Examen

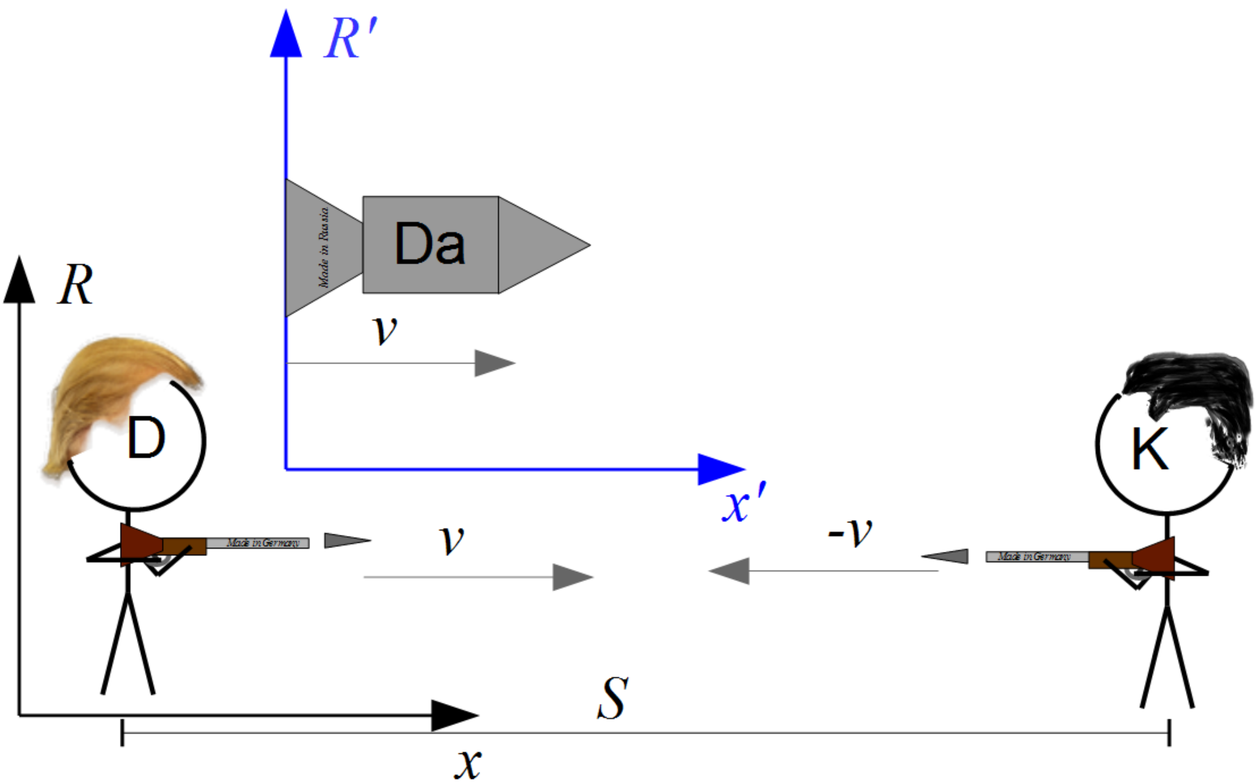
Exercice 1 20 points

Donald et Kim se battent pour la suprématie de la galaxie PEANUTS. Ces deux politiciens sont au repos l'un par rapport à l'autre et se tirent dessus en utilisant des fusils dont les balles partent avec une vitesse de $0.6c$ par rapport aux fusils. A chaque tir, un puissant flash lumineux est émis du fusil. Kim annonce les affirmations reportées ci-dessous. Pour chacune d'elles, vous devez indiquer quelle devrait être l'observation correspondante faite par le journaliste planétaire Darius, qui se trouve sur une fusée. Cette fusée constitue un référentiel dans lequel les balles lancées par Donald sont au repos. On suppose que Darius se trouve toujours entre Donald et Kim.

a) " Ma distance de Donald est de 10^7 km."
b) " La vitesse des balles que je tire est de $0.6c$. "
c) " Deux de nos balles sont entrées en collision : la quantité de mouvement relativiste et l'énergie cinétique sont conservées."
d) " Après cette collision, la trajectoire de ma balle est déviée de 30°. "
e) " Je tire des balles à la fréquence de 10 Hz."

Corrigé

Dans la suite, on considèrera les référentiels $\mathcal{R}$ (de Donald et Kim) et $\mathcal{R}'$ (de Darius). On choisit les axes x et x' dans le même sens, pour que $\mathcal{R}'$ se déplace avec une vitesse *positive* v par rapport à $\mathcal{R}$ (voir Fig. 1).



Avec ces choix, on assure que les transformations de Lorentz prennent leur forme conventionelle

$$\Delta x' = \gamma(\Delta x - v\Delta t) \qquad \Delta x = \gamma(\Delta x' + v\Delta t') \tag{1}$$

$$\Delta t' = \gamma(\Delta t - \frac{v}{c^2}\Delta x) \qquad \Delta t = \gamma(\Delta t' + \frac{v}{c^2}\Delta x') \tag{2}$$

Si les axes x et x' s'opposent et v est négative, il faudrait donc changer chaque signe dans ces formules, mais les résultats suivants seront bien-sûr les mêmes. Avec $v = 0.6c$, le facteur γ est donc

$$\gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = 1.25 \tag{3}$$

a) (**3 points**) " Ma distance de Donald est $D = 10^7$ km. "
On s'intéresse à la distance entre Donald et Kim dans le référentiel de Darius, donc D'. Comme ils ne sont pas au repos par rapport à $\mathcal{R}'$, mais se déplacent avec $-v$, on trouve par la contraction de longueurs

$$\mathcal{D}' = \frac{D}{\gamma} = 8 \times 10^6\,\text{km}. \tag{4}$$

b) (**2 points**) " La vitesse des balles que je tire vaut $0.6c$. "
On veut trouver la vitesse des balles de Kim, observées dans le référentiel $\mathcal{R}'$, donc $u'_x \equiv \frac{\Delta x'}{\Delta t'}$. On sait que leur vitesse dans $\mathcal{R}$ est $u_x \equiv \frac{\Delta x}{\Delta t} = -v$, donc en utilisant la transformation des vitesses (selon x) on trouve

$$u'_x = \frac{\Delta x'}{\Delta t'} = \frac{\Delta x - v\Delta t}{\Delta t - \frac{v}{c^2}\Delta x} = \frac{u_x - v}{1 - \frac{u_x v}{c^2}} = -0.88\,c. \tag{5}$$

c) (**3.5 points**) " Deux de nos balles sont entrées en collision : la quantité de mouvement relativiste et l'énergie cinétique sont conservées. "
On se demande ici, si ces quantités sont aussi conservées dans $\mathcal{R}'$. Les transformations de Lorentz pour l'énergie cinétique E et la quantité de mouvement (selon x) p_x, sont donné par

$$E' = \gamma(E - vp_x) \qquad E = \gamma(E' + vp'_x) \tag{6}$$

$$p'_x = \gamma(p_x - \frac{v}{c^2}E) \qquad p_x = \gamma(p'_x + \frac{v}{c^2}E') \tag{7}$$

Notez que, a priori, elles sont définies pour des valeurs concrets d'énergie et quantité de mouvement d'un objèt vu de différents référentiels. Mais on peut voir directement que ces équations s'appliquent aussi à des sommes et differences de ces quantités, car ceci sont de équations linéaires. Ici on considére dans $\mathcal{R}$:

$$\Delta E = E_f - E_i = 0 \qquad \Delta p_x = p_{x,f} - p_{x,i} = 0 \tag{8}$$

où f et i dénotent les énergies et quantités de mouvement finales et initiales *des deux balles ensembles*. Peu importe leurs contributions, on vient d'observer qu'on a toujours

$$\Delta E' = \gamma(\Delta E - v\Delta p_x) \qquad \Delta p'_x = \gamma(\Delta p_x - \frac{v}{c^2}\Delta E) \tag{9}$$

Donc, on trouve directement $\Delta E' = \Delta p'_x = 0$ – l'énergie cinétique et la quantité de mouvement sont aussi conservées dans $\mathcal{R}'$.
Pour vérifier ceci, on pourrait également trouver E_i et p_i par les contributions de chaqune des balles selon l'énoncé et donc calculer E_f et $p_{x,f}$. Après application des transformations de Lorentz à chaque quantité individuellement, on trouverait aussi que $\Delta E' = E'_f - E'_i = 0$ et $\Delta p'_x = p'_{x,f} - p'_{x,i} = 0$.

d) (**5.5 points**) " Après cette collision, la trajectoire de ma balle est déviée de 30°. "
Etant donné que la quantité de mouvement et l'énergie cinétique sont conservées dans la collision, on sait que la norme de la vitesse v reste constante pour chaque balle. Avec une déviation de $\alpha = 30°$, on trouve dans $\mathcal{R}$ par projection :

$$u_x = -v\cos(\alpha) = -\frac{\sqrt{3}}{2}v \qquad u_y = v\sin(\alpha) = \frac{1}{2}v.$$

Par les transformations de vitesses (voir b)), on arrive à

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - \frac{u_x v}{c^2}} \qquad \text{et} \qquad u'_y = \frac{u_y\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 - \frac{u_x v}{c^2}}.$$

La déviation de la balle dans le référentiel $\mathcal{R}'$ est ainsi donné par

$$\tan(\alpha') = \left|\frac{u'_y}{u'_x}\right| = \left|\frac{u_y\sqrt{1 - v^2/c^2}}{u_x - v}\right| = \left|\frac{\frac{1}{2}v}{(\frac{-\sqrt{3}-2}{2})v}\sqrt{1 - v^2/c^2}\right| = \left|\frac{\sqrt{1 - v^2/c^2}}{-\sqrt{3} - 2}\right| \tag{10}$$

L'application numérique donne $\alpha' \simeq 12°$.

e) (**6 points**) " Je tire des balles à la fréquence de 10 Hz. "
On veut donc trouver la fréquence f' des tirs de Kim dans le référentiel $\mathcal{R}'$. Il est plus intuitif de considérer d'abord l'intervalle de temps ΔT entre 2 instants où Darius voit deux flashs consécutifs (nos 2 événements ici) en $\mathcal{R}$. Leur distance L en $\mathcal{R}$ est bien sûr données par $L = c\Delta t = \frac{c}{f}$, comme ils se propagent avec vitesse c, et il faut $\Delta t = \frac{1}{f} = 0.1s$ avant le prochain flash. Comme la lumière se déplace avec c dans la direction négative, et Darius approche avec $+v$, on a

$$\Delta T = \frac{L}{c+v} = \frac{1}{\left(1 + \frac{v}{c}\right)f}.$$

Notez que la vitesse *relative* entre Darius et les éclatements en $\mathcal{R}$ est $c + v > c$. Ceci n'est pas une contradiction, comme seulement la vitesse d'un objet individuel est limitée par $v < c$. Les vitesses relatives peuvent donc atteindre $2c$.
Par contre, ce qui nous intéresse, c'est la fréquence $f' = \frac{1}{\Delta T'}$ en $\mathcal{R}'$, donc il faut appliquer une transformation de Lorentz. Comme les deux évenements (la réception des deux éclatements) se passent sur le même endroit en $\mathcal{R}'$ (Darius est au repos ici), on retrouve la dilatation de temps par la transformation de Lorentz inverse :

$$\Delta T = \gamma(\Delta T' + \frac{v}{c^2}\underbrace{\Delta x'}_{0}) \quad \Rightarrow \quad \Delta T' = \frac{\Delta T}{\gamma} \tag{11}$$

On pourrait également se demander de quelle distance Darius se déplace en R entre deux flashs, et comme il se déplace avec $+v$, on a bien sûr $\Delta x = v\Delta T$. Avec la transformation de Lorentz on trouve aussi

$$\Delta T' = \gamma(\Delta T - \frac{v}{c^2}v\Delta T) = \gamma\underbrace{(1 - \frac{v^2}{c^2})}_{\gamma^{-2}}\Delta T = \frac{\Delta T}{\gamma}$$

Finalement,

$$f' = \frac{\gamma}{\Delta T} = \gamma(1 + \frac{v}{c})f = \frac{1 + \frac{v}{c}}{\sqrt{(1 + \frac{v}{c})(1 - \frac{v}{c})}}f. \tag{12}$$

On reconnaît la formule de l'effet Doppler relativiste.
<u>Application numérique :</u>

$$f' = \sqrt{\frac{1 + \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}}}f = \sqrt{1.6/0.4}f = 2f = 20\,\text{Hz}$$

Exercice 2 — 20 points

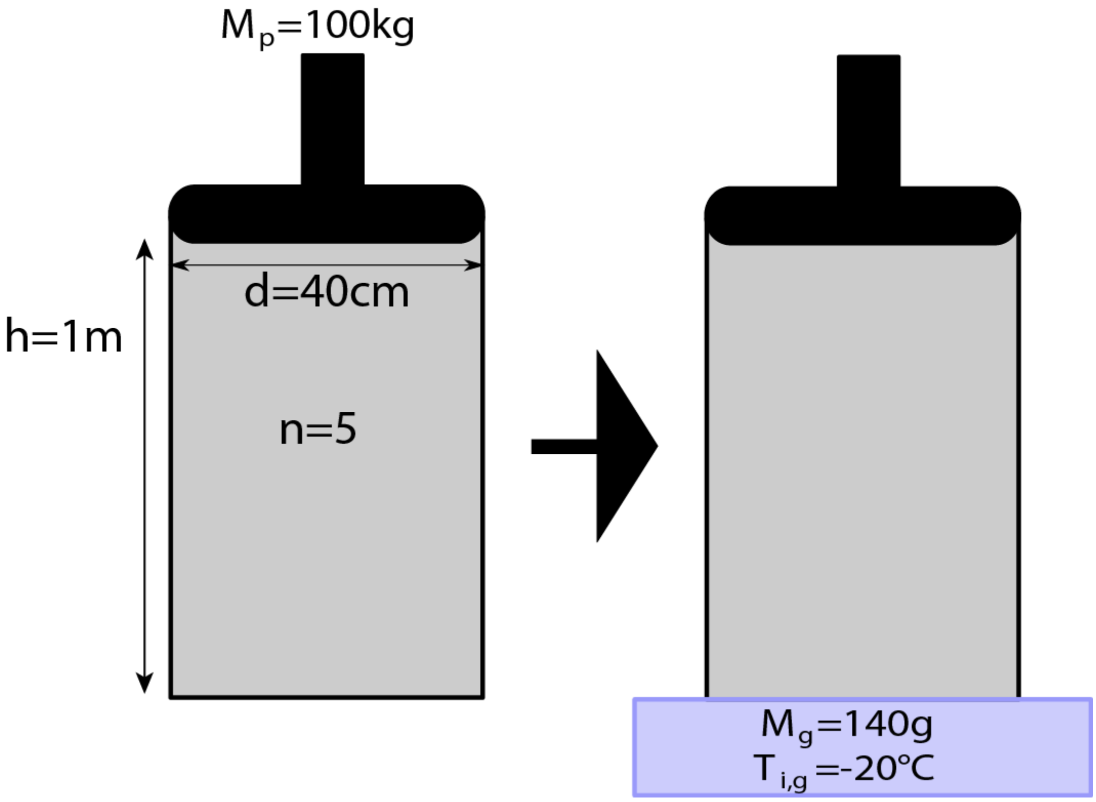
Un cylindre (diamètre : 40 cm) à parois isolées contient 5 moles de gaz parfait et est fermé par un piston, également isolé, de masse 100 kg, qui peut coulisser sans frottement. A l'équilibre, le piston est à une altitude de 1 m depuis le fond du cylindre et la pression extérieure est simplement la pression atmosphérique.
L'isolation thermique au fond du cylindre est enlevée, et ce dernier est immédiatement mis en contact thermique avec un bloc de glace de masse 140 g et à une température de -20°C.
Après l'établissement de l'équilibre thermique, on observe que la température du gaz et de la glace est de 0°C mais que tout le bloc est encore à l'état de glace.

a) Déterminer si le gaz est mono-atomique ou di-atomique.
b) On pose alors sur le piston un solide de masse égale à celle du piston, et on attend que le système atteigne un nouvel équilibre. Calculer alors la masse d'eau qui s'est formée.

Indications : Constante des gaz parfaits $R = 8.314\,\mathrm{J\,K^{-1}\,mol^{-1}}$; Chaleur latente de fusion de la glace à 0°C : $L_{\mathrm{fus.}} = 333.6\,\mathrm{kJ\,kg^{-1}}$; Chaleur spécifique de la glace à 0°C $c_{\mathrm{glace}} \simeq 2110\,\mathrm{J\,kg^{-1}\,K^{-1}}$; $1\,\mathrm{atm} = 1.013 \times 10^5\,\mathrm{Pa}$.

Corrigé

Le système étudié peut être représenté par la figure ci-dessous :



a) (**12 points**) Au contact de la glace, le gaz va perdre de la chaleur et se refroidir jusqu'à $T_{\mathrm{fin.}} = 0$°C. Cette transformation se fait à pression constante

$$p_1 = p_0 + \frac{M_{\mathrm{p}} g}{\pi \left(d/2\right)^2}. \tag{13}$$

La quantité de chaleur perdue par le gaz peut s'exprimer comme

$$Q_{\mathrm{gaz}} = n c_{\mathrm{p}} \left(T_{\mathrm{fin.}} - T_{\mathrm{ini.,gaz}}\right) < 0, \tag{14}$$

où la valeur de la chaleur spécifique à pression constante c_p dépend du nombre de degrés de liberté et donc de la nature du gaz : mono-atomique ($\nu = 3$) ou di-atomique ($\nu = 5$),

$$c_{\rm p} = c_{\rm v} + R = \frac{\nu}{2} R + R. \tag{15}$$

Soit finalement,

$$Q_{\rm gaz} = nR\left(\frac{\nu}{2} + 1\right)\left(T_{\rm fin.} - T_{\rm ini.,gaz}\right). \tag{16}$$

La temperature initiale du gaz est donnée par la loi des gaz parfaits

$$T_{\rm ini.,gaz} = \frac{p_1 V_{\rm ini.}}{nR} \qquad \text{avec} \qquad V_{\rm ini.} = \pi\left(\frac{d}{2}\right)^2 h.$$

De plus, la chaleur reçue par le bloc de glace pour augmenter sa temperature de $T_{\rm ini.,glace} = -20°C$ à $T_{\rm fin.} = 0°C$ est donnée par

$$Q_{\rm glace} = M_{\rm glace} c_{\rm glace}\left(T_{\rm fin.} - T_{\rm ini.,glace}\right) > 0. \tag{17}$$

En posant :

$$|Q_{\rm gaz}| = |Q_{\rm glace}| \quad \Rightarrow \quad \left|nR\left(\frac{\nu}{2} + 1\right)\left(T_{\rm fin.} - T_{\rm ini.,gaz}\right)\right| = \left|M_{\rm glace} c_{\rm glace}\left(T_{\rm fin.} - T_{\rm ini.,glace}\right)\right|$$

on obtient :

$$\nu = \left|2\left[\frac{M_{\rm glace} c_{\rm glace}}{nR}\left(\frac{T_{\rm fin.} - T_{\rm ini.,glace}}{T_{\rm fin.} - T_{\rm ini.,gaz}}\right) - 1\right]\right| \tag{18}$$

<u>Applications numeriques :</u>

$$p_1 = 1.013 \times 10^5 + \frac{100 \times 9.81}{\pi \times (0.2)^2} \simeq 1.091 \times 10^5\,\text{Pa}.$$

$$V_{\rm ini.} = \pi \times 0.2^2 \times 1 \simeq 0.126\,\text{m}^3.$$

$$T_{\rm ini.,gaz} \simeq \frac{1.091 \times 10^5 \times 0.126}{5 \times 8.314} \simeq 330.7\,\text{K} = 57.7°\text{C}.$$

$$\nu = \left|2\left[\frac{0.14 \times 2110}{5 \times 8.314}\left(\frac{0 - (-20)}{0 - (57.7)}\right) - 1\right]\right| = 2.92 \simeq 3.$$

La réponse à la question posée est donc : le gaz étudié est un gaz mono-atomique.
<u>Attention!</u> En arondissant le volume à 0.12m^3 (ce qui est faux!), on trouve une valeur numérique pour ν proche de 5.

b) (**8 points**) Le travail aditionnel fait sur le gaz par le solide ajouté entraîne une augmentation de l'énergie interne du gaz. Cette énergie interne supplémentaire va être perdue par le gaz pour atteindre à nouveau l'équilibre thermique avec le bloc de glace. Suivant la valeur de cette variation d'énergie interne, tout ou partie de la glace va fondre.
Le travail fait sur le gaz par le solide ajouté est

$$W_{\rm solide} = F\Delta x = p_2 \Delta V = \left[p_1 + \frac{M_p g}{\pi (d/2)^2}\right](V_3 - V_1) = \left[p_1 + \frac{M_p g}{\pi (d/2)^2}\right]\left(\frac{nRT_1}{p_2} - \frac{nRT_1}{p_1}\right).$$

La masse de glace fondue est simplement donnée par :

$$m' = \frac{W_{\rm solide}}{L_{\rm f}}.$$

Application numérique :

$$p_2 = 1.091 \times 10^5 + \frac{100 \times 9.81}{\pi(0.2/2)^2} \simeq 1.1694 \times 10^5\,\mathrm{Pa}$$

$$W_{\text{solide}} = 5 \times 8.314 \times 1.1694 \times 10^5 \left(\frac{273}{1.1694 \times 10^5} - \frac{273}{1.091 \times 10^5}\right) \simeq -811\,\mathrm{J}.$$

$$m' = \frac{-811}{333.6 \times 10^3} \simeq 0.0024\,\mathrm{kg} \simeq 2.4\,\mathrm{g}.$$

A l'équilibre, on a donc un gaz à 0°C, 138 g de glace à 0°C et 2 g d'eau liquide à 0°C.
Si la valeur du travail fait par le solide ajouté avait été bien plus grande, toute la glace aurait pu fondre et à l'équilibre thermique, on aurait eu un gaz et 140 g d'eau liquide à une température T>0°C.

Autre méthode : calculer la température du gaz après sa compression :
Le changement interne du gaz est très rapide lorsque le deuxieme poids est posé, donc il s'agit d'un processus adiabatique, mais irréversible donc on ne peut pas utiliser la relation $pV^\gamma = \text{const}$. Alors, il faut séparer le processus en deux étapes : la compression adiabatique qui va augmenter la temperature du gaz ; puis la chaleur perdue par le gaz au contact du bloc de glace et qui va en fondre tout ou partie.
Le travail fait par le piston *sur* le gaz

$$W_{\text{recu}} = p_2\left(V_{\mathrm{f},2} - V_{\mathrm{f},1}\right) = -W_{\text{piston}},$$

et avec le premiere principe,

$$\Delta U = -W_{\text{recu}} \quad \Rightarrow \quad nc_{\mathrm{v}}\left(T_{\mathrm{f},2} - T_{\mathrm{f},1},\right) = -p_2\left(V_{\mathrm{f},2} - V_{\mathrm{f},1}\right)$$

avec

$$p_2 = p_1 + \frac{M_{\mathrm{p}} g}{\pi\left(d/2\right)^2}.$$

Grâce à la loi des gaz parfaits

$$nc_{\mathrm{v}}\left(T_{\mathrm{f},2} - T_{\mathrm{f},1}\right) = -p_2\left(\frac{nRT_{\mathrm{f},2}}{p_2} - \frac{nRT_{\mathrm{f},1}}{p_1}\right),$$

et donc

$$T_{\mathrm{f},2} = T_{\mathrm{f},1}\left(\frac{p_2/p_1 + \frac{\nu}{2}}{1 + \frac{\nu}{2}}\right).$$

Applications numeriques :

$$T_{\mathrm{f},2} = 273.15 \times \left(\frac{\frac{1.17\times10^5}{1.01\times10^5} + 3/2}{1 + 3/2}\right) = 280.99\,\mathrm{K} \simeq 281\,\mathrm{K}.$$

Comme le processus est à pression constante, la chaleur perdue par le gaz est donnée par

$$Q = nc_p\left(T_{\mathrm{f},2} - T_{\mathrm{f},1}\right) = nR\frac{\nu+2}{2}\left(T_{\mathrm{f},2} - T_{\mathrm{f},1}\right) = \frac{5}{2}nR\left(T_{\mathrm{f},2} - T_{\mathrm{f},1}\right).$$

Cette énergie disponible sert à faire fondre une masse m' de glace :

$$\frac{5}{2}nR\left(T_{\mathrm{f},2}-T_{\mathrm{f},1}\right)=m'L_{\mathrm{f}} \quad \Rightarrow \quad m'=\frac{\frac{5}{2}nR\left(T_{\mathrm{f},2}-T_{\mathrm{f},1}\right)}{L_{\mathrm{f}}}. \tag{19}$$

Application numérique :

$$m'=\frac{2.5\times 5\times 8.314\times(281-273)}{336.5\times 10^{3}}=0.0024\,\mathrm{kg}\simeq 2.4\,\mathrm{g}. \tag{20}$$

Exercice 3 — 20 points

Une mole de gaz parfait à une température de 25°C et une pression de 1 atm suit les transformations réversibles suivantes :

(i) : détente isotherme jusqu'à 0.5 atm ;
(ii) : détente isobare jusqu'à 100°C ;
(iii) : compression isotherme jusqu'à 1 atm ;
(iv) : compression isobare jusqu'à 25°C ;

a) Représenter l'ensemble de ces transformations sur un diagramme $p - V$.

b) Après la transformation *(iv)*, est-ce que la fraction des molécules du gaz qui ont une vitesse supérieure à 200 m/s est plus grande ou plus petite qu'après la transformation *(ii)* ? Justifiez votre réponse.

Depuis le même état initial, le gaz suit le processus cyclique suivant :

(v) : détente isobare jusqu'à 100°C ;
(vi) : réduction de la pression à volume constant jusqu'à une pression p ;
(vii) : compression isobare à la pression p jusqu'à un volume de 24.5 l ;
(viii) : augmentation de la pression jusqu'à 1 atm à volume constant ;

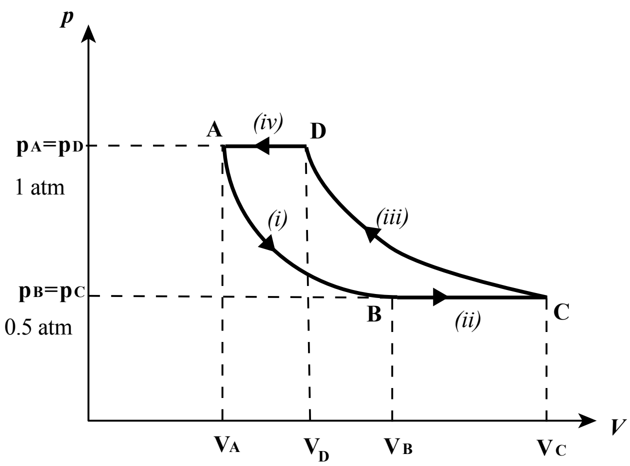
c) Calculer p tel que la valeur du travail fait sur le gaz dans la première suite de processus (*(i)* à *(iv)*) soit la même que celle du travail fourni par le gaz dans la deuxième série de processus (*(v)* à *(viii)*).

d) Est-ce que la valeur de la variation d'enthalpie sur les processus *(i)* - *(iv)* est inférieure, supérieure ou égale à celle sur les processus *(v)* - *(viii)* ? Justifier votre réponse.

Indications : $1\,\text{atm} = 1.013 \times 10^5\,\text{Pa}$; Constante des gaz parfaits : $R = 8.314\,\text{J}\,\text{K}^{-1}\,\text{mol}^{-1}$;

Corrigé

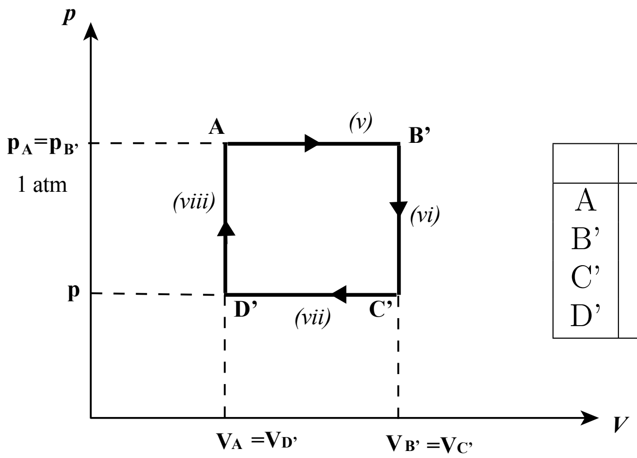
a) (**4 points**) Cycle dans le diagramme $p - V$: nous avons deux processus isothermes et deux isobares. Nous pouvons les dessiner comme la figure ci-dessous. On fera bien attention à respecter les volumes en particulier $V_A < V_D < V_B$. L'ensemble de ces 4 transformations constitue un cycle *réfrigérateur*.



	p [Pa]	V [m^3]	T [K]
A	1.013×10^5	nRT_A/p_A=0.0245	298
B	$p_A/2$	$2V_A$=0.0490	T_A
C	$p_A/2$	$2nRT_C/p_A$ =0.0612	373
D	p_A	nRT_C/p_A=0.0306	T_C

b) (**2 points**) La température du gaz est plus élevée après le processus *(ii)* qu'après le processus *(iv)*. Or la distribution des vitesses, supposée de Maxwell, ne dépend que de la température. Donc, pour répondre à la question posée, la fraction de molécules ayant une vitesse supérieure à 200 m/s sera plus grande après le processus *(ii)* qu'après le processus *(iv)*.

c) (**10 points**) Pour le deuxième cycle, nous avons deux processus isochores et deux isobares. Nous pouvons le dessiner comme la figure ci-dessous :



	p [Pa]	V [m^3]	T [K]
A	1.013×10^5	nRT_A/p_A=0.0245	298
B'	p_A	$nRT_{B'}/p_A$=0.0306	373
C'	p	$V_{B'}$	$T_{B'}$p$/p_A$
D'	p	0.0245	p$V_{D'}/n/R$

Le travail total est donné par

$$W_{\text{cycle}\,1} = W_{(i)} + W_{(ii)} + W_{(iii)} + W_{(iv)} = W_{A\to B} + W_{B\to C} + W_{C\to D} + W_{D\to A}.$$

Le travail entre A et B vaut :

$$W_{A\to B} = \int_{V_A}^{V_B} pdV = \int_{V_A}^{V_B} \frac{nRT_A}{V} dV = nRT_A \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right) = nRT_A \ln(2).$$

Le travail entre B et C vaut :

$$W_{B\to C} = \int_{V_B}^{V_C} p_B dV = p_B(V_C - V_B) = 0.5 p_A \left(\frac{2nRT_C}{p_A} - \frac{2nRT_A}{p_A}\right) = nR(T_C - T_A).$$

Le travail entre C et D vaut :

$$W_{C\to D} = \int_{V_C}^{V_D} pdV = \int_{V_C}^{V_D} \frac{nRT_C}{V} dV = nRT_C \ln\left(\frac{V_D}{V_C}\right) = nRT_C \ln(0.5).$$

Le travail entre D et A vaut :

$$W_{D\to A} = \int_{V_D}^{V_A} p_A dV = p_A(V_A - V_D) = p_A \left(\frac{nRT_A}{p_A} - \frac{nRT_C}{p_A}\right) = nR(T_A - T_C).$$

Finalement, le travail fait le long du cycle vaut :

$$W_{\text{cycle}\,1} = nRT_A \ln(2) + nR(T_C - T_A) + nRT_C \ln(0.5) + nR(T_A - T_C).$$

<u>Application numérique :</u>

$$W_{\text{cycle}\,1} = 1 \times 8.314 \times 298 \times \ln(2) + 1 \times 8.314 \times 373 \times \ln(0.5) \simeq -432\,\text{J}.$$

Le cycle étudié est un réfrigérateur donc le travail total sur le cycle doit être négatif, qui est bien ce que l'on trouve.
Pour le deuxième cycle, le travail total s'écrit :

$$W_{\text{cycle}\,2} = W_v + W_{vi} + W_{vii} + W_{viii} = W_{A\to B'} + \underbrace{W_{B'\to C'}}_{=0} + W_{C'\to D'} + \underbrace{W_{D'\to A}}_{=0}.$$

Le travail entre B' et C', ainsi qu'entre D' et A', vaut 0 car les transformations sont isochores. Soit :

$$W_{\text{cycle}\,2} = p_A(V_{B'} - V_A) + \mathrm{p}(V_{D'} - V_{C'}) = (p_A - \mathrm{p})(V_{B'} - V_A) = nR\frac{p_A - \mathrm{p}}{p_A}(T_{B'} - T_A).$$

Finalement,

$$|W_{\text{cycle}\,1}| = |W_{\text{cycle}\,2}| \quad \Rightarrow \mathrm{p} = p_A\left(1 - \frac{|W_{\text{cycle},1}|}{nR(T_{B'} - T_A)}\right). \tag{21}$$

Application numérique :

$$\mathrm{p} = 1.013 \times 10^5 \times \left(1 - \frac{432}{1 \times 8.314 \times (373 - 298)}\right) \simeq 3.11 \times 10^4\,\mathrm{Pa} \simeq 0.3\,\mathrm{atm}.$$

d) (**4 points**) Nous savons que l'enthalpie est une variable d'état. Or, la variation d'une variable d'état entre deux états ne dépend pas du chemin suivi. De plus, les deux séries de transformations étudiées sont des cycles. Donc :

$$\Delta H_{\text{cycle}\,1} = \Delta H_{\text{cycle}\,2} = 0. \tag{22}$$

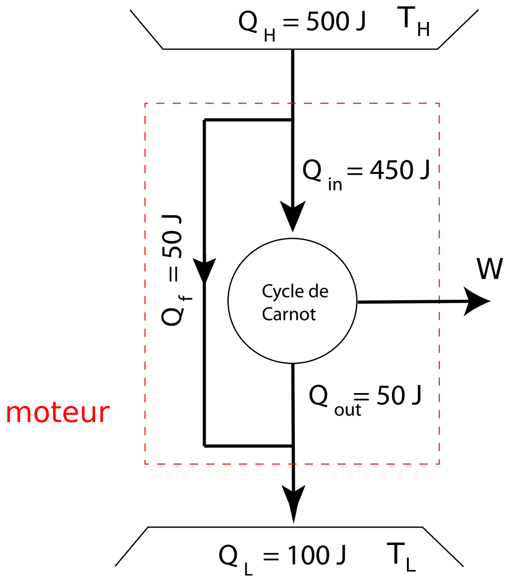
Exercice 4 — 20 points

Un inventeur a développé une méthode pour faire fonctionner un moteur sur un cycle de Carnot, entre deux réservoirs, un à haute température ($T_H = 177\,°\text{C}$), l'autre à basse température ($T_L = -223\,°\text{C}$). La chaleur prise du réservoir à haute température par unité de temps est de 500 J/s, et celle relâchée au réservoir à basse température est de 100 J/s. Malheureusement, il y a une fuite dans le réservoir à haute température, et une quantité de chaleur par unité de temps de 50 J/s "fuit" de la source chaude, en passant directement au réservoir à basse température.

a) Représenter le système sur un diagramme à blocs.
b) Quelle est la puissance produite par ce moteur "avec fuite" ?
c) Quel est le rendement de ce moteur "avec fuite" ? Quel serait le rendement maximum qui peut être obtenu avec un moteur qui fonctionne entre ces températures ?
d) Expliquer brièvement pourquoi l'entropie augmente pendant le fonctionnement du moteur.
e) Quelle est la valeur de la production d'entropie par seconde ?

Corrigé

a) (**2 points**) Soient Q_H, la chaleur perdue par le réservoir à T_H, Q_{in}, la chaleur qui entre dans le cycle de Carnot, Q_{out}, la chaleur qui sort du cycle de Carnot, Q_L, la chaleur qui est reçue par le réservoir à T_L et $Q_f = 50\,\text{J}$ la chaleur transférée par la fuite. Avec les données de l'exercice, il n'y a qu'une façon de dessiner le moteur : $Q_H = 500\,\text{J} = Q_{in} + Q_f$ et $Q_L = 100\,\text{J} = Q_{out} + Q_f$. Ce qui donne comme schéma-bloc :



b) (**2 points**) Un bilan énergétique permet de trouver la puissance produite par le moteur simplement comme

$$\dot{W} = \dot{Q}_H - \dot{Q}_L = 500 - 100 = 400\,\text{W}. \tag{23}$$

c) (**5 points**) Le rendement de ce moteur est calculé comme le rapport entre *l'effet utile* (la puissance produite sous forme de travail par unité de temps) et *le prix à payer* (la chaleur nécessaire par unité de temps) :

$$\eta_{\text{moteur}} \equiv \frac{\dot{W}}{\dot{Q}_H} = \frac{\dot{Q}_H - \dot{Q}_L}{\dot{Q}_H} = \frac{400}{500} = 0.80. \tag{24}$$

Le rendement maximum est obtenu si l'on considère seulement le cycle de Carnot :

$$\eta_{\text{Carnot}} = 1 - \frac{\dot{Q}_{\text{out}}}{\dot{Q}_{\text{in}}} = 1 - \frac{50}{450} = 0.89 > \eta_{\text{moteur}}. \tag{25}$$

On peut également calculer le rendement maximum en utilisant la température des réservoirs.

$$\eta_{\text{Carnot}} \equiv 1 - \frac{T_L}{T_H} = 1 - \frac{50}{450} = 0.89. \tag{26}$$

d) (**6 points**) Le moteur fonctionne entre deux réservoirs à température constante. Le cycle de Carnot est réversible et il ne génère pas d'entropie. Il y a une génération d'entropie seulement pour l'échange direct de chaleur entre les deux réservoirs due à la fuite de chaleur. Ceci est en fait un processus spontané, donc irréversible.

e) (**5 points**) Pour évaluer la génération d'entropie, le système (isolé) est divisé en trois parties : le réservoir à haute température T_H, le réservoir à basse température T_L et le cycle de Carnot. La variation d'entropie pour chaque partie est donnée par :

$$\begin{aligned}
\Delta\dot{S}_H &= \oint_H \frac{\delta\dot{Q}}{T} = \frac{-\dot{Q}_H}{T_H} = -\frac{500}{450} = -1.11\,\mathrm{J\,s^{-1}\,K^{-1}}, \\
\Delta\dot{S}_{cyc} &= 0 \qquad \text{(Le cycle de Carnot est reversible)}, \\
\Delta\dot{S}_L &= \oint_L \frac{\delta\dot{Q}}{T} = \frac{\dot{Q}_L}{T_L} = \frac{100}{50} = 2\,\mathrm{J\,s^{-1}\,K^{-1}}.
\end{aligned}$$

Donc

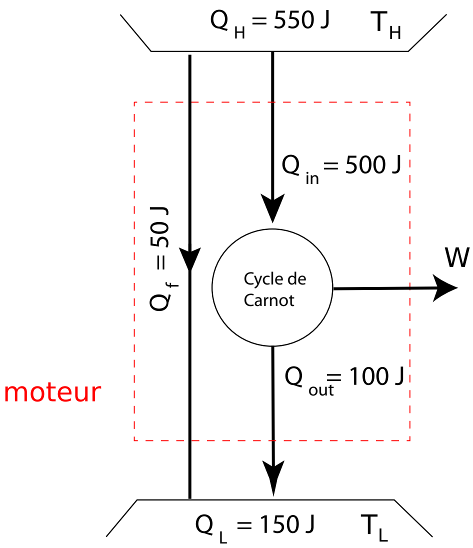
$$\Delta\dot{S}_{sys} = \Delta\dot{S}_H + \Delta\dot{S}_{cycle} + \Delta\dot{S}_L = -1.11 + 0 + 2 = 0.89\,\mathrm{J\,s^{-1}\,K^{-1}} \geq 0. \tag{27}$$

Le résultat obtenu est bien en accord avec le deuxième principe de la thermodynamique.

Alternative

Une autre interprétation a été acceptée :

$$Q_H = Q_{in} + Q_f = 500\,\mathrm{J} + Q_f \quad \text{et} \quad Q_L = Q_{out} + Q_f = 100\,\mathrm{J} + Q_f.$$



$$\dot{W}_{\text{moteur}} = \dot{Q}_H - \dot{Q}_L = 550 - 150 = 400\,\mathrm{W}.$$

$$\eta_{\text{moteur}} \equiv \frac{\dot{W}}{\dot{Q}_H} = \frac{\dot{Q}_H - \dot{Q}_L}{\dot{Q}_H} = \frac{400}{550} \simeq 0.73.$$

$$\eta_{\text{Carnot}} = 1 - \frac{\dot{Q}_{\text{out}}}{\dot{Q}_{\text{in}}} = 1 - \frac{100}{500} = 0.8 > \eta_{\text{moteur}}.$$

MAIS cette valeur n'est pas consistente avec le rendement calculé avec la température des réservoirs ! ! C'est pourquoi tous les points ne peuvent être donnés pour cette interprétation.

$$
\begin{aligned}
&\Delta \dot{S}_H = \oint_H \frac{\delta \dot{Q}}{T} = \frac{-\dot{Q}_H}{T_H} = -\frac{550}{450} = -1.22\,\mathrm{J\,s^{-1}\,K^{-1}}, \\
&\Delta \dot{S}_{cyc} = 0 \qquad \text{(Le cycle de Carnot est reversible)}, \\
&\Delta \dot{S}_L = \oint_L \frac{\delta \dot{Q}}{T} = \frac{\dot{Q}_L}{T_L} = \frac{150}{50} = 3\,\mathrm{J\,s^{-1}\,K^{-1}}.
\end{aligned}
$$

Donc

$$
\Delta \dot{S}_{sys} = \Delta \dot{S}_H + \Delta \dot{S}_{cycle} + \Delta \dot{S}_L = -1.22 + 0 + 3 = 1.78\,\mathrm{J\,s^{-1}\,K^{-1}} \geq 0.
$$

Exercice 5 — 20 points

Suite à une éruption volcanique, 3×10^9 kg de lave forment une couche de $10\,\mathrm{km}^2$ autour du cratère du volcan. La partie interne de la lave (côté sol) est à $1200\,°\mathrm{C}$, et la partie externe (côté atmosphère) est à $450\,°\mathrm{C}$. La température de l'environnement autour est de $27\,°\mathrm{C}$. On considère la lave et l'environnement autour comme des corps noirs, et on néglige les transferts thermiques entre la lave et le sol.

a) Quelle est la puissance nette transférée par la surface externe de la lave à l'environnement par rayonnement ?

b) Déterminer l'ordre de grandeur du temps nécessaire pour que la lave atteigne une température égale à celle de l'environnement autour ? Justifier vos approximations.

c) Si la puissance transférée par la partie interne à la partie externe par conduction est égale à la puissance calculée en (a), quelle est l'épaisseur de la couche de lave ?

d) Il pleut très fort ($20\mathrm{l/m^2/heure}$), et l'on suppose que toute l'eau de la pluie est évaporée immédiatement dès qu'elle rentre en contact avec la lave (autrement dit, on néglige le temps et l'énergie pour que l'eau arrive à $100\,°\mathrm{C}$ une fois en contact avec la lave), et que la couche d'eau de pluie empêche totalement la lave de rayonner, dans quel sens et de combien variera l'ordre de grandeur du temps de refroidissement de la lave ? Faites les mêmes approximations qu'en (b), et justifiez de leur impact sur l'estimation du temps nécessaire.

Indications : conductibilité thermique de la lave $k_{\mathrm{lave}} = 2$ W/m/K ; chaleur spécifique de la lave $c_{\mathrm{lave}} = 800$ J/kg/K ; constante de Stefan-Boltzmann $\sigma_B = 5.7 \times 10^{-8}\mathrm{W\,m^{-2}\,K^{-4}}$; chaleur latente de vaporisation de l'eau $L_{\mathrm{vap.}} = 2'260$ kJ/kg.

Corrigé

a) (**3 points**) D'après la loi de Stefan-Boltzmann, la puissance totale rayonnée par la lave est

$$P_{\mathrm{ray.,lave}} = S\sigma_B T_e^4,$$

où $S = 10\,\mathrm{km}^2$ est la surface de la couche de lave, et $T_e = 450°\mathrm{C}$ sa température externe. De plus, l'environnement agit également comme un corps noir à $T_{\mathrm{env}} = 27°\mathrm{C}$, qui cède donc à la lave, par rayonnement, une puissance

$$P_{\mathrm{env.}\to\mathrm{lave}} = S\sigma_B T_{\mathrm{env}}^4.$$

La puissance transférée nette par la surface externe de la lave à l'environnement par rayonnement est donc

$$P_{\mathrm{net,lave}\to\mathrm{env}} = S\sigma_B\left(T_e^4 - T_{\mathrm{env}}^4\right) \approx S\sigma_B T_e^4 \tag{28}$$

car $T_e \gg T_{\mathrm{env}}$. L'application numérique donne $P_{net,lave\to env} \approx 155.9$ GW.

b) (**8 points**) Pour simplifier, on étudie dans cette question l'évolution de la température moyenne de la lave $\bar{T}$. On fait l'hypothèse que la température de surface de la lave est proche de sa température moyenne (au fur et à mesure que la lave se refroidit, on s'attend à voir le gradient de température en son sein diminuer). On peut donc écrire

$$m_{\mathrm{lave}}c_{\mathrm{lave}}\frac{\partial\bar{T}}{\partial t} \approx -S\sigma_B(\bar{T}^4 - T_{\mathrm{env}}^4), \tag{29}$$

ou encore, comme on néglige les variations spatiales de T (on prend ici une valeur moyennée dans le volume)

$$\frac{m_{\mathrm{lave}}c_{\mathrm{lave}}}{S\sigma_B}\frac{\mathrm{d}\bar{T}}{\bar{T}^4 - T_{\mathrm{env}}^4} = -\mathrm{d}t. \tag{30}$$

On supose que, pendant le refroidissement, la lave reste en moyenne bien plus chaude que son environnement, de sorte que $\bar{T}^4 - T_{\text{env}}^4 \approx \bar{T}^4$. On a alors

$$\frac{m_{\text{lave}} c_{\text{lave}}}{S\sigma_B} \frac{\mathrm{d}\bar{T}}{\bar{T}^4} = -\mathrm{d}t \tag{31}$$

Ce qui mène à

$$\tau = t_1 - t_0 = \frac{m_{\text{lave}} c_{\text{lave}}}{3S\sigma_B} \left[\frac{1}{\bar{T}_1^3} - \frac{1}{\bar{T}_0^3} \right]. \tag{32}$$

Pour $\bar{T}_0 = (1200 + 450)/2 = 825°\text{C}$, $\bar{T}_1 = 27°\text{C}$, on obtient $\tau \approx 5 \times 10^4$ s ≈ 14 h.
Attention, en faisant l'hypothèse que la puissance rayonnée est liée à la température moyenne de la lave et non sa température de surface, on sur-estime le flux radiatif et on sous-estime donc le temps de refroidissement. Si l'on prend $\bar{T}_1 = 100°\text{C}$ (voir question d) pour comprendre pourquoi), on obtient $\tau \approx 2.5 \times 10^4$ s, c'est à dire environ 7 heures.

c) (**3 points**) La puissance transférée par la partie interne à la partie externe par conduction doit être égale à la puissance calculée au point a). On doit donc avoir égalité des flux de chaleur, ce qui mène à

$$k_{\text{lave}} S \frac{(T_i - T_e)}{l} \approx S\sigma_B T_e^4 \tag{33}$$

où $T_i = 1200°\text{C}$ est la température interne de la lave et l, l'épaisseur de la couche. Il vient donc

$$l = k_{\text{lave}} \frac{(T_i - T_e)}{\sigma_B T_e^4} \approx 9.6 \text{ cm} \tag{34}$$

d) (**6 points**) Notons D le débit d'eau de pluie ($D = 20\text{l/m}^2\text{/heure}$). Si l'on suppose que toute l'eau de la pluie est évaporée immédiatement dès qu'elle rentre en contact avec la lave, la puissance totale retirée de la lave par l'eau lors de son évaporation est donnée par

$$P_{\text{lave}\to\text{eau}} = SD\rho_{eau}L \tag{35}$$

L'application numérique donne $P_{\text{lave}\to\text{eau}} \approx 12.6$ GW.
Ce chiffre peut sembler beaucoup plus petit que la valeur trouvée dans la question a), mais il ne dépend pas de T_{lave}, contrairement à $P_{\text{net,lave}\to\text{env}}$ qui diminuera fortement au fur et à mesure que la lave se refroidit.
Calculons donc le temps nécessaire à la pluie pour refroidir la lave. On s'intéresse encore une fois à l'évolution de la température moyenne de la couche de lave, en négligeant cette fois-ci la radiation. On a donc

$$m_{\text{lave}} c_{\text{lave}} \frac{\partial \bar{T}}{\partial t} \approx -SD\rho_{eau}L,$$

ce qui mène à

$$m_{\text{lave}} c_{\text{lave}} \frac{\partial \bar{T}}{\partial t} \approx -SD\rho_{eau}L,$$

où encore

$$\frac{m_{\text{lave}} c_{\text{lave}}}{SD\rho_{eau}L} \mathrm{d}\bar{T} = -\mathrm{d}t,$$

et donc

$$\tau = t_1 - t_0 = \frac{m_{\text{lave}} c_{\text{lave}}}{SD\rho_{eau}L} \left(\bar{T}_0 - \bar{T}_1 \right). \tag{36}$$

Pour $\bar{T}_0 = (1200 + 450)/2 = 825°\text{C}$, $\bar{T}_1 = 100°\text{C}$, on obtient $\tau \approx 13 \times 10^3$ s ≈ 4 h.
Notez bien qu'ici on doit considérer $\bar{T}_1 = 100°\text{C}$ car une fois la température de la lave inférieure à 100°C, l'eau ne se vaporise plus et refroidit la lave par conduction (non traitée ici).

Il apparait donc, en comparant avec les chiffres de la question b), que le refroidissement par l'eau de pluie est plus efficace. C'est logique, car si le flux thermique radiatif est très fort initialement, sa variation en T^4 le fait rapidement décroitre à mesure que la lave se refroidit, alors que la chaleur retirée par l'eau ne dépend pas de la température de la lave (tant qu'elle est à plus de 100°C).