

Cet examen comporte 5 exercices. Les exercices peuvent être traités dans n'importe quel ordre. Vous avez à disposition 5 feuillets, vous traiterez donc chaque exercice sur un feuillet distinct. Inscrivez votre nom sur chacun des feuillets que vous rendrez.

Exercice 1

Deux vaisseaux spatiaux identiques V1 et V2 voyagent vers le restaurant galactique Hôtel de Galaxie (HdG) le long de la même ligne droite mais dans des sens opposés. On appelle \mathcal{R} , $\mathcal{R}^{(1)}$, $\mathcal{R}^{(2)}$, les référentiels de HdG, V1 et V2, respectivement. Dans le référentiel \mathcal{R} , le vaisseau V1 a une vitesse $v_1 = 0.5c$ et sa longueur vaut 100 m.

a) Quelle est la longueur propre des vaisseaux V1 et V2 ?

b) Quelle est la vitesse de V2 dans \mathcal{R} sachant que sa longueur, mesurée dans $\mathcal{R}^{(1)}$, vaut 75 m ?

Les informations ci-après sont données dans le référentiel \mathcal{R} de HdG. Le restaurant HdG envoie un message radio annonçant qu'il fermera dans 3 heures. Au moment de l'envoi, V1 se trouve à 2.5×10^9 km de HdG.

c) L'équipage de V1 arrivera-t-il à temps pour manger ?

La planète d'eau PLOUF19, fixe par rapport à HdG, se trouve à la distance de 2×10^9 km de HdG, mesurée dans \mathcal{R} . Les axes HdG–PLOUF19 et HdG–V1 sont perpendiculaires.

d) Quelle est la distance PLOUF19 – V1, mesurée dans $\mathcal{R}^{(1)}$, au moment de la réception du message par V1 ?

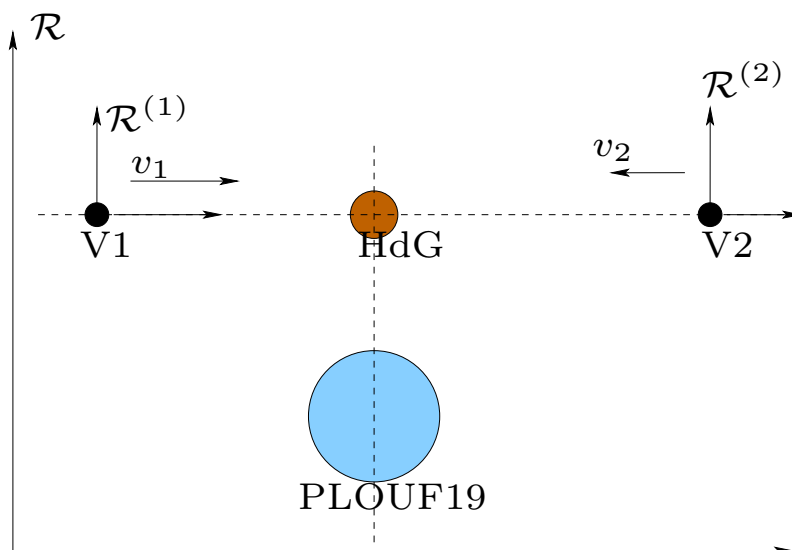
Ayant décidé d'aller faire une baignade, V1 change de direction et se dirige vers PLOUF19 toujours à la vitesse $v_1 = 0.5c$, mesurée dans \mathcal{R} . Malheureusement, à l'approche de PLOUF19, V1 perd le contrôle et s'écrase à pleine vitesse dans l'eau ($m_{\text{eau}} = 10^{17}$ kg). Toute l'énergie cinétique est convertie en chaleur transférée à l'eau dont la température augmente de 50°C .

e) Quelle est la masse du vaisseau V1 ?

Indications : Chaleur spécifique de l'eau liquide : $c_{\text{eau}} \simeq 4184 \text{ J kg}^{-1}$.

Corrigé

Il est toujours utile de faire un dessin de la situation. Soit \mathcal{R} , le référentiel lié à HdG et PLOUF19 et $\mathcal{R}^{(1)}$, le référentiel lié à V1 en mouvement par rapport à \mathcal{R} et $\mathcal{R}^{(2)}$, le référentiel lié à V2 en mouvement par rapport à \mathcal{R} . Les quantités mesurées et calculées dans $\mathcal{R}^{(1)}$ ($\mathcal{R}^{(2)}$) sont notées $^{(1)}$ ($^{(2)}$).



a) Pour calculer la longueur propre de V1 $L_1^{(1)}$, on utilise l'expression pour la contraction des longueurs :

$$L_1 = L_1^{\textcircled{1}} \sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}} \Rightarrow L_2^{\textcircled{2}} = L_1^{\textcircled{1}} = \frac{L_1}{\sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}} = L_1 \gamma_1$$

Application numérique : $\gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{0.5^2 c^2}{c^2}}} = 1.1547$ et $L_2^{\textcircled{2}} = L_1^{\textcircled{1}} = 110 \times 1.1547 = 115.47 \text{ m}$.

- b) Tout d'abord il ne fait aucun doute que le signe de v_2 dans le référentiel $\mathcal{R}^{\textcircled{1}}$ est négatif. On va d'abord estimer la vitesse de V2 dans le référentiel $\mathcal{R}^{\textcircled{1}}$: $v_2^{\textcircled{1}}$. L'énoncé nous donne $L_2^{\textcircled{1}} = 75 \text{ m}$ et au a) on a calculé $L_2^{\textcircled{2}}$. La contraction des longueurs nous donne :

$$L_2^{\textcircled{1}} = \frac{L_2^{\textcircled{2}}}{\gamma^*} \frac{L_0}{\gamma^*} \Rightarrow \frac{1}{\gamma^*} = \frac{L_2^{\textcircled{1}}}{L_0} = \sqrt{1 - \frac{(v_2^{\textcircled{1}})^2}{c^2}} \Rightarrow \frac{v_2^{\textcircled{1}}}{c} = \sqrt{1 - \left(\frac{L_2^{\textcircled{1}}}{L_2^{\textcircled{2}}}\right)^2}$$

Application numérique : $v_2^{\textcircled{1}} \simeq -0.75c$.

Pour répondre à la question posée (trouver la vitesse v_2 de V2 dans \mathcal{R}), on va utiliser la transformation relativiste des vitesses entre le référentiel \mathcal{R} et le référentiel $\mathcal{R}^{\textcircled{1}}$ qui se déplace à la vitesse v_1 par rapport à \mathcal{R} :

$$v_2 = \frac{v_2^{\textcircled{1}} + v_1}{1 + \frac{v_2^{\textcircled{1}} v_1}{c^2}}.$$

Application numérique : $v_2 \simeq \frac{-0.75c + 0.5c}{1 - \frac{0.75c \times 0.5c}{c^2}} \simeq -0.41c$.

- c) Dans le référentiel \mathcal{R} , on a toutes les informations nécessaires pour répondre à la question posée. V1 voyage à la vitesse $v_1 = 0.5c$ et la distance à parcourir avant la fermeture du restaurant est $\Delta x_0 = 2.5 \times 10^{12} \text{ m}$. Le temps que va mettre V1 pour arriver sur HdG est donc

$$\Delta t = \frac{\Delta x_0}{v_1}.$$

Application numérique : $\Delta t = \frac{2.5 \times 10^{12}}{0.5 \times 3 \times 10^8} \simeq 1.67 \times 10^4 \text{ s} \simeq 4 \text{ heures } 37 \text{ minutes}$.

Pour répondre complètement à la question : non, V1 n'arrivera pas avant que le restaurant HdG ferme ses portes.

- d) Dans \mathcal{R} , on doit trouver à quelle distance Δx_1 de HdG se trouve V1 au moment de la réception du message. Dans le référentiel $\mathcal{R}^{\textcircled{1}}$, la distance HdG–PLOUF19, notée Δ , ne change pas car perpendiculaire à la direction de propagation de V1. Par contre, la distance Δx_1 va se contracter. On calculera alors l'hypothénuse du triangle rectangle formé par V1–HdG–PLOUF19. On a deux équations pour trouver Δx_1 :

$$\Delta x_1 = c \Delta t_1 \quad \text{et} \quad \Delta x_1 = \Delta x_0 - v_1 \Delta t_1 \Rightarrow \Delta t_1 = \frac{\Delta x_0}{c + v_1} \Rightarrow \Delta x_1 = \frac{c \Delta x_0}{c + v_1} = \frac{\Delta x_0}{1 + \frac{v_1}{c}}.$$

Dans le référentiel $\mathcal{R}^{\textcircled{1}}$, la distance V1–PLOUF19 est donnée par

$$\mathcal{D}^{\textcircled{1}} = \sqrt{(\Delta x_1^{\textcircled{1}})^2 + \Delta^2} = \sqrt{\gamma_1 \left(\frac{\Delta x_0}{1 + \frac{v_1}{c}} \right)^2 + \Delta^2}$$

Application numérique : $\mathcal{D}^{\textcircled{1}} = \sqrt{1.1547 \times \left(\frac{2.5 \times 10^{12}}{1.5} \right)^2 + (2 \times 10^{12})^2} \simeq 2.7 \times 10^{12} \text{ m}$.

- e) L'énergie cinétique du vaisseau V1 est donnée par $E_{\text{cin},1} = (\gamma_1 - 1)m_1 c^2$ où m_1 est la masse du vaisseau que l'on cherche. De plus, l'énergie nécessaire pour augmenter la température de PLOUF19 de 50°C est donnée par : $Q = m_{\text{eau}} c_{\text{eau}} \Delta T$. On obtient :

$$Q = E_{\text{cin},1} \Rightarrow (\gamma_1 - 1)m_1 c^2 = m_{\text{eau}} c_{\text{eau}} \Delta T \Rightarrow m_1 = \frac{m_{\text{eau}} c_{\text{eau}} \Delta T}{(\gamma_1 - 1)c^2}.$$

Application numérique : $m_1 = \frac{10^{17} \times 4184 \times 50}{(1.1547 - 1) \times 9 \times 10^{16}} \simeq 15 \times 10^5 \text{ kg}$.

Exercice 2

Après le cours, de retour à la maison (considérée comme un réservoir à 20°C et à 1 bar), Ivo se prépare un thé en chauffant 1 kg d'eau dans une bouilloire jusqu'à 100°C. Sitôt cette température atteinte, la bouilloire s'arrête et, fatigué, Ivo s'endort. Quand il se réveille, l'eau s'est refroidie à la température ambiante.

a) Calculez le changement d'entropie de l'univers causé par le refroidissement de l'eau.

Cependant, Ivo a vraiment envie d'un thé. Il place 1 kg d'eau dans un four micro-onde (volume : 10 litres), réglé à la puissance $\mathcal{P}_{\text{four}} = 1200 \text{ W}$. Avec sa porte fermée, le four est parfaitement hermétique et isolé et transfère toute sa puissance à l'eau liquide uniquement. Malheureusement, Ivo s'endort à nouveau. Il est réveillé par l'explosion du four lorsque la différence de pression entre l'extérieur et l'intérieur de celui-ci atteint 3.7 bars. Dans ces conditions, la pression de vapeur saturante de l'eau varie selon $p_{\text{sat}} [\text{bar}] = 0.0438 T [\text{K}] - 15.3$. On admet que la vapeur d'eau et l'air restent en équilibre thermique avec l'eau liquide. De plus, on fait l'hypothèse que la chaleur échangée dans le processus de thermalisation est négligeable.

b) Calculez la température de la vapeur et de l'eau au moment de l'explosion du four.

c) Calculez la masse d'eau évaporée. Comparez celle-ci à la masse d'eau liquide initiale et discutez la validité de l'hypothèse suggérée.

d) Combien de temps Ivo a-t-il dormi ?

Indications : On considère la vapeur d'eau et l'air comme des gaz parfaits. Négligez le volume d'eau liquide par rapport au volume du four. Constante des gaz parfaits : $R = 8.314 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$. Chaleur latente d'évaporation de l'eau : $L_e = 2256.4 \text{ kJ kg}^{-1}$. Chaleur spécifique de l'eau liquide : $c_{\text{eau}} \simeq 4184 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$. Masse molaire de l'eau $M_{\text{eau}} = 18 \text{ g mol}^{-1}$. 1 bar = 10^5 Pa .

Corrigé

a)

$$\Delta S_{\text{Univ.}} = \Delta S_{\text{eau}} + \Delta S_{\text{res.}} = \int_{T_i}^{T_f} \frac{\delta Q}{dT} + \frac{-Q_{\text{eau}}}{T_{\text{res.}}} = m_{\text{eau}} c_{\text{eau}} \ln \left(\frac{T_f}{T_i} \right) + m_{\text{eau}} c_{\text{eau}} \frac{T_i - T_f}{T_{\text{res.}}}$$

Application numérique : $\Delta S_{\text{Univ.}} = 1 \times 4184 \times \ln \left(\frac{293}{373} \right) + 1 \times 4184 \times \frac{80}{293} \simeq -1 \times 10^3 + 1.14 \times 10^3 = 0.14 \times 10^3 \text{ J K}^{-1}$

b) Le point-clé de cette question est que la pression totale à l'intérieur du four est la somme de la pression de vapeur d'eau et de la pression de l'air : $p_{\text{tot.}} = p_{\text{vap.}} + p_{\text{air.}}$. De plus, les deux gaz et l'eau liquide sont à la même température T que l'on cherche. La pression de la vapeur d'eau est donnée par l'équation de l'énoncé tandis que la pression de l'air est donnée par l'équation des gaz parfaits.

$$p_{\text{tot.}} = \underbrace{aT - b}_{p_{\text{vap.}}} + \underbrace{\frac{n_{\text{air}} R}{V_{\text{four}}}}_{p_{\text{air}}} T = \left(a + \frac{n_{\text{air}} R}{V_{\text{four}}} \right) T - b,$$

avec $a = 4.38 \times 10^3$, $b = 15.3 \times 10^5$ car p doit être exprimé en Pascals. Le volume occupé par l'air est égal au volume du four puisque on néglige le volume occupé par l'eau liquide.

Le four explose lorsque $p_{\text{tot.}} - p_{\text{ext.}} = \Delta p$ avec $\Delta p = 3.7 \text{ bars}$ et $p_{\text{ext.}}$ la pression de l'air ambiant (1 bar). Donc

$$p_{\text{ext.}} + \Delta p = \left(a + \frac{n_{\text{air}} R}{V_{\text{four}}} \right) T - b \Rightarrow T = \frac{p_{\text{ext.}} + \Delta p + b}{a + \frac{n_{\text{air}} R}{V_{\text{four}}}}.$$

Que vaut n_{air} ? On utilise la loi des gaz parfaits au moment où Ivo met son eau à chauffer : l'air est encore à la température et à la pression ambiantes : $n_{\text{air}} = \frac{p_{\text{ext.}} V_{\text{four}}}{RT_{\text{ext.}}}$.

$$T = \frac{p_{\text{ext.}} + \Delta p + b}{a + \frac{p_{\text{ext.}} V_{\text{four}}}{RT_{\text{ext.}}}}.$$

La température ne dépend pas du volume du four.

Application numérique : $T = \frac{1 \times 10^5 + 3.5 \times 10^5 + 15.3 \times 10^5}{4.38 \times 10^3 + \frac{1 \times 10^5}{293}} \simeq 423 \text{ K} = 150^\circ \text{C}$.

- c) Le four étant toujours en marche, il va apporter de la chaleur à l'eau liquide. L'eau liquide va s'évaporer, faisant monter la pression dans le four. Or la température de vaporisation de l'eau varie avec la pression donc le four fournit non seulement de la chaleur pour la transition de phase elle-même mais également pour chauffer l'eau liquide jusqu'à la température de vaporisation. On cherche donc à savoir quelle masse d'eau a été évaporée lorsque la pression atteint 3.7 bars de plus que la pression atmosphérique dans le four. On utilise simplement la loi des gaz parfaits :

$$n_{\text{vap.}} = \frac{p_{\text{vap.}} V_{\text{four}}}{RT} = \frac{(aT - b) V_{\text{four}}}{RT},$$

donc

$$m_{\text{vap.}} = M_{\text{eau}} n_{\text{vap.}} = \frac{(aT - b) M_{\text{eau}} V_{\text{four}}}{RT}.$$

Application numérique : $n_{\text{vap.}} = \frac{(4.38 \times 10^3 \times 451 - 15.3 \times 10^5)}{8.314 \times 451 \times 10^{-2}} \simeq 0.9 \text{ mol}$ et $m_{\text{vap}} = 18 \times 10^{-3} \times 0.9 = 16.2 \times 10^{-3} \text{ kg}$.

La masse d'eau vaporisée est très petite devant la masse d'eau liquide initiale.

Pour vérifier l'hypothèse donnée dans l'énoncé, on doit calculer la quantité de chaleur absorbée par l'air pour se réchauffer et la comparer à la chaleur absorbée par l'eau liquide pour se chauffer et s'évaporer :

$$Q_{\text{air}} = n_{\text{air}} c_V \Delta T = n_{\text{air}} \frac{5}{2} R (T - T_{\text{ext.}}) = \frac{5}{2} \frac{p_{\text{ext.}} V_{\text{four}}}{T_{\text{ext.}}} \frac{T - T_{\text{ext.}}}{T} = \frac{5}{2} p_{\text{ext.}} V_{\text{four}} \frac{1 - \frac{T_{\text{ext.}}}{T}}{T_{\text{ext.}}}.$$

La quantité de chaleur absorbée par l'eau liquide est donnée par

$$Q_{\text{eau}} = m_{\text{vap}} L_{\text{vap.}} + m_{\text{eau}} c_{\text{eau}} (T - T_{\text{ext}}),$$

où l'on a négligé la variation d'eau liquide à chauffer puisque $m_{\text{vap.}} \ll m_{\text{eau}}$.

Application numérique : $Q_{\text{air}} = 2.5 \times 10^5 \times 10^{-2} \frac{1 - \frac{293}{423}}{293} \simeq 1100 \text{ J}$ et $Q_{\text{eau}} = 1.8 \times 10^{-2} \times 2256.4 \times 10^3 + 4184 \times 1 \times (423 - 293) \simeq 5.8 \times 10^5 \text{ J}$.

$Q_{\text{air}} \ll Q_{\text{eau}}$ donc l'hypothèse est bien justifiée.

- d) Le temps nécessaire est donné par $\Delta t \times \mathcal{P}_{\text{four}} = Q_{\text{eau}}$:

$$\Delta t = \frac{Q_{\text{eau}}}{\mathcal{P}_{\text{four}}} = \frac{M_{\text{eau}} n_{\text{vap.}} L_{\text{vap.}} + m_{\text{eau}} c_{\text{eau}} (T - T_{\text{ext}})}{\mathcal{P}_{\text{four}}}.$$

Application numérique : $\Delta t = \frac{5.8 \times 10^5}{1200} \simeq 480 \text{ s} = 8 \text{ minutes}$.

Exercice 3

Un cycle thermodynamique est composé des 4 transformations suivantes, considérées comme réversibles :

$A \rightarrow B$: Compression adiabatique depuis $(T_A = 27^\circ\text{C}, p_A = 100\text{ kPa})$ jusqu'à (T_B, p_B) tel que le rapport de compression est $r = \frac{p_B}{p_A} = 6.25$.

$B \rightarrow C$: Transformation isobare jusqu'à $T_C = 800^\circ\text{C}$.

$C \rightarrow D$: Expansion adiabatique jusqu'à p_A .

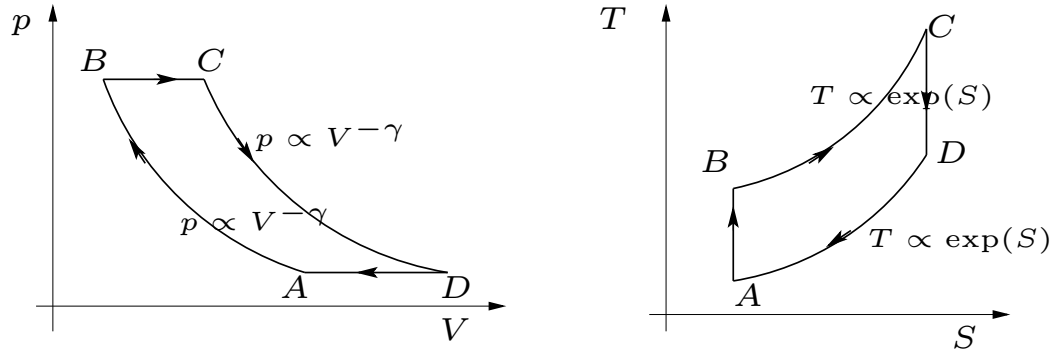
$D \rightarrow A$: Transformation isobare.

- Tracez le cycle dans les diagrammes $p - V$ et $T - S$. Justifiez brièvement l'allure des différentes courbes.
- Calculez, pour une mole d'air, les chaleurs échangées et le travail du cycle.
- Démontrez que le rendement de ce cycle ne dépend que du rapport de compression r et de l'exposant adiabatique γ du gaz considéré. Calculez ce rendement pour l'air.
- La chaleur perdue par ce cycle est rejetée dans une rivière avec un débit d'eau $\mathcal{D}_{\text{riv.}} = 1000\text{ kg s}^{-1}$, dont l'augmentation de température ne peut dépasser $\Delta T_{\text{riv.}} = 0.2^\circ\text{C}$. Calculez la puissance mécanique maximale que l'on peut extraire de ce cycle.

Indications : Considérez l'air comme un gaz parfait avec 5 degrés de liberté. Constante des gaz parfaits : $R = 8.314\text{ J mol}^{-1}\text{ K}^{-1}$. Chaleur spécifique de l'eau liquide : $c_{\text{eau}} \simeq 4184\text{ J kg}^{-1}\text{ K}^{-1}$.

Corrigé

- a) Diagrammes dans $p - V$ et $T - S$ avec $\gamma = \frac{\nu+2}{\nu} = \frac{7}{5} = 1.4$:



	$p [\text{Pa}]$	$V [\text{m}^3]$	$T [\text{K}]$
A	100×10^3	$V_A = \frac{nRT_A}{p_A} = 2.5 \times 10^{-2}$	300
B	$6.25p_A = 625 \times 10^3$	$V_A \left(\frac{p_A}{p_B}\right)^{\frac{1}{\gamma}} = V_A \left(\frac{1}{r}\right)^{\frac{1}{\gamma}} \simeq 6.7 \times 10^{-3}$	$T_A \left(\frac{1}{r}\right)^{(1-\gamma)/\gamma} \simeq 506$
C	p_B	$nRT_C/p_B \simeq 14.3 \times 10^{-3}$	1073
D	p_A	$V_C \left(\frac{p_C}{p_D}\right)^{\frac{1}{\gamma}} = V_C \left(\frac{p_B}{p_A}\right)^{\frac{1}{\gamma}} = V_C r^{\frac{1}{\gamma}} \simeq 5.2 \times 10^{-2}$	$T_C r^{(1-\gamma)/\gamma} \simeq 635$

- b) $W_{\text{cycle}} = W_{AB} + W_{BC} + W_{CD} + W_{DA}$
 $Q_{AB} = Q_{CD} = 0$

$$W_{AB} = \int_{V_A}^{V_B} p dV = p_A V_A^\gamma \int_{V_A}^{V_B} V^{-\gamma} dV = \frac{p_A V_A}{1-\gamma} \left(\left(\frac{V_B}{V_A} \right)^{1-\gamma} - 1 \right) = \frac{p_A V_A}{1-\gamma} \left(\left(\frac{1}{r} \right)^{(1-\gamma)/\gamma} - 1 \right).$$

$$\Delta U_{AB} = 0 - W_{AB}.$$

$$W_{BC} = \int_{V_B}^{V_C} p dV = p_C (V_C - V_B).$$

$$\Delta U_{BC} = Q_{BC} - W_{BC} = n c_V \Delta T = n \frac{5}{2} R (T_C - T_B).$$

$$Q_{BC} = n c_p \Delta T = n c_p (T_C - T_B) = n \frac{7}{2} R (T_C - T_B) = \Delta U_{BC} + W_{BC}.$$

$$W_{CD} = \int_{V_C}^{V_D} p dV = p_C V_C^\gamma \int_{V_C}^{V_D} V^{-\gamma} dV = \frac{p_C V_C}{1-\gamma} \left(\left(\frac{V_D}{V_C} \right)^{1-\gamma} - 1 \right) = -\Delta U_{BC}.$$

$$W_{DA} = \int_{V_D}^{V_A} p dV = p_D (V_A - V_D).$$

$$\Delta U_{DA} = Q_{DA} - W_{DA} = n c_V \Delta T = n \frac{5}{2} R (T_D - T_A).$$

$$Q_{DA} = n c_p \Delta T = n c_p (T_D - T_A) = W_{DA} + \Delta U_{DA}.$$

Applications numériques : $W_{AB} \simeq -4291 \text{ J}$; $W_{BC} \simeq 4711 \text{ J}$; $Q_{BC} \simeq 16.5 \text{ kJ}$; $\Delta U_{BC} \simeq 11.8 \text{ kJ}$; $W_{CD} \simeq 9091 \text{ J}$; $W_{DA} \simeq -2790 \text{ J}$; $\Delta U_{DA} \simeq -6976 \text{ J}$; $Q_{DA} \simeq -9767 \text{ J}$; $W_{\text{cycle}} \simeq 6720 \text{ J}$.

Remarque : On pouvait avoir tous les points de la question en calculant simplement Q_{BC} et Q_{DA} et $W_{\text{cycle}} = Q_H - Q_L = Q_{BC} - Q_{DA}$.

c)

$$\eta = 1 - \frac{|Q_L|}{|Q_H|} = 1 - \frac{|Q_{DA}|}{|Q_{BC}|} = 1 - \frac{n c_p |T_A - T_D|}{n c_p |T_C - T_B|} = 1 - \frac{T_A |1 - T_D/T_A|}{T_B |T_C/T_B - 1|} = 1 - \frac{T_A}{T_B},$$

puisque

$$\frac{T_D}{T_A} = \frac{T_C}{T_A} r^{(1-\gamma)/\gamma} \quad \text{et} \quad \frac{T_C}{T_B} = \frac{T_C}{T_A \left(\frac{1}{r}\right)^{(1-\gamma)/\gamma}} = \frac{T_C}{T_A} r^{(1-\gamma)/\gamma} \quad \text{donc} \quad \frac{T_D}{T_A} = \frac{T_C}{T_B}.$$

On obtient donc

$$\eta = 1 - \frac{T_A}{T_B} = 1 - \frac{T_A}{T_A \left(\frac{1}{r}\right)^{(1-\gamma)/\gamma}} = 1 - r^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}.$$

Application numérique : $\gamma = \frac{\nu+2}{\nu} = \frac{7}{5} = 1.4$; $\eta = 1 - 6.25^{\frac{1-1.4}{1.4}} \simeq 0.41$.

On peut vérifier notre résultat en calculant : $\eta = \left| \frac{W_{\text{cycle}}}{Q_H} \right| \simeq \frac{6720}{16500} \simeq 0.41$.

d) $\eta = \left| \frac{W}{Q_H} \right| \Rightarrow |W| = \eta |Q_H|$ mais $|Q_H| = |W| + |Q_L|$ donc $\eta(|W| + |Q_L|) = |W|$ soit

$$(1 - \eta)|W| = \eta |Q_L| \quad \Rightarrow \quad |W| = \frac{\eta}{1 - \eta} |Q_L|$$

La puissance mécanique demandée $\mathcal{P}_{\text{mec.}}$ est la dérivée temporelle du travail fourni par le cycle. Elle est limitée par la variation de température maximale que peut supporter l'eau de la rivière.

$$\mathcal{P}_{\text{mec.}} = \frac{d|W|}{dt} = \frac{\eta}{1 - \eta} \frac{d|Q_L|}{dt} = \frac{\eta}{1 - \eta} c_{\text{eau}} \Delta T_{\text{riv.}} \frac{dm_{\text{eau}}}{dt} = \frac{\eta}{1 - \eta} c_{\text{eau}} \Delta T_{\text{riv.}} \mathcal{D}_{\text{riv.}}$$

Application numérique : $\mathcal{P}_{\text{mec.}} = \frac{0.41}{1-0.41} \times 4184 \times 0.2 \times 1000 \simeq 5.8 \times 10^5 \text{ W} = 580 \text{ kW}$.

Exercice 4

Une mole de gaz parfait, à l'équilibre thermique avec un réservoir, subit une compression isotherme réversible à partir de l'état initial (p_A, T_A, V_A) jusqu'au volume $V_B < V_A$. Elle subit ensuite une expansion adiabatique irréversible qui la ramène à l'état initial A .

- Représentez les deux transformations dans les diagrammes $p - V$ et $T - S$.
- Pour chaque transformation, calculez la variation d'énergie interne, le travail et la variation d'entropie du gaz. Une fois les deux transformations effectuées, calculez le changement d'entropie de l'univers.

La chaleur échangée lors de la compression isotherme est transférée, par un cycle de Carnot qui fonctionne en mode réfrigérateur, du réservoir à T_A au réservoir à $T_H > T_A$.

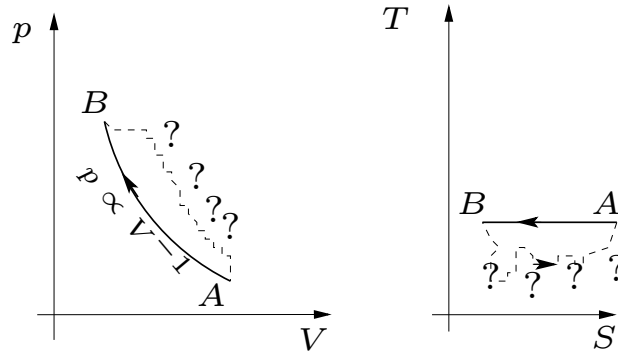
- Exprimez T_H , en fonction de T_A , sachant que le coefficient de performance du réfrigérateur vaut 5. Calculez le travail fait sur le gaz par le réfrigérateur sur un cycle complet.

En partant du même état initial (p_A, T_A, V_A) , on pourrait aussi utiliser une compression adiabatique réversible pour atteindre V_B .

- En utilisant l'approche microscopique, expliquez qualitativement la différence de variation d'entropie du gaz entre ces deux types de compression réversible.

Corrigé

- Diagrammes $p - V$ et $T - S$



- Expressions pour le travail, la chaleur, la variation d'énergie interne et la variation d'entropie ($n = 1$)

$$W_{A \rightarrow B} = \int_A^B p dV = \int_A^B nRT \frac{dV}{V} = nRT_A \ln \left(\frac{V_B}{V_A} \right) < 0$$

$$\Delta U_{A \rightarrow B} = nc_V \Delta T = nc_V (T_B - T_A) = 0$$

$$Q_{A \rightarrow B} = \Delta U + W_{A \rightarrow B} = nRT_A \ln \left(\frac{V_B}{V_A} \right) < 0$$

$$\Delta S_{A \rightarrow B} = \int_A^B \frac{\delta Q}{T_A} = nR \ln \left(\frac{V_B}{V_A} \right) < 0$$

Ce qui donne le sens de la flèche pour le diagramme $T - S$.

$$\Delta U_{B \rightarrow A} = -\Delta U_{A \rightarrow B} = 0 \quad \text{Variable d'état}$$

$$Q_{B \rightarrow A} = 0 \quad \text{Transformation adiabatique}$$

$$W_{B \rightarrow A} = Q_{B \rightarrow A} - \Delta U_{B \rightarrow A} = 0$$

$$\Delta S_{B \rightarrow A} = -\Delta S_{A \rightarrow B} = -nR \ln \left(\frac{V_B}{V_A} \right) > 0 \quad \text{Variable d'état}$$

Changement d'entropie de l'Univers sur le cycle complet :

$$\Delta S_{\text{Univ.}} = \Delta S_{\text{cycle}} + \Delta S_{\text{res.}} = 0 - \frac{1}{T_A} \int \delta Q_{A \rightarrow B} = nR \ln \left(\frac{V_A}{V_B} \right) > 0.$$

c)
$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{\text{ideal}} &= \frac{T_A}{T_H - T_A} \Rightarrow \mathcal{C}_{\text{ideal}}(T_H - T_A) = T_A \Rightarrow T_H = \frac{1 + \mathcal{C}_{\text{ideal}}}{\mathcal{C}_{\text{ideal}}} T_A = \frac{6}{5} T_A. \\ \mathcal{C}_{\text{ideal}} &= \frac{Q_A}{Q_H - Q_A} = \frac{Q_A}{W_{\text{cycle}}} \Rightarrow W_{\text{cycle}} = \frac{Q_A}{\mathcal{C}_{\text{ideal}}} = \frac{RT_A}{5} \ln \left(\frac{V_B}{V_A} \right). \end{aligned}$$

d) La définition microscopique de l'entropie est :

$$S = k_B \ln \Omega$$

où k_B est la constante de Boltzmann et Ω est le nombre de micro-états associés à un macro-état. En particulier, on sait que le nombre de micro-états est une fonction de la température (l'énergie) du gaz ainsi que du volume occupé. De plus, ce nombre augmente avec la température ainsi qu'avec le volume :

$$\Omega = \Omega(T, V) \quad \text{et} \quad \frac{\partial \Omega}{\partial T} > 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial \Omega}{\partial V} > 0.$$

Donc :

- Compression isotherme : le volume diminue ($V_B < V_A$) et la température ne varie pas donc le nombre de micro-états diminue et donc l'entropie diminue.
- Compression adiabatique : le volume diminue de la même manière ($\Omega \searrow$) mais cette fois, la température augmente ($\Omega \nearrow$) donc éventuellement on peut avoir un équilibre entre les deux tendances opposées de telle sorte que la variation d'entropie soit nulle ($\Delta S = 0$).

Exercice 5

Pour se rafraîchir, nous allons faire une bataille de bombes à eau à $T = 0^\circ\text{C}$. Pour cela, on utilise des sphères indéformables (diamètre intérieur : 40 cm) dont l'épaisseur de la coque en plastique vaut 3 mm. Les sphères sont entièrement remplies d'eau et placées au congélateur. Malheureusement, on a trop attendu et toute l'eau est gelée à 0°C . Afin de faire fondre l'eau gelée, les sphères sont posées sur une table qui se trouve à l'équilibre thermique avec l'air ambiant ($T_{\text{air}} = T_{\text{table}} = 30^\circ\text{C}$). On veut calculer le temps nécessaire Δt_{fonte} pour que l'eau fonde complètement dans les cas suivants.

- On fait l'hypothèse que la surface extérieure de la sphère est immédiatement en équilibre thermique avec l'air ambiant. Calculez Δt_{fonte} . Justifiez les approximations que vous faites.
- On fait l'hypothèse plus réaliste que la chaleur échangée entre la sphère et l'air ambiant se fait par convection. Calculez Δt_{fonte} . Justifiez les approximations que vous faites.
- Si le vent souffle plus fort, le temps calculé au point b) va-t-il augmenter ou diminuer ? Justifiez votre réponse.

Indications : On fait les hypothèses suivantes : on considère un régime stationnaire : $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$; la masse volumique de l'eau (ρ_{eau}) est égale à la masse volumique de la glace ($\rho_{\text{glace}} = 910 \text{ kg m}^{-3}$) ; la chaleur qui traverse la surface intérieure de la sphère est immédiatement transférée à toute la glace. Chaleur latente de fusion de la glace $L_{\text{glace}} = 334 \text{ kJ kg}^{-1}$. Conductivité thermique du plastique $k_{\text{plas.}} = 0.03 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$. Coefficient de transfert thermique *air-plastique* : $h = 30 \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-1}$.

Corrigé

- Pour que la glace fonde, la chaleur de l'air ambiant doit traverser la coque en plastique. Le temps que l'on cherche est le rapport entre la chaleur nécessaire à fondre toute la glace sur le taux de chaleur qui arrive depuis l'air à travers la coque : $\Delta t_{\text{fonte}} = \frac{Q_{\text{fonte}}}{dQ/dt}$.
De manière générale, la loi de Fourier en géométrie sphérique s'écrit :

$$J = \frac{1}{A} \frac{dQ}{dt} = \frac{\dot{Q}}{A} = -k \frac{dT}{dr}$$

Pendant l'échange de chaleur, le taux de chaleur échangée (\dot{Q}) ne varie pas, contrairement au flux J . Ceci est valable tant que les températures de la glace et de la coque restent constantes. Ce qui est bien le cas pendant la transition de phase de la glace. On cherche donc à évaluer le taux de chaleur échangée :

$$\dot{Q} = -A(r)k \frac{dT}{dr} = -4\pi r^2 k \frac{dT}{dr} \Rightarrow \frac{\dot{Q}}{4\pi} \frac{dr}{r^2} = -k dT,$$

et l'on doit maintenant intégrer entre $r_{\text{int.}} = R$ et $r_{\text{ext.}} = R + d$:

$$\begin{aligned} \frac{\dot{Q}}{4\pi} \int_{r_{\text{int.}}}^{r_{\text{ext.}}} \frac{dr}{r^2} &= -k \int_{T(r_{\text{int.}})}^{T(r_{\text{ext.}})} dT \Rightarrow \frac{\dot{Q}}{4\pi} \left(\frac{1}{r_{\text{int.}}} - \frac{1}{r_{\text{ext.}}} \right) = -k [T(r_{\text{ext.}}) - T(r_{\text{int.}})] \\ \Rightarrow \dot{Q} &= 4\pi \frac{r_{\text{ext.}} r_{\text{int.}}}{r_{\text{ext.}} - r_{\text{int.}}} k [T(r_{\text{int.}}) - T(r_{\text{ext.}})] = 4\pi \frac{R(R+d)}{d} k (T_{\text{glace}} - T_{\text{air}}) \end{aligned}$$

puisque l'énoncé nous dit que la surface externe de la coque est à la température de l'air. La chaleur nécessaire pour fondre toute la glace est donnée par :

$$Q_{\text{fonte}} = m_{\text{glace}} L_{\text{glace}} = \rho_{\text{glace}} V_{\text{sphère}} L_{\text{glace}} = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho_{\text{glace}} L_{\text{glace}}.$$

Finalement :

$$\Delta t_{\text{fonte}} = \frac{\frac{4}{3} \pi R^3 \rho_{\text{glace}} L_{\text{glace}}}{4\pi \frac{R(R+d)}{d} k (T_{\text{glace}} - T_{\text{air}})} = \frac{d R^2 \rho_{\text{glace}} L_{\text{glace}}}{3(R+d)k (T_{\text{glace}} - T_{\text{air}})}$$

Application numérique : $\Delta t_{\text{fonte}} = \frac{3 \times 10^{-3} \times 0.2^2 \times 910 \times 334 \times 10^3}{3 \times 0.203 \times 0.03 \times 30} = 6.65 \times 10^4 \text{ s} \simeq 18 \text{ heures.}$

Remarque : L'approximation plane $A(r) = A$ peut-être acceptée si elle est justifiée : $d_{\text{plas.}} \ll R_{\text{sphere.}}$

- b) Si la convection entre l'air et la coque est considérée, la température extérieure de celle-ci n'est pas égale à celle de l'air. C'est là le point-clé de cette question. Le taux de chaleur échangée par convection est donné par

$$\dot{Q}_{\text{conv.}} = 4\pi(R+d)^2 h [T(r_{\text{ext.}}) - T_{\text{air}}].$$

De plus comme rappelé au a), le taux de chaleur échangée est conservé donc

$$\dot{Q}_{\text{cond.}} = \dot{Q}_{\text{conv.}} \Rightarrow 4\pi \frac{R(R+d)}{d} k [T_{\text{glace}} - T(r_{\text{ext.}})] = 4\pi(R+d)^2 h [T(r_{\text{ext.}}) - T_{\text{air}}],$$

où dans l'expression de $\dot{Q}_{\text{cond.}}$ on a gardé $T(r_{\text{ext.}})$, la température extérieure de la coque. De l'équation précédente, on obtient :

$$T(r_{\text{ext.}}) = \frac{\frac{R}{d} k T_{\text{glace}} + (R+d) h T_{\text{air}}}{(R+d) h + \frac{R}{d} k}.$$

Application numérique : $T(r_{\text{ext.}}) = \frac{\frac{0.2}{0.003} \times 0.03 \times 273 + 0.203 \times 30 \times 303}{0.203 \times 30 + \frac{0.2}{0.03} \times 0.03} \simeq 295 \text{ K} < T_{\text{air}}$. On remplace cette valeur soit dans $\dot{Q}_{\text{cond.}}$ soit dans $\dot{Q}_{\text{conv.}}$ et on trouve Δt_{fonte} :

$$\Delta t_{\text{fonte}} = \frac{dR^2 \rho_{\text{glace}} L_{\text{glace}}}{\underbrace{3(R+d)k(T_{\text{glace}} - T(r_{\text{ext.}}))}_{\frac{Q_{\text{fonte}}}{d\dot{Q}_{\text{cond.}}/dt}}} = \frac{R^3 \rho_{\text{glace}} L_{\text{glace}}}{\underbrace{3(R+d)^2 h (T(r_{\text{ext.}}) - T_{\text{air}})}_{\frac{Q_{\text{fonte}}}{d\dot{Q}_{\text{conv.}}/dt}}}$$

Application numérique : $\Delta t_{\text{fonte}} = \frac{3 \times 10^{-3} \times 0.2^2 \times 910 \times 334 \times 10^3}{3 \times 0.203 \times 0.03 \times (273 - 295.7)} = 8.79 \times 10^4 \text{ s} \simeq 24 \text{ heures.}$

- c) Le temps de fonte trouvé au b) va donc être réduit. En effet, la vitesse du vent va générer de la turbulence autour de la coque, ce qui va améliorer le transfert de chaleur par convection entre l'air et la coque. L'épaisseur de la couche limite va diminuer et le coefficient de transfert de chaleur h va augmenter. Le cas a) représente le cas limite d'une convection parfaite ($h \rightarrow \infty$).

