frac{p_{A,\text{final}} V_{A,\text{final}}}{T_{A,\text{final}}} = \frac{p_0 V_0}{T_0}.$$

On obtient donc

$$V_{A,\text{final}} = \frac{8p_0}{27p_0} \frac{19V_0}{V_0} = \frac{152}{27} V_0 \simeq 5.6V_0.$$

Mais ceci n'est pas possible puisque le volume du cylindre est $2V_0$! Donc l'équilibre thermique entre la résistance électrique et le gaz dans la chambre A n'est pas atteint et donc $T_{A,\text{final}} \neq 19T_0$.

Remarque : Notons également que cette hypothèse : $T_{A,\text{final}} = 19T_0$ n'est pas consistente avec une transformation adiabatique *et réversible* pour la chambre B .

Maintenant que les hypothèses sont établies, calculons les températures et volumes finaux dans chaque chambre. Commençons par la chambre B :

$$p_0 V_0^\gamma = p_{B,\text{final}} V_{B,\text{final}}^\gamma \Rightarrow V_{B,\text{final}} = \left(\frac{p_0}{p_B} \right)^{\frac{1}{\gamma}} V_0 = \left(\frac{8}{27} \right)^{\frac{2}{3}} V_0 = \frac{4}{9} V_0.$$

De plus le volume total étant égal à $2V_0$, le volume final de la chambre A est :

$$V_{A,\text{final}} = 2V_0 - V_B = \left(2 - \frac{4}{9} \right) V_0 = \frac{14}{9} V_0.$$

Pour trouver la température finale dans chaque chambre, on peut utiliser la loi des gaz parfaits et comme l'état initial dans les 2 chambres était le même, on obtient :

$$\frac{p_0 V_0}{T_0} = \frac{p_{A,\text{final}} V_{A,\text{final}}}{T_{A,\text{final}}} = \frac{p_{B,\text{final}} V_{B,\text{final}}}{T_{B,\text{final}}},$$

ce qui donne :

$$T_{B,\text{final}} = \frac{p_{B,\text{final}} V_{B,\text{final}}}{p_0 V_0} T_0 = \frac{\frac{27}{8} p_0 \frac{4}{9} V_0}{p_0 V_0} T_0 = \frac{3}{2} T_0,$$

et

$$T_{A,\text{final}} = \frac{p_{A,\text{final}} V_{A,\text{final}}}{p_0 V_0} T_0 = \frac{\frac{27}{8} p_0 \frac{14}{9} V_0}{p_0 V_0} T_0 = \frac{21}{4} T_0.$$

Remarque : Pour la chambre B , on aurait également pu utiliser $T_0 V_0^{\gamma-1} = T_{B,\text{final}} V_{B,\text{final}}^{\gamma-1}$.

b) (3 points)

Comme déjà dit, la compression du gaz dans la chambre B est adiabatique (pas d'échange de chaleur). Donc selon le premier principe de la thermodynamique, on a :

$$\Delta U_B = 0 - W_B,$$

or

$$\Delta U_B = n_0 C_V \Delta T_B = n_0 C_V (T_{B,\text{final}} - T_0) = n_0 C_V \frac{T_0}{2} = \frac{p_0 V_0}{2} \frac{C_V}{R},$$

donc

$$W_B = -n_0 C_V \frac{T_0}{2} = -\frac{p_0 V_0}{2} \frac{C_V}{R}.$$

Remarque : On peut également écrire $W_B = \int pdV$ et retrouver le même résultat.

Comme attendu (compression \Leftrightarrow diminution du volume), ce travail est négatif.

c) (3 points)

Appliquons maintenant le premier principe au gaz dans la chambre A :

$$\Delta U_A = Q - W_A.$$

Le travail fait *par* le gaz de la chambre A (positif car expansion) est exactement égal et opposé au travail fait *sur* le gaz de la chambre B : $W_A = -W_B$. On obtient donc :

$$\begin{aligned} Q &= \Delta U_A - W_B = n_0 C_V \Delta T_A + n_0 C_V \frac{T_0}{2} \\ &= n_0 C_V \left(\frac{17}{4} T_0 + \frac{T_0}{2} \right) = \frac{19}{4} n_0 C_V T_0 = \frac{19}{4} \frac{C_V}{R} p_0 V_0. \end{aligned}$$

d) (5 points)

Puisque le processus sur le gaz de la chambre B est *adiabatique et réversible*, le changement d'entropie est nul : $\Delta S_B = 0 \text{ J/K}$.

Pour la chambre A, le gaz subit aussi une transformation réversible, on calcule donc la variation d'entropie d'un gaz parfait entre 2 états :

$$\begin{aligned} \Delta S_A &= \int_{\text{ini.}}^{\text{final}} dS = S_{\text{final}} - S_{\text{ini.}} = nR \ln \left(\frac{T_{\text{final}}^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}}{p_{\text{final}}} \right) - nR \ln \left(\frac{T_{\text{ini.}}^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}}{p_{\text{ini.}}} \right) \\ &= nR \ln \left(\frac{p_{\text{ini.}} T_{\text{final}}^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}}{p_{\text{final}} T_{\text{ini.}}^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}} \right) \\ &= nR \ln \left(\frac{8}{27} \left(\frac{21}{4} \right)^3 \right) = 3 \frac{p_0 V_0}{T_0} \ln \left(\frac{7}{2} \right). \end{aligned}$$

Pour calculer la variation d'entropie de l'Univers, il faut considérer la résistance électrique comme un réservoir de chaleur, dont la variation d'entropie est donnée par :

$$\Delta S_{\text{res.}} = -\frac{Q}{T_{\text{res.}}} = -\frac{\frac{19}{4} n_0 C_V T_0}{19 T_0} = -\frac{n_0 C_V}{4} = -\frac{p_0 V_0 C_V}{4 R T_0},$$

où $T_{\text{res.}} = 19 T_0$ est la température du réservoir et $n_0 = \frac{p_0 V_0}{R T_0}$.

$$\begin{aligned} \Delta S_{\text{univers}} &= \Delta S_{\text{res.}} + \Delta S_A + \Delta S_B = \frac{p_0 V_0}{T_0} \left(3 \ln \left(\frac{7}{2} \right) - \frac{c_V}{R} \right) \\ &= \frac{p_0 V_0}{T_0} \left(3 \ln \left(\frac{7}{2} \right) - \frac{1}{4(\gamma-1)} \right) = \frac{p_0 V_0}{T_0} \left(3 \ln \left(\frac{7}{2} \right) - \frac{1}{2} \right), \end{aligned}$$

puisque $R = c_p - c_V$ et $\gamma = \frac{c_p}{c_V}$. De plus, comme attendu, $\Delta S_{\text{univers}} > 0$ puisque $\ln(7/2) > 1$.

Exercice 4

(20 points au total)

Dans une foire d'exposition, un inventeur présente deux moteurs. Son premier moteur travaille entre un réservoir à haute température $T_H = 100^\circ\text{C}$ et un réservoir à basse température. Ce réservoir est initialement formé d'un bassin de 100 kg de glace à -100°C . Selon son inventeur, le rendement du moteur est de $\eta = 50\%$. Après 3275 s d'utilisation, on retrouve dans le bassin 50 kg d'eau à 0°C et 50 kg de glace à 0°C .

- Calculez la puissance mécanique de ce moteur selon les affirmations de l'inventeur.
- Montrez que le rendement prétendu n'est pas possible pendant toute la période considérée.
- Dessinez ce cycle dans un diagramme $p - V$.
- Démontrez que le rendement de ce cycle peut s'écrire comme $\eta = 1 - r^{\frac{\ln(r)}{r-1}}$ où $r < 1$ est le rapport entre le volume minimum et le volume maximum lors de la détente isobare.

Indications : Chaleur latente de fusion de la glace : $L_f = 333 \text{ kJ/kg}$. Chaleur spécifique de la glace : $c_{\text{glace}} = 2046 \text{ J/kg/K}$.

Corrigé

- a) (5 points)

La chaleur échangée avec le bassin pendant 3725 s est Q_L :

$$Q_L = m_{\text{glace fondue}} L_f + m_{\text{glace}} c_{p_{\text{glace}}} \Delta T.$$

A partir de la formule du rendement, $\eta = 1 - \frac{Q_L}{Q_H}$, la chaleur échangée à haute température Q_H peut s'écrire comme :

$$Q_H = \frac{Q_L}{1 - \eta}.$$

Une autre expression pour le rendement est $\eta = \frac{W_{\text{net}}}{Q_H}$, ce qui donne

$$W_{\text{net}} = \eta \times Q_H = \eta \times \frac{Q_L}{1 - \eta}.$$

La puissance mécanique du moteur est donnée par le travail net divisé par le temps d'utilisation

$$P_{\text{moteur}} = \frac{W_{\text{net}}}{\Delta t}.$$

Application numériques :

$$Q_L = 50 \times 333 \times 10^3 + 100 \times 2046 \times (0 - (-100)) = 3.710 \times 10^7 \text{ J},$$

$$Q_H = \frac{3.710 \times 10^7}{1 - 0.5} = 7.420 \times 10^7 \text{ J},$$

$$W_{\text{net}} = 0.5 \times 7.420 \times 10^7 = 3.710 \times 10^7 \text{ J},$$

et

$$P_{\text{moteur}} = \frac{3.710 \times 10^7}{3275} \simeq 11.32 \times 10^3 \text{ W}.$$

- b) (3 points)

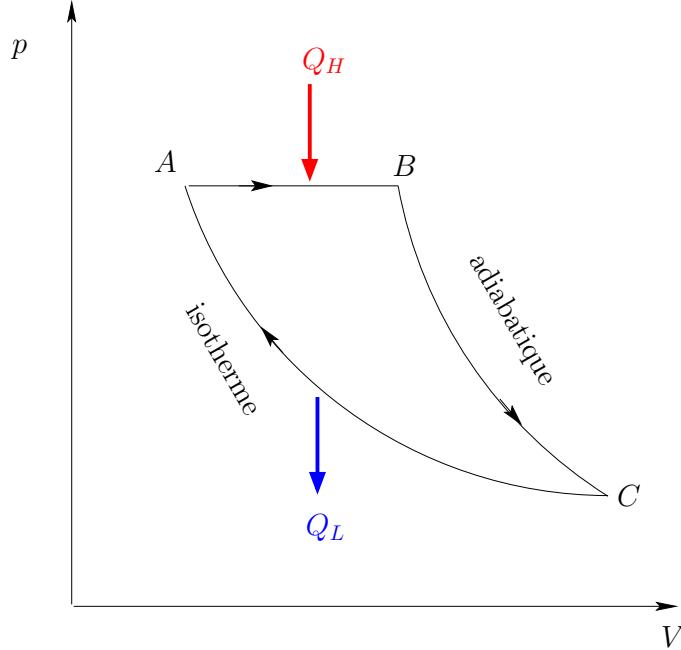
Le rendement maximum possible pour un moteur qui travaille entre deux réservoirs de chaleur à températures constantes T_L et T_H est donné par le rendement de Carnot :

$$\eta_{\text{Carnot}} = 1 - \frac{T_L}{T_H}.$$

Au début du fonctionnement du moteur, le rendement de Carnot vaut $1 - \frac{173}{373} = 0.53$ ce qui est compatible avec l'affirmation de l'inventeur. Cependant au fur et à mesure que le moteur fonctionne la température du réservoir froid varie et donc lorsque on a de l'eau et de la glace à 0°C , le rendement de Carnot vaut $1 - \frac{273}{373} \simeq 0.27$. Donc il est impossible que le rendement du moteur reste à 0.5 comme le prétend l'inventeur.

c) (4 points)

Il n'y a pas d'ambiguïté pour tracer ce cycle : le sens de parcours est connu car cycle moteur et on sait qu'une adiabatique est "plus raide" qu'une isotherme. Le deuxième cycle moteur se représente comme ci-dessous dans le diagramme $p - V$:



d) (8 points)

L'expression que l'on demande de démontrer suggère qu'il est plus judicieux de partir du rendement donné par :

$$\eta = 1 - \frac{|Q_L|}{|Q_H|} = 1 - \frac{|Q_{C \rightarrow A}|}{|Q_{A \rightarrow B}|}$$

avec

$$Q_{A \rightarrow B} = nc_p \Delta T = nc_p(T_B - T_A)$$

et

$$Q_{C \rightarrow A} = \underbrace{\Delta U_{C \rightarrow A}}_{=0} + W_{C \rightarrow A} = nRT_A \ln \left(\frac{V_A}{V_C} \right).$$

Remarque 1 On peut également écrire $Q_{A \rightarrow B} = \Delta U_{A \rightarrow B} + W_{A \rightarrow B} = nc_V(T_B - T_A) + p_A(V_B - V_A)$.

Remarque 2 On aurait pu démarrer l'exercice avec $\eta = \frac{|W_{cycle}|}{|Q_H|}$ mais les calculs sont plus longs et compliqués (voir annexe).

On essaie maintenant de faire apparaître le rapport $r = V_A/V_B$ sachant que pour l'isobare $A \rightarrow B$, on a $\frac{T_A}{T_B} = \frac{V_A}{V_B}$ et pour l'adiabatique, on a $TV^{\gamma-1} = \text{const.}$ donc $V_C = V_B \left(\frac{T_B}{T_C} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} = V_B \left(\frac{T_B}{T_A} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}}$ puisque $T_C = T_A$.

$$Q_{A \rightarrow B} = nc_p(T_B - T_A) = nc_p T_B \left(1 - \frac{T_A}{T_B} \right) = nc_p T_B \left(1 - \frac{V_A}{V_B} \right) = nc_p T_B (1 - r)$$

et

$$\begin{aligned}
Q_{C \rightarrow A} &= nRT_A \ln \left(\frac{V_A}{V_C} \right) = nRT_A \ln \left(\frac{V_A}{V_B \left(\frac{T_B}{T_A} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}}} \right) = nRT_A \ln \left(r \left(\frac{T_B}{T_A} \right)^{-\frac{1}{\gamma-1}} \right) \\
&= nRT_A \ln \left(r (r^{-1})^{-\frac{1}{\gamma-1}} \right) = nRT_A \ln \left(r \times r^{\frac{1}{\gamma-1}} \right) = RT_A \ln \left(r^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \right) \\
&= nRT_A \frac{\gamma}{\gamma-1} \ln(r) = nc_p T_A \ln(r).
\end{aligned}$$

Puisque, pour la dernière étape, on a utilisé :

$$\frac{\gamma}{\gamma-1} = \frac{\frac{c_p}{c_V}}{\frac{c_p}{c_V} - 1} = \frac{\frac{c_p}{c_V}}{\frac{c_p - c_V}{c_V}} = \frac{c_p}{R},$$

donc on obtient finalement :

$$\eta = 1 - \frac{|Q_{C \rightarrow A}|}{|Q_{A \rightarrow B}|} = 1 - \frac{|nc_p T_A \ln(r)|}{|nc_p T_B (1-r)|} = 1 - \frac{|r \ln(r)|}{|r-1|} = 1 - \frac{r \ln(r)}{|r-1|},$$

puisque $T_A/T_B = r < 1$. Il est important de vérifier que la fraction $\frac{r \ln(r)}{r-1}$ est bien de signe positif, puisque le rendement doit être inférieur à 1. C'est bien le cas puisque $r-1 < 0$ mais $\ln(r) < 0$ aussi.

Exercice 5

(20 points au total)

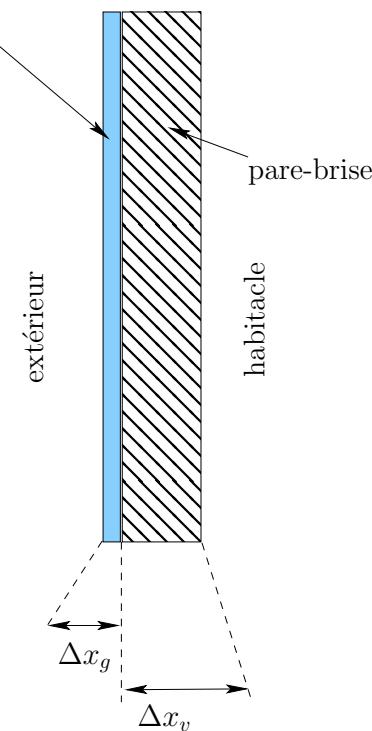
En hiver, Ivo veut prendre sa voiture pour aller à l'EPFL. La température de l'air externe est de 0°C et sur le pare-brise (surface : 1 m^2 , épaisseur : 5 mm) une couche de glace d'épaisseur 1 mm s'est formée. La glace est en équilibre thermique avec l'air externe et la surface externe du pare-brise. Avant de démarrer, Ivo doit dégeler la glace et essaie différentes méthodes.

- Il met en fonctionnement le chauffage dans l'habitacle et augmente ainsi instantanément la température de la surface interne du pare-brise à 20°C , qui reste constante par la suite. Combien de temps faut-il attendre pour dégeler toute la glace et la transformer en eau à 0°C ?
- Il impose instantanément un flux d'air à température constante 30°C , parallèle à la surface interne du pare-brise. Quelle est la température de la surface interne du pare-brise ? Combien de temps faut-il attendre pour dégeler toute la glace et la transformer en eau à 0°C ?
- Il augmente instantanément la vitesse du flux d'air sans en changer la température. Justifiez de manière qualitative, si le temps est plus court ou plus long qu'à la question b).

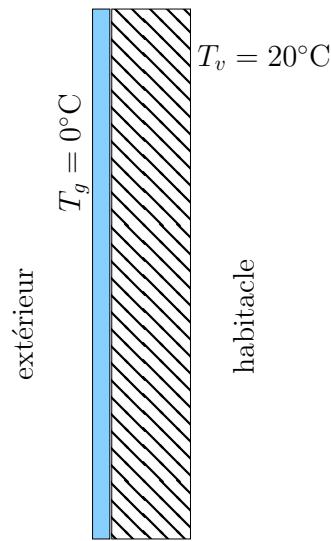
Indications : Vous ferez les hypothèses suivantes : géométrie plane, effets de bord négligés, régime stationnaire : $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$. Conductivité thermique du verre $k = 0.73 \text{ W/m/K}$. Coefficient de transfert thermique air-verre $h = 65 \text{ W/m}^2/\text{K}$ (pour les conditions de la question b)). Masse volumique de la glace : $\rho_{\text{glace}} = 910 \text{ kg m}^{-3}$. Chaleur latente de fusion de la glace : $L_f = 333 \text{ kJ/kg}$.

Corrigé

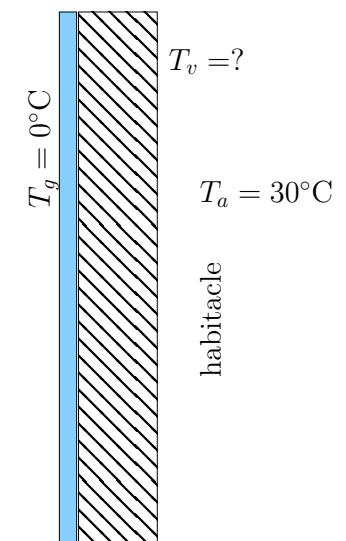
couche de glace



a)



b)



Soit $S_v = 1 \text{ m}^2$ la surface du pare-brise et $\Delta x_v = 5 \text{ mm}$ son épaisseur. On note $\Delta x_g = 1 \text{ mm}$ l'épaisseur de la couche de glace, $T_v = 20^\circ\text{C}$ la température sur la surface interne du pare-brise, $T_g = 0^\circ\text{C}$ la température de la couche de glace, et $T_a = 30^\circ\text{C}$ la température du flux d'air.

a) (6 points)

Le flux de chaleur total diffusé à travers le pare-brise peut être exprimé avec la loi de Fourier :

$$\left. \frac{\delta Q}{dt} \right|_{\text{vitre}} = k_{\text{vitre}} S_v \frac{T_v - T_g}{\Delta x_v}.$$

La chaleur nécessaire pour dégeler toute la glace et la transformer en eau à 0°C est donnée par $Q = L_f m_{\text{glace}} = L_f \rho_{\text{glace}} S_v \Delta x_g$. On peut donc dériver le temps Δt_1 qu'il faut attendre pour que

toute la glace soit transformée en eau,

$$\Delta t_1 = \frac{Q \Delta x_v}{k_{\text{vitre}} S_v (T_v - T_g)} = \frac{L_f \rho_{\text{glace}} \Delta x_g \Delta x_v}{k_{\text{vitre}} (T_v - T_g)} = 104 \text{ s.}$$

Il faut donc attendre environ 1 minute et 40 secondes.

b) (8 points)

On considère maintenant le cas où on a un flux d'air chaud à 30°C. Le transfert de chaleur se fait par convection puisque le fluide (air) est en mouvement. De plus, on est dans un régime stationnaire, le flux de chaleur total $\delta Q/dt$ qui passe par la couche d'air en contact avec la surface interne du pare-brise est le même que celui qui passe par le pare-brise, c'est-à-dire

$$\left. \frac{\delta Q}{dt} \right|_{\text{air}} = \left. \frac{\delta Q}{dt} \right|_{\text{vitre}}.$$

Le flux de chaleur total par convection s'écrit :

$$\left. \frac{\delta Q}{dt} \right|_{\text{air}} = h_{\text{air-vitre}} S_v (T_a - T_v)$$

et donc

$$h_{\text{air-vitre}} S_v (T_a - T_v) = k_{\text{vitre}} S_v \frac{T_v - T_g}{\Delta x_v},$$

d'où on peut dériver la température interne du pare-brise,

$$T_v = \frac{h_{\text{air-vitre}} \Delta x_v T_a + k_{\text{vitre}} T_g}{k_{\text{vitre}} + h_{\text{air-vitre}} \Delta x_v} = 9.2^\circ\text{C}.$$

On observe que la température interne du pare-brise dans ce cas-ci est plus basse que celle trouvée en a). Le temps qu'il faut attendre pour dégeler la couche de glace est donc plus élevé,

$$\Delta t_2 = \frac{L_f \rho_{\text{glace}} \Delta x_g \Delta x_v}{k_{\text{vitre}} (T_v - T_g)} = \frac{L_f \rho_{\text{glace}} \Delta x_g}{T_a - T_g} \left(\frac{1}{h_{\text{air-vitre}}} + \frac{\Delta x_v}{k_{\text{vitre}}} \right) = 225 \text{ s.}$$

c) (6 points)

L'augmentation de la vitesse du flux d'air va diminuer l'épaisseur de la couche limite δ . En conséquence, le coefficient de transfert de chaleur va augmenter ($h_{\text{air-vitre}} \propto \frac{k}{\delta}$) et le transfert de chaleur entre l'air et le pare-brise est amélioré puisque le flux de chaleur par convection augmente. Finalement, le temps de fonte trouvé au b) va être réduit.

Dans la limite $h_{\text{air-vitre}} \gg k_{\text{vitre}}/\Delta x_v$ on a

$$\Delta t_3 \simeq \frac{L_f \rho_{\text{glace}} \Delta x_g \Delta x_v}{k_{\text{vitre}} (T_a - T_g)} = 69 \text{ s,} \quad (1)$$

qui est le temps correspondant à la température interne du pare-brise égale à la température de l'air, $T_v = T_a = 30^\circ\text{C}$.

Annexe - Alternative à Exercice 4-d)

$$\eta = \frac{W_{\text{cycle}}}{Q_H}$$

$$W_{AB} = p_A V_A \left(\frac{V_B}{V_A} - 1 \right) \quad \text{Isobare}$$

$$W_{BC} = \frac{1}{1-\gamma} p_B V_B \left(\left(\frac{V_C}{V_B} \right)^{1-\gamma} - 1 \right) \quad \text{Adiabatique} \quad T_B V_B^{\gamma-1} = T_C V_C^{\gamma-1}$$

$$W_{CA} = nRT_A \ln \left(\frac{V_A}{V_C} \right) = p_A V_A \ln \left(\frac{V_A}{V_C} \right) \quad \text{Isotherme}$$

$$\begin{aligned} W_{\text{cycle}} &= \frac{1}{1-\gamma} p_B V_B \left(\left(\frac{V_C}{V_B} \right)^{1-\gamma} - 1 \right) + p_A V_A \left(\frac{V_B}{V_A} - 1 \right) + p_A V_A \ln \left(\frac{V_A}{V_C} \right) \\ &= \frac{1}{1-\gamma} p_B V_B \left(\frac{T_C}{T_B} - 1 \right) + p_A V_A \left(\frac{V_B}{V_A} - 1 \right) + p_A V_A \ln \left(\frac{V_A}{V_C} \right) \\ &= p_B V_B \left[\frac{1}{1-\gamma} \left(\frac{T_C (= T_A)}{T_B} - 1 \right) + \frac{p_A V_A}{p_B V_B} \left(\frac{V_B}{V_A} - 1 \right) + \frac{p_A V_A}{p_B V_B} \ln \left(\frac{V_A}{V_C} \right) \right] \\ &= p_B V_B \left[\frac{1}{1-\gamma} \left(\frac{T_A}{T_B} - 1 \right) + \left(1 - \frac{V_A}{V_B} \right) + \frac{V_A}{V_B} \ln \left(\frac{V_A}{V_C} \right) \right] \\ W_{\text{cycle}} &= p_B V_B \left[\frac{1}{1-\gamma} \left(\frac{V_A}{V_B} - 1 \right) + \left(1 - \frac{V_A}{V_B} \right) + \frac{V_A}{V_B} \ln \left(\frac{V_A}{V_C} \right) \right] \\ &= p_B V_B \left[\frac{1}{1-\gamma} \left(\frac{T_A}{T_B} - 1 \right) + \left(1 - \frac{V_A}{V_B} \right) + \frac{V_A}{V_B} \ln \left(\frac{V_A}{V_C} \right) \right] \\ W_{\text{cycle}} &= p_B V_B \left[\frac{1}{1-\gamma} (r-1) + (1-r) + r \ln \left(\frac{V_A}{V_C} \right) \right] \end{aligned}$$

Considérons le dernier terme : sur l'adiabatique on a :

$$T_B^{-1} V_B^{1-\gamma} = T_C^{-1} V_C^{1-\gamma} \Rightarrow V_C^{1-\gamma} = \frac{T_C}{T_B} V_B^{1-\gamma} \Rightarrow V_C = V_B \left(\frac{T_C}{T_B} \right)^{\frac{1}{1-\gamma}},$$

donc

$$r \ln \left(\frac{V_A}{V_C} \right) = r \ln \left(\frac{V_A}{V_B} \left(\frac{T_B}{T_C} \right)^{\frac{1}{1-\gamma}} \right) = r \ln \left(\frac{V_A}{V_B} \right) + r \frac{1}{1-\gamma} \ln \left(\frac{T_B}{T_C (= T_A)} \right) = r \ln r + \frac{r}{1-\gamma} \ln \left(\frac{1}{r} \right)$$

et finalement,

$$\begin{aligned} W_{\text{cycle}} &= p_B V_B \left[\frac{1}{1-\gamma} (r-1) + (1-r) + r \ln r + \frac{r}{1-\gamma} \ln \left(\frac{1}{r} \right) \right] \\ &= p_B V_B \left[\frac{1}{1-\gamma} (r-1) - (r-1) + \left(1 - \frac{1}{1-\gamma} r \ln r \right) \right] \\ &= p_B V_B \left[(r-1) \left(\frac{1-\gamma+\gamma}{1-\gamma} \right) + \left(\frac{1-\gamma-\gamma}{1-\gamma} \right) r \ln r \right] \\ &= p_B V_B \left[\frac{\gamma}{1-\gamma} (r-1) - \frac{\gamma}{1-\gamma} r \ln r \right]. \end{aligned}$$

De plus,

$$Q_H = Q_{AB} = nc_p T_B (1 - r),$$

donc enfin (!)

$$\begin{aligned}\eta &= \frac{W_{\text{cycle}}}{Q_H} = \frac{\cancel{p_B V_B} \left(\frac{\gamma}{1-\gamma} \right) (r - 1 - r \ln r)}{\cancel{n c_p T_B} (1 - r)} \\ &= 1 - \frac{r \ln r}{r - 1}\end{aligned}$$