

Physique générale II

CORRIGÉ DE L'EXAMEN DU 19 JUIN 2015

Prof. A. Fasoli

Exercice 1

Une mole de gaz idéal monoatomique suit un cycle thermodynamique constitué par une transformation adiabatique réversible AB ($V_A = 191$, $T_A = 308\text{ K}$, $V_B = 91$) suivie d'une transformation isobare irréversible BC effectuée en maintenant le gaz en contact avec un réservoir à température $T_C = 210\text{ K}$, suivie d'une isotherme réversible CD ($V_D = 51$), durant laquelle le gaz reste en contact avec le même réservoir et enfin une détente réversible DA , représentée dans le diagramme $p - V$ par un segment décrit par la relation $p = p_D + \frac{p_A - p_D}{V_A - V_D} (V - V_D)$.

- Représentez le cycle dans le diagramme $p - V$. S'agit-il d'un cycle moteur ou réfrigérateur ?
- Calculez la température au point B .
- Calculez le travail effectué et la chaleur échangée pour chacune des transformations du cycle.
- Calculez la variation d'entropie du gaz pour la transformation irréversible BC .
- Calculez la variation d'entropie du gaz pour le cycle complet.

Indications : Constante des gaz parfaits : $R = 8.314\text{ J K}^{-1}\text{ mol}^{-1}$.

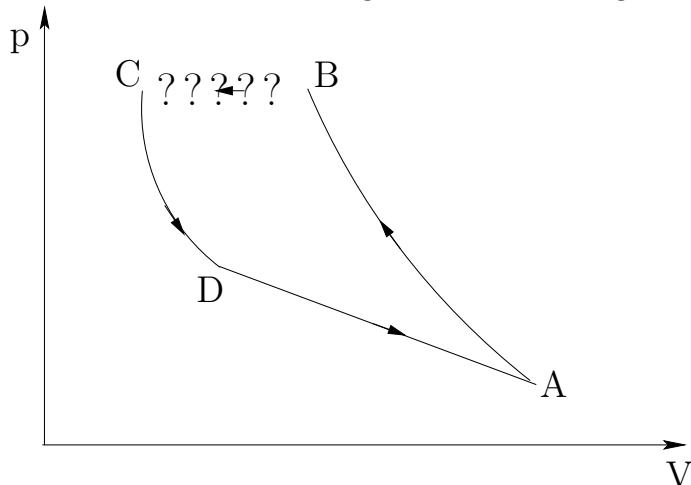
Corrigé

- Gaz parfait monoatomique : $\gamma = \frac{5}{3}$ et $C_V = \frac{3}{2}R$.

Les 4 transformations du cycle sont :

- $A \rightarrow B$ compression adiabatique : $V_B < V_A$ et $p_B > p_A$.
- $B \rightarrow C$ compression isobare irréversible : $V_C < V_B$ et $p_C < p_B$ mais on ne peut pas tracer directement de ligne entre B et C.
- $C \rightarrow D$ détente isotherme : $V_D > V_C$ et $p_D > p_C$.
- $D \rightarrow A$ détente linéaire.

Le cycle tourne dans le sens anti-horaire. Il s'agit donc d'un réfrigérateur.



- Pour une transformation adiabatique, on a $TV^{\gamma-1} = \text{cte} \Rightarrow T_A V_A^{\gamma-1} = T_B V_B^{\gamma-1}$.

$$T_B = T_A \left(\frac{V_A}{V_B} \right)^{\gamma-1} \quad (1)$$

Application numérique :

$$T_B = 308 \times \left(\frac{19 \times 10^{-3}}{9 \times 10^{-3}} \right)^{\frac{5}{3}-1} = 506 \text{ K}$$

On peut arriver au même résultat en utilisant $T_B = \frac{p_B V_B}{nR}$ avec $p_B = p_A \left(\frac{V_A}{V_B} \right)^\gamma$ et $p_A = nR \frac{T_A}{V_A}$.

c) Calculons les paramètres aux 4 points du cycle :

	A	B	C	D
T [K]	308	$T_A \left(\frac{V_A}{V_B} \right)^{\gamma-1} = 506$	210	T_C
p [Pa]	$\frac{nRT_A}{V_A} = 1.35 \times 10^5$	$p_A \left(\frac{V_A}{V_B} \right)^\gamma = 4.68 \times 10^5$	p_B	$\frac{nRT_C}{V_D} = 3.49 \times 10^5$
V [m ³]	19×10^{-3}	9×10^{-3}	$\frac{nRT_c}{p_B} = 3.7 \times 10^{-3}$	5×10^{-3}

Calculons maintenant les travaux effectués et chaleurs échangés :

$A \rightarrow B$: transformation adiabatique donc pas d'échange de chaleur

$$Q_{A \rightarrow B} = 0 \text{ J}$$

$$\begin{aligned} W_{A \rightarrow B} &= \int_A^B pdV = C \int_A^B \frac{dV}{V^\gamma} = \frac{C}{1-\gamma} (V_B^{1-\gamma} - V_A^{1-\gamma}) \text{ avec } C = p_A V_A^\gamma \\ W_{A \rightarrow B} &= \frac{P_A V_A}{1-\gamma} \left(\left(\frac{V_B}{V_A} \right)^{1-\gamma} - 1 \right) = \frac{nRT_A}{1-\gamma} \left(\left(\frac{V_B}{V_A} \right)^{1-\gamma} - 1 \right) = -2480 \text{ J} \end{aligned} \quad (2)$$

$B \rightarrow C$: isobare irréversible

Le travail n'étant pas une variable d'état, sa valeur dépend du chemin suivi :

$$W_{B \rightarrow C} = \int_B^C pdV$$

Or on ne sait pas comment varie la pression en fonction du volume le long du chemin irréversible donc on ne peut pas calculer directement le travail.

Cependant, on pourrait calculer le travail à partir du premier principe,

$$W_{B \rightarrow C} = Q_{B \rightarrow C} - \Delta U_{B \rightarrow C} = Q_{B \rightarrow C} - nC_V(T_C - T_B),$$

mais on ne connaît pas la quantité de chaleur échangée au cours de cette transformation.

Il n'est donc pas possible de calculer le travail avec les données du problème pour cette transformation irréversible. Pour continuer, on peut approximer cette transformation par une transformation réversible (ou une combinaison de transformations réversibles) pour lesquelles on peut calculer le travail effectué. Par exemple, on peut approximer la transformation isobare irréversible BC par une isobare réversible ainsi on obtient :

$$W_{B \rightarrow C}^{\text{rev}} = \int_B^C pdV = p_B \int_B^C dV = p_B(V_C - V_B) = -2480 \text{ J} \quad (3)$$

$$\begin{aligned}\Delta U_{B \rightarrow C} &= \frac{3}{2}nR(T_C - T_B) = -3691 \text{ J} \\ Q_{B \rightarrow C} &= \Delta U_{B \rightarrow C} + W_{B \rightarrow C}^{\text{rev}} \simeq -6174 \text{ J}\end{aligned}\quad (4)$$

$C \rightarrow D$: isotherme

$$\Delta U_{C \rightarrow D} = 0 \text{ J}$$

$$W_{C \rightarrow D} = \int_C^D pdV = \int_C^D \frac{nRT}{V} dV = nRT_c \int_C^D \frac{dV}{V} = nRT_C \ln\left(\frac{V_D}{V_C}\right) = 525 \text{ J} \quad (5)$$

$$Q_{C \rightarrow D} = \Delta U_{C \rightarrow D} + W_{C \rightarrow D} = 525 \text{ J} \quad (6)$$

$D \rightarrow A$: détente

$$\begin{aligned}W_{D \rightarrow A} &= \int_D^A pdV = \int_D^A p_D + \alpha(V - V_D)dV \text{ avec } \alpha = \frac{p_A - p_D}{V_A - V_D} \\ &= p_D \int_D^A dV + \alpha \int_D^A (V - V_D)dV \\ &= p_D(V_A - V_D) + \alpha \frac{(V_A - V_D)^2}{2} = p_D(V_A - V_D) + \frac{1}{2}(p_A - p_D)(V_A - V_D) \\ \Rightarrow W_{D \rightarrow A} &= \frac{1}{2}(p_A + p_D)(V_A - V_D) = 3388 \text{ J} \quad (7)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta U_{D \rightarrow A} &= \int_D^A \frac{3}{2}nRdT = \frac{3}{2}nR(T_A - T_D) = 1222 \text{ J} \\ Q_{D \rightarrow A} &= \Delta U_{D \rightarrow A} + W_{D \rightarrow A} = 4602 \text{ J} \quad (8)\end{aligned}$$

On vérifie que $\Delta U_{\text{cycle}} \simeq 0$ comme attendu.

- d) On ne sait pas calculer la variation d'entropie pour une transformation irréversible. Cependant l'entropie étant une variable d'état, sa variation entre 2 états ne dépend pas du chemin suivi mais seulement des états initial et final. On peut donc calculer la variation d'entropie sur BC pour une transformation équivalente réversible (par exemple, une isobare réversible) avec

$$\Delta S_{B \rightarrow C} = \int_B^C \frac{\delta Q}{T}.$$

Le premier principe de la thermodynamique s'écrit : $dU = \delta Q - \delta W$ donc

$$\delta Q = dU + \delta W = nC_VdT + pdV = nC_VdT + \underbrace{p \frac{nRdT}{p}}_{\text{car } p \text{ est constante}} = n(C_V + R)dT \quad (9)$$

Finalement,

$$\Delta S_{B \rightarrow C} = \int_B^C \frac{\delta Q}{T} = n(C_V + R) \int_B^C \frac{dT}{T} = n(C_V + R) \ln\left(\frac{T_C}{T_B}\right) = \frac{5}{2}nR \ln\left(\frac{T_C}{T_B}\right) \quad (10)$$

Application numérique :

$$\Delta S_{B \rightarrow C} = 1 \times \left(\frac{3}{2}R + R\right) \times \ln\left(\frac{210}{506}\right) = -18 \text{ J K}^{-1}.$$

e) La variation d'entropie sur le cycle

$$\Delta S_{\text{cycle}} = 0$$

car l'entropie est une variable d'état : sa variation entre deux états ne dépend pas du chemin suivi même pour un cycle irréversible.

Exercice 2

On veut construire un moteur qui fonctionne avec 3 moles d'un gaz parfait diatomique qui parcourt un cycle composé de trois transformations réversibles : une compression adiabatique à partir d'une température $T_A = 30^\circ\text{C}$, une détente isotherme à une température $T_H = 80^\circ\text{C}$ et une compression à pression constante $p_L = 2 \times 10^4 \text{ Pa}$.

- a) Représentez ce cycle dans les diagrammes $p - V$, $T - S$ et $p - S$.
- b) Calculez la variation d'enthalpie pour chaque transformation en fonction des paramètres T_A , T_H et p_L .
- c) Calculez le rendement du moteur et vérifiez qu'il est inférieur à celui qui travaille selon le cycle de Carnot entre les mêmes températures minimale et maximale.

Indications : Constante des gaz parfaits : $R = 8.314 \text{ J K}^{-1} \text{ mol}^{-1}$.

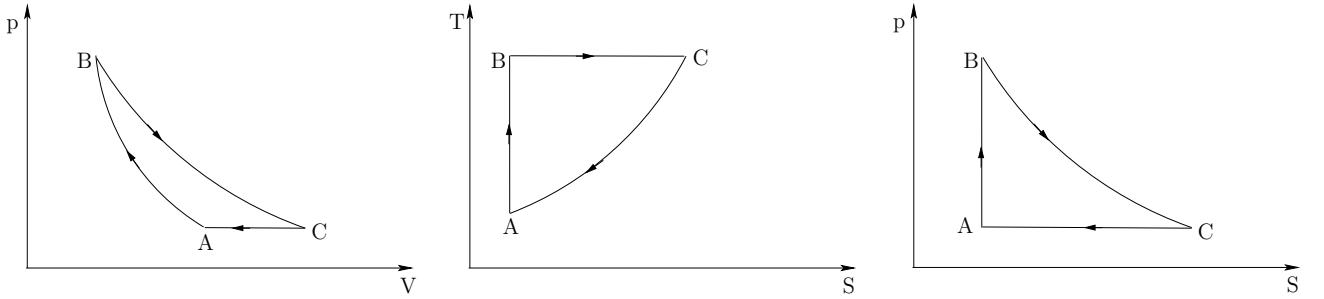
Corrigé

Le moteur fonctionne avec $n = 3$ moles d'un gaz parfait, donc $pV = nRT$. De plus, le gaz est diatomique, donc il a $\nu = 5$ degrés de liberté, ce qui implique que $C_V = \frac{\nu}{2}R = \frac{5}{2}R$ et $\gamma = \frac{2+\nu}{\nu} = \frac{7}{5}$.

Les paramètres aux trois états du cycle sont :

	A	B	C
T [K]	$T_A = 303$	$T_H = 353$	$T_H = 353$
p [Pa]	$p_L = 2 \times 10^4$	$p_L \left(\frac{T_A}{T_H} \right)^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} \simeq 3.41 \times 10^4$	$p_L = 2 \times 10^4$
V [m^3]	$\frac{nRT_A}{p_L} = 0.38$	$\frac{nRT_H}{p_L} \left(\frac{T_H}{T_A} \right)^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} \simeq 0.26$	$\frac{nRT_H}{p_L} = 0.44$

- a) – Diagramme $p - V$: compression adiabatique $A \rightarrow B$: $\Delta V < 0$, $\Delta p > 0$ et $\Delta T > 0$; détente isotherme $B \rightarrow C$: $\Delta V > 0$, $\Delta p < 0$ et $\Delta T = 0$; compression isobare $C \rightarrow A$: $\Delta V < 0$, $\Delta p = 0$ et $\Delta T < 0$.
- Diagramme $T - S$: compression adiabatique $A \rightarrow B$: pas d'échange de chaleur donc $\Delta S = 0$ et $\Delta T > 0$; détente isotherme $B \rightarrow C$: $\Delta T = 0$ donc $\Delta U = 0$ donc $\delta Q = \delta W$ et $\delta W > 0$ car $\Delta V > 0$ donc $\Delta S > 0$. Compression isobare $C \rightarrow A$: $\Delta T < 0$ et $\Delta S < 0$. La dépendance $T = f(S)$ n'est pas forcément connue...
- Diagramme $p - S$: il se déduit aisément des deux autres.



- b) La variable d'état enthalpie est définie comme $H \equiv U + pV$. La variation d'enthalpie est donnée par :

$$dH = dU + d(pV) = dU + pdV + Vdp = nC_VdT + pdV + Vdp.$$

Ainsi, on obtient :

$$\Delta H = \int_i^f nC_VdT + \int_i^f pdV + \int_i^f Vdp = nC_V(T_f - T_i) + \underbrace{\int_i^f pdV}_{W_{i \rightarrow f}} + \int_i^f Vdp \quad (11)$$

Il est important de noter que l'entropie et l'enthalpie sont des variables d'état, ce qui signifie que leur variation ne dépend pas du chemin suivi, mais seulement de l'état initial et final. Donc pour un cycle complet, on a :

$$\Delta S_{\text{cycle}} = 0 \text{ J K}^{-1} \quad \text{et} \quad \Delta H_{\text{cycle}} = 0 \text{ J.}$$

$A \rightarrow B$:

C'est une transformation adiabatique, donc il n'y a pas d'échange de chaleur : $Q_{A \rightarrow B} = 0$.

$$\begin{aligned} \Delta H_{A \rightarrow B} &= \underbrace{\Delta U_{A \rightarrow B} + W_{A \rightarrow B}}_{=Q_{A \rightarrow B}=0} + \int_A^B Vdp \\ &= \int_A^B Vdp = \int_A^B \left(\frac{p_A V_A^\gamma}{p} \right)^{\frac{1}{\gamma}} dp = \frac{p_A^{\frac{1}{\gamma}} V_A}{1 - \frac{1}{\gamma}} \left(p_B^{1 - \frac{1}{\gamma}} - p_A^{1 - \frac{1}{\gamma}} \right) \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{p_L^{\frac{1}{\gamma}} \left(\frac{nRT_A}{p_L} \right)}{1 - \frac{1}{\gamma}} \left(\left(p_L \left(\frac{T_A}{T_H} \right)^{\frac{1}{1-\gamma}} \right)^{1 - \frac{1}{\gamma}} - p_L^{1 - \frac{1}{\gamma}} \right) \\ &= \dots \\ \Rightarrow \Delta H_{A \rightarrow B} &= \frac{\gamma}{\gamma - 1} nRT_A \left(\frac{T_H}{T_A} - 1 \right) = \frac{7}{2} nR(T_H - T_A) \\ &= \frac{7}{2} \times 3 \times 8.314 (353 - 303) \simeq 4.36 \times 10^3 \text{ J} \end{aligned} \quad (13)$$

On peut arriver plus vite (et plus sûrement !) au résultat avec :

$$\Delta H_{A \rightarrow B} = \underbrace{\Delta H_{\text{cycle}}}_{=0} - \underbrace{\Delta H_{B \rightarrow C}}_{=0} - \Delta H_{C \rightarrow A}$$

$B \rightarrow C$: isotherme

$$\begin{aligned}
\Delta H_{B \rightarrow C} &= \underbrace{nC_V(T_C - T_B)}_{=0} + \int_B^C pdV + \int_B^C Vdp = \int_B^C \frac{nRT_H}{V} dV + \int_B^C \frac{nRT_H}{p} dp \\
&= nRT_H \ln \left(\frac{V_C}{V_B} \right) + nRT_H \ln \left(\frac{p_C}{p_B} \right) = nRT_H \left(\ln \left(\frac{p_B}{p_L} \right) + \ln \left(\frac{p_L}{p_B} \right) \right) \\
\Rightarrow \Delta H_{B \rightarrow C} &= nRT_H \left(\ln \left(\frac{p_B}{p_L} \right) - \ln \left(\frac{p_B}{p_L} \right) \right) = 0 \text{ J.}
\end{aligned} \tag{14}$$

On a utilisé $\frac{V_C}{V_B} = \frac{nRT_H}{p_L}$ $\frac{p_B}{nRT_H} = \frac{p_B}{p_L}$.

$C \rightarrow A$: isobare

$$\begin{aligned}
\Delta H_{C \rightarrow A} &= nC_V(T_A - T_C) + \int_C^A pdV + \int_C^A Vdp \\
&= nC_V(T_A - T_C) + p_L(V_A - V_C) + 0 \\
&= nC_V(T_A - T_H) + p_L \left(\frac{nRT_A}{p_L} - \frac{nRT_H}{p_L} \right) \\
\Rightarrow \Delta H_{C \rightarrow A} &= nC_V(T_A - T_H) + nR(T_A - T_H) = \frac{7}{2} nR(T_A - T_H) \\
&= \frac{7}{2} \times 3 \times 8.314 \times (303 - 353) \simeq -4.36 \times 10^3 \text{ J}
\end{aligned} \tag{15}$$

c) Le rendement du moteur est donné par :

$$\eta = \frac{|W_{\text{cycle}}|}{|Q_H|} = 1 - \frac{|Q_L|}{|Q_H|} \tag{16}$$

De plus, d'après le premier principe de la thermodynamique :

$$Q = \Delta U + W.$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned}
Q_H &= \Delta U_{BC} + W_{BC} = 0 + \int_B^C pdV = nRT_H \int_B^C \frac{dV}{V} = nRT_H \ln \left(\frac{V_C}{V_B} \right) \\
&= nRT_H \ln \left(\frac{p_B}{p_L} \right) = nRT_H \ln \left(\frac{p_L \left(\frac{T_A}{T_H} \right)^{\frac{\gamma}{1-\gamma}}}{p_L} \right) = nRT_H \ln \left(\left(\frac{T_A}{T_H} \right)^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} \right) \\
\Rightarrow Q_H &= nRT_H \frac{\gamma}{1-\gamma} \ln \left(\frac{T_A}{T_H} \right) = nRT_H \frac{\gamma}{\gamma-1} \ln \left(\frac{T_H}{T_A} \right) \\
&= 3 \times 8.314 \times \frac{7}{2} \times 353 \times \ln \left(\frac{353}{303} \right) \simeq 4.70 \times 10^3 \text{ J}
\end{aligned} \tag{17}$$

$$\begin{aligned}
Q_L &= \Delta U_{CA} + W_{CA} = nC_V(T_A - T_C) + \int_C^A pdV \\
&= nC_V(T_A - T_C) + p_L(V_A - V_C) \\
\Rightarrow Q_L &= \Delta H_{C \rightarrow A} = \frac{7}{2}nR(T_A - T_H) \\
&= \frac{7}{2} \times 3 \times 8.314 \times (303 - 353) = -4.36 \times 10^3 \text{ J}
\end{aligned} \tag{18}$$

Ce qui nous donne :

$$\eta = 1 - \frac{|Q_L|}{|Q_H|} = 1 - \frac{4.36 \times 10^3}{4.70 \times 10^3} \simeq 7.20 \% \tag{19}$$

Le rendement d'un cycle de Carnot est donné par :

$$\eta_{\text{Carnot}} = 1 - \frac{T_L}{T_H} = 1 - \frac{303}{353} \simeq 14.16\% \tag{20}$$

On obtient donc effectivement que : $\eta < \eta_{\text{Carnot}}$.

Exercice 3

Une pépite d'or de 25 g est englobée dans un bloc de glace de masse 3 kg qui flotte sur un lac. On veut faire couler le bloc afin de déposer la pépite d'or au fond du lac. Pour cela on chauffe le bloc avec une puissance de 300 W.

- a) Quelle masse de glace doit fondre afin que le bloc puisse couler ?
- b) Au bout de combien de temps le bloc coulera si sa température est 0°C ?
- c) On suppose maintenant que la température initiale de la glace est -3°C. Est-ce que le fait de pousser le bloc de glace à 10 m de profondeur, où la pression a doublé par rapport à la surface, joue un rôle significatif dans la durée du processus de fonte ? Justifiez votre réponse sur la base d'une analyse d'ordres de grandeur. On utilisera l'équation de Clausius-Clapeyron pour la transition de phase solide-liquide à température constante : $\frac{dp_L}{dT} = \frac{mL_f}{T(V_L - V_S)}$.

Indications : Masse volumique de l'or $\rho_{\text{or}} = 19.3 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$; Masse volumique de la glace $\rho_{\text{glace}} = 916 \text{ kg m}^{-3}$; Chaleur latente de fusion de la glace $L_f = 3.33 \times 10^5 \text{ J kg}^{-1}$; 1 atm = $1.013 \times 10^5 \text{ Pa}$; Principe d'Archimède : "Tout corps plongé dans un fluide subit une poussée verticale, dirigée de bas en haut, égale au poids du fluide déplacé".

Corrigé

- a) La condition pour l'immersion complète du bloc est que sa densité soit plus grande que celle de l'eau. On peut trouver cette condition aussi en disant que la norme du poids du bloc $|\vec{F}_{g,bloc}|$ doit être plus grande que la norme de la force d'Archimède $|\vec{F}_A|$ pour le cas où tout le volume du bloc est submergé :

$$|\vec{F}_{g,bloc}| \geq |\vec{F}_A| \Rightarrow m_{bloc}g \geq m_{eau}g = V_{bloc}\rho_{eau}g \Rightarrow \frac{m_{bloc}}{V_{bloc}} = \rho_{bloc} \geq \rho_{eau} \tag{21}$$

La masse et le volume du bloc sont une combinaison de l'or et de la glace, donc on peut résoudre l'inégalité ci-dessus pour la seule inconnue : la masse de glace à partir de laquelle le bloc coulera, notée $m_{gl,1}$:

$$\begin{aligned} \frac{m_{bloc}}{V_{bloc}} \geq \rho_{eau} &\Rightarrow \frac{m_{or} + m_{gl,1}}{V_{or} + V_{gl,1}} \geq \rho_{eau} \Rightarrow \frac{m_{or} + m_{gl,1}}{\frac{m_{or}}{\rho_{or}} + \frac{m_{gl,1}}{\rho_{glace}}} \geq \rho_{eau} \\ \Rightarrow m_{or} + m_{gl,1} &\geq \left(\frac{m_{or}}{\rho_{or}} + \frac{m_{gl,1}}{\rho_{glace}} \right) \rho_{eau} \Rightarrow m_{or} - m_{or} \frac{\rho_{eau}}{\rho_{or}} \geq m_{gl,1} \frac{\rho_{eau}}{\rho_{glace}} - m_{gl,1} \\ \Rightarrow m_{gl,1} &\leq m_{or} \frac{1 - \frac{\rho_{eau}}{\rho_{or}}}{\frac{\rho_{eau}}{\rho_{glace}} - 1} \end{aligned} \quad (22)$$

Application numérique :

$$m_{gl,1} \leq 25 \times 10^{-3} \times \frac{1 - \frac{1000}{19.6 \times 10^3}}{\frac{1000}{916} - 1} = 0.258 \text{ kg}$$

Il faut donc que $\Delta m_{gl} = m_{gl,0} - m_{gl,1} = 3 - 0.258 = 2.742 \text{ kg}$ de glace fonde avant que le bloc puisse couler jusqu'au fond du lac.

- b) Le temps Δt qu'il faut pour faire fondre le bloc peut être trouvé à partir de la chaleur latente de fusion de la glace :

$$P_{chauffage} \Delta t = Q = \Delta m_{gl} L_f \Rightarrow \Delta t = \frac{(m_{gl,0} - m_{gl,1}) L_f}{P_{chauffage}} \quad (23)$$

Application numérique :

$$\Delta t = \frac{(3 - 0.258) \times 3.33 \times 10^5}{300} = 3043 \text{ s} = 50 \text{ min } 43 \text{ s}$$

- c) En faisant l'hypothèse que le changement de la température de fusion sera petit ($\Delta T \ll T$), on peut calculer ce changement directement à partir de l'équation de Clausius-Clapeyron, sans intégration :

$$\frac{dp_{eau}}{dT_f} \simeq \frac{\Delta p}{\Delta T_f} = \frac{m L_f}{T(V_{eau} - V_{gl})} \Rightarrow \Delta T_f = \frac{T(V_{eau} - V_{gl})}{m L_f} \Delta p = \frac{T \left(\frac{1}{\rho_{eau}} - \frac{1}{\rho_{gl}} \right)}{L_f} (p_{10m} - p_0) \quad (24)$$

Application numérique

$$\Delta T_f = \frac{273 \times \left(\frac{1}{1000} - \frac{1}{916} \right)}{3.33 \times 10^5} \times 1.013 \times 10^5 = -0.0076 \text{ K}$$

Ce résultat vérifie l'hypothèse $\Delta T \ll T$ qu'on avait fait et donc il n'y avait pas besoin d'intégrer l'équation de Clausius-Clapeyron. On voit également que le changement de la température de fusion à 10 m de profondeur sera très petit en comparaison avec le changement de température de $\Delta T = |T_0 - T_f| = 3^\circ\text{C}$ avant la fonte. Le fait que le bloc est soumis à une pression plus forte ne joue donc pas un rôle significatif sur le temps de fonte du bloc de glace.

Alternative : On obtient le même résultat en faisant le calcul de façon rigoureuse :

$$\int_{0m}^{10m} dp_{eau} = \frac{mL_f}{(V_{eau} - V_{gl})} \int_{0m}^{10m} \frac{dT_f}{T_f} \Rightarrow p_{10m} - p_0 = \frac{mL_f}{(V_{eau} - V_{gl})} \ln\left(\frac{T_{f,1}}{T_{f,0}}\right)$$

$$\Rightarrow T_{f,10m} = T_{f,0} \exp\left(\frac{\frac{1}{\rho_{eau}} - \frac{1}{\rho_{gl}}}{L_f}(p_{10m} - p_0)\right)$$

Application numérique :

$$T_{f,1} = 273 \times \exp\left(\frac{\left(\frac{1}{1000} - \frac{1}{916}\right)}{3.33 \times 10^5} \times 1.013 \times 10^5\right) = 272.9924 \text{ K}$$

Exercice 4

Un système A contient n fois le nombre de particules d'un autre système B. Leurs capacités thermiques à volume constant sont liées par la relation simple $C_{V,A} = nC_{V,B}$. Initialement chaque système est isolé, et la température du système A est plus élevée que celle du système B. Ensuite, les deux systèmes sont mis en contact, sans changer les volumes, à travers une cloison fixe qui laisse passer la chaleur mais pas les particules. Une fois l'équilibre atteint, les deux températures sont identiques et égales à T_f .

- a) Calculez la température d'équilibre T_f .
- b) Calculez la variation d'entropie de l'univers $\Delta S_{\text{univ.}}$.
- c) Dans le cas $n \gg 1$, montrez que $T_f \simeq T_A \left(1 - \frac{1-x}{n}\right)$ et $\Delta S_{\text{univ.}} \simeq C_{V,B}(x - 1 - \ln x)$ où $x = \frac{T_B}{T_A}$.
- d) Si, en plus de la chaleur, la cloison laissait passer les particules d'un système à l'autre, la variation d'entropie de l'univers serait-elle plus grande ou plus petite qu'au b) ? Justifiez votre réponse par un raisonnement qualitatif.

Indications : $\ln(1 + \epsilon) \simeq \epsilon$ si $\epsilon \ll 1$.

Corrigé

Remarque : la donnée est un peu ambiguë. Deux approches sont possibles. Elles sont reportées ci-dessous et ont été jugées équivalentes pour l'obtention des points.

- a) La température d'équilibre est déterminée en posant la condition d'équilibre entre les échanges de chaleur $Q_A + Q_B = 0$ (Toute la chaleur perdue par le système A est reçue par le système B). De plus, le premier principe de la thermodynamique donne $Q = \Delta U + W = C_V \Delta T + 0$ car aucun travail n'est fait puisqu'il n'y a pas de variation de volume.

Approche A

$$\begin{aligned}
Q_A + Q_B &= 0 \\
\Rightarrow C_{V,A}(T_f - T_A) + C_{V,B}(T_f - T_B) &= 0 \\
\Rightarrow nC_{V,B}(T_f - T_A) + C_{V,B}(T_f - T_B) &= 0 \\
\Rightarrow T_f(n+1) &= nT_A + T_B \tag{25}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow T_f = \frac{n}{n+1}T_A + \frac{1}{n+1}T_B = \frac{n + \frac{T_B}{T_A}}{n+1}T_A \tag{26}$$

Approche B

$$\begin{aligned}
Q_A + Q_B &= 0 \\
\Rightarrow n_A C_{V,A}(T_f - T_A) + n_B C_{V,B}(T_f - T_B) &= 0 \\
\Rightarrow n^2 n_B C_{V,B}(T_f - T_A) + n_B C_{V,B}(T_f - T_B) &= 0 \text{ car } n_A = nn_B \text{ et } C_{V,A} = nC_{V,B} \\
\Rightarrow T_f(n^2 + 1) &= n^2 T_A + T_B \tag{27}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow T_f = \frac{n^2}{n^2 + 1}T_A + \frac{1}{n^2 + 1}T_B = \frac{n^2 + \frac{T_B}{T_A}}{n^2 + 1}T_A \tag{28}$$

b) Le processus d'atteinte de la température d'équilibre est un processus irreversible. On ne sait pas calculer la variation d'entropie pour un tel processus. Cependant, l'entropie étant une variable d'état, sa variation entre 2 états ne dépend pas du chemin suivi. On peut donc calculer la variation d'entropie pour un processus réversible qui se passe entre les mêmes états initial et final.

Si notre univers est constitué des deux systèmes A et B, isolés du reste, la variation d'entropie de l'univers sera la somme des deux variations d'entropie pour A et B.

$$\Delta S_{\text{univ}} = \Delta S_A + \Delta S_B \tag{29}$$

Dans notre système se réalise une variation de température sans changement de volume. Nous pouvons donc calculer la variation d'entropie comme :

Approche A

$$\Delta S = \int_T^{T_f} \frac{\delta Q}{T} = C_V \int_T^{T_f} \frac{dT}{T} \tag{30}$$

d'où :

$$\Delta S_A = nC_{V,B} \int_{T_A}^{T_f} \frac{dT}{T} = nC_{V,B} \ln \left(\frac{T_f}{T_A} \right) = C_{V,B} \ln \left(\frac{T_f^n}{T_A^n} \right). \tag{31}$$

De même,

$$\Delta S_B = C_{V,B} \ln \left(\frac{T_f}{T_B} \right) \tag{32}$$

La variation totale sera donc :

$$\Delta S_{\text{univ}} = C_{V,B} \ln \left(\frac{T_f^{n+1}}{T_A^n T_B} \right) \quad (33)$$

Approche B

$$\Delta S = \int_T^{T_f} \frac{\delta Q}{T} = nC_V \int_T^{T_f} \frac{dT}{T} \quad (34)$$

d'où :

$$\Delta S_A = n_A C_{V,A} \int_{T_A}^{T_f} \frac{dT}{T} = n^2 n_B C_{V,B} \int_{T_A}^{T_f} \frac{dT}{T} = n^2 n_B C_{V,B} \ln \left(\frac{T_f}{T_A} \right) = n_B C_{V,B} \ln \left(\frac{T_f^{n^2}}{T_A^{n^2}} \right) < 0 \quad (35)$$

De même,

$$\Delta S_B = n_B C_{V,B} \int_{T_B}^{T_f} \frac{dT}{T} = n_B C_{V,B} \ln \left(\frac{T_f}{T_B} \right) > 0 \quad (36)$$

La variation totale sera donc :

$$\Delta S_{\text{univ}} = n_B C_{V,B} \ln \left(\frac{T_f^{n^2}}{T_A^{n^2}} \right) + n_B C_{V,B} \ln \left(\frac{T_f}{T_B} \right) = n_B C_{V,B} \ln \left(\frac{T_f^{n^2+1}}{T_A^{n^2} T_B} \right) \quad (37)$$

où n_B est le nombre de moles contenues dans le système B.

c) Approche A

En posant $x \equiv \frac{T_B}{T_A}$ nous obtenons :

$$T_f = \frac{n+x}{n+1} T_A \quad \Rightarrow \quad T_f = \frac{n+1-1+x}{n+1} T_A = \left(1 - \frac{1-x}{n+1} \right) T_A. \quad (38)$$

Pour $n \gg 1$, l'expression ci-dessus se simplifie comme suit :

$$T_f \simeq \left(1 - \frac{1-x}{n} \right) T_A \quad (39)$$

Nous pouvons utiliser cette dernière équation pour déterminer la variation d'entropie sous la condition $n \gg 1$:

$$\begin{aligned} \Delta S_{\text{univ}} &= C_{V,B} \left[(n+1) \ln T_f - (n+1) \ln T_A - \ln x \right] \\ &\simeq C_{V,B} \left[(n+1) \ln \left(\left(1 - \frac{1-x}{n} \right) T_A \right) - (n+1) \ln T_A - \ln x \right] \\ &\simeq C_{V,B} \left[(n+1) \ln \left(1 - \frac{1-x}{n} \right) + (n+1) \ln T_A - (n+1) \ln T_A - \ln x \right] \\ \Rightarrow \Delta S_{\text{univ}} &\simeq C_{V,B} \left[(n+1) \ln \left(1 - \frac{1-x}{n} \right) - \ln x \right] \end{aligned} \quad (40)$$

En remarquant que $\ln(1 + \epsilon) \simeq \epsilon$ si $\epsilon \ll 1$, l'équation précédente devient :

$$\Delta S_{\text{univ}} \simeq C_{V,B} \left(\frac{n+1}{n}(x-1) - \ln x \right) \quad \text{puisque} \quad \frac{x-1}{n} \ll 1 \quad (41)$$

Finalement,

$$\Delta S_{\text{univ}} \simeq C_{V,B} (x-1-\ln x) \quad \text{puisque} \quad \frac{n+1}{n} \simeq 1 \quad \text{pour} \quad n \rightarrow \infty \quad (42)$$

Approche B

En posant $x \equiv \frac{T_B}{T_A}$ nous obtenons :

$$T_f = \frac{n^2 + x}{n^2 + 1} T_A \quad \Rightarrow \quad T_f = \frac{n^2 + 1 - 1 + x}{n^2 + 1} T_A = \left(1 - \frac{1-x}{n^2 + 1} \right) T_A. \quad (43)$$

Pour $n \gg 1$, l'expression ci-dessus se simplifie comme suit :

$$T_f \simeq \left(1 - \frac{1-x}{n^2} \right) T_A \quad (44)$$

Nous pouvons utiliser cette dernière équation pour déterminer la variation d'entropie sous la condition $n \gg 1$:

$$\begin{aligned} \Delta S_{\text{univ}} &= n_B C_{V,B} \ln \left(\frac{T_f^{n^2+1}}{T_A^{n^2} T_B} \right) = n_B C_{V,B} \ln \left(\frac{T_f^{n^2+1} T_A}{T_A^{n^2+1} T_B} \right) = n_B C_{V,B} \left(\ln \left(\frac{T_f^{n^2+1}}{T_A^{n^2+1}} \right) - \ln x \right) \\ \Delta S_{\text{univ}} &= n_B C_{V,B} \left[(n^2 + 1) \ln \left(\frac{T_f}{T_A} \right) - \ln x \right] \\ &\simeq n_B C_{V,B} \left[(n^2 + 1) \ln \left(\frac{\left(1 - \frac{1-x}{n^2} \right) T_A}{T_A} \right) - \ln x \right] \\ \Rightarrow \Delta S_{\text{univ}} &\simeq n_B C_{V,B} \left[(n^2 + 1) \ln \left(1 - \frac{1-x}{n^2} \right) - \ln x \right] \end{aligned} \quad (45)$$

En remarquant que $\ln(1 + \epsilon) \simeq \epsilon$ si $\epsilon \ll 1$, l'équation précédente devient :

$$\Delta S_{\text{univ}} \simeq n_B C_{V,B} \left(\frac{n^2 + 1}{n^2}(x-1) - \ln x \right) \quad \text{puisque} \quad \frac{x-1}{n} \ll 1 \quad (46)$$

Finalement,

$$\Delta S_{\text{univ}} \simeq n_B C_{V,B} (x-1-\ln x) \quad \text{puisque} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 + 1}{n^2} = 1 \quad (47)$$

- d) Si la cloison laisse passer les particules en plus de la chaleur, il y aura toujours équilibre des températures mais en plus les particules de A et de B vont se mélanger entre elles pour tendre vers un état de désordre plus élevé (augmentation du nombre de micro-états possibles) donc l'augmentation d'entropie sera plus élevée qu'au b).

Exercice 5

Le corps d'un homme peut être considéré comme un cylindre de 1.8 m de long et 30 cm de diamètre. La température à l'intérieur du corps reste constante (37°C), mais la température à la surface varie en fonction des conditions extérieures. La peau, d'épaisseur 10 mm, a une conductibilité thermique de $k_{\text{peau}} = 0.7 \text{ W m}^{-1} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ et est recouverte d'une couche d'air, piégé par les habits que l'homme porte, de 4 mm d'épaisseur et de conductibilité thermique $k_{\text{air}} = 0.025 \text{ W m}^{-1} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$.

- Pendant la journée, l'homme reste à l'ombre, dans de l'air à 45°C . En négligeant le rayonnement et la convection, calculez la température de la surface externe de sa peau.
 - Si l'homme transpire, on peut considérer que la couche d'air est remplacée par une couche d'eau ($k_{\text{eau}} = 0.6 \text{ W m}^{-1} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$) de même épaisseur. L'évaporation de cette couche l'aide à évacuer de la chaleur. Si l'on suppose que tout ce que l'homme boit donne lieu à évaporation, combien de litres d'eau doit-il boire par heure au minimum pour que la température de la couche externe de sa peau soit égale à la température du corps ? La température extérieure est toujours de 45°C . On néglige les pertes de chaleur par rayonnement.
 - Pendant la nuit, l'air se refroidit et la température de la couche externe de la peau vaut 8°C . On peut négliger tout transfert de chaleur sauf l'échange d'énergie par rayonnement avec le ciel, sans nuage ni lune, qui peut être considéré comme un corps noir à une température de -30°C . En supposant que l'émissivité de la couche externe de la peau est $e = 0.85$, calculez la puissance que l'homme doit utiliser pour maintenir sa température interne à 37°C . A combien de plaques de chocolat de 100 g correspond l'énergie qu'il doit consommer durant la nuit (8h) ?
- Indications : On négligera la surface des extrémités du cylindre. On négligera tous les effets dus aux habits portés ; Chaleur latente de vaporisation de l'eau $L_v = 2.257 \times 10^6 \text{ J kg}^{-1}$; Constante de Stefan-Boltzmann : $\sigma_B = 5.67 \times 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$; Valeur énergétique d'une plaque de chocolat de 100 g : 520 kcal ; 1 cal = 4.184 J

Corrigé

- La surface extérieure de l'homme vaut (on néglige la surface des extrémités du cylindre) :

$$S_{\text{cyl}} = \pi dh = \pi \times 0.3 \times 1.8 = 1.696 \text{ m}^2 \quad (48)$$

La température de la surface de la peau est représentée par T_{sp} . Le flux de chaleur qui traverse la couche de peau est égal au flux qui traverse la couche d'air. On obtient :

$$\begin{aligned} J_{\text{peau}} = J_{\text{air}} &\Rightarrow \frac{k_{\text{peau}}}{d_{\text{peau}}} (T_{\text{sp}} - T_{\text{corps}}) = \frac{k_{\text{air}}}{d_{\text{air}}} (T_{\text{ext}} - T_{\text{sp}}) \\ \frac{k_{\text{peau}}}{d_{\text{peau}}} T_{\text{sp}} + \frac{k_{\text{air}}}{d_{\text{air}}} T_{\text{sp}} &= \frac{k_{\text{air}}}{d_{\text{air}}} T_{\text{ext}} + \frac{k_{\text{peau}}}{d_{\text{peau}}} T_{\text{corps}} \\ \frac{k_{\text{peau}} d_{\text{air}}}{d_{\text{peau}} d_{\text{air}}} T_{\text{sp}} + \frac{k_{\text{air}} d_{\text{peau}}}{d_{\text{peau}} d_{\text{air}}} T_{\text{sp}} &= \frac{k_{\text{air}} d_{\text{peau}}}{d_{\text{peau}} d_{\text{air}}} T_{\text{ext}} + \frac{k_{\text{peau}} d_{\text{air}}}{d_{\text{peau}} d_{\text{air}}} T_{\text{corps}} \\ (k_{\text{peau}} d_{\text{air}} + k_{\text{air}} d_{\text{peau}}) T_{\text{sp}} &= k_{\text{air}} d_{\text{peau}} T_{\text{ext}} + k_{\text{peau}} d_{\text{air}} T_{\text{corps}} \\ \Rightarrow T_{\text{sp}} &= \frac{k_{\text{air}} d_{\text{peau}} T_{\text{ext}} + k_{\text{peau}} d_{\text{air}} T_{\text{corps}}}{k_{\text{peau}} d_{\text{air}} + k_{\text{air}} d_{\text{peau}}} \end{aligned} \quad (49)$$

Application numérique :

$$T_{sp} = \frac{318 \times 0.025 \times 0.01 + 310 \times 0.7 \times 0.004}{0.025 \times 0.01 + 0.7 \times 0.004} = 310.65 \text{ K} = 37.65 \text{ }^{\circ}\text{C} \quad (50)$$

- b) La température de la couche externe de la peau est la même que la température du corps ($T_{sp} = T_{corps} = 37 \text{ }^{\circ}\text{C} = 310 \text{ K}$) donc il n'y a pas de flux de chaleur à travers la peau. Tout le flux de chaleur qui traverse la couche d'eau va évaporer l'eau de la transpiration à la surface externe de la peau. La masse, et donc le volume, d'eau qui s'évapore se détermine en égalisant les quantités de chaleur :

$$\begin{aligned} Q_{\text{evap}} &= J_{\text{eau}} \times S_{\text{cyl}} \times \Delta t \Rightarrow m_{\text{eau}} L_v &= \frac{k_{\text{eau}}}{d_{\text{eau}}} S_{\text{cyl}} (T_{\text{ext}} - T_{sp}) \Delta t \\ \Rightarrow m_{\text{eau}} &= \frac{k_{\text{eau}} S_{\text{cyl}} (T_{\text{ext}} - T_{sp})}{d_{\text{eau}} L_v} \Delta t \end{aligned} \quad (51)$$

Application numérique : Pour $\Delta t = 1 \text{ h} = 3600 \text{ s}$,

$$m_{\text{eau}} = \frac{0.6 \times 1.696 \times (318 - 310) \times 3600}{0.004 \times 2.257 \times 10^6} \simeq 3.24 \text{ kg} \quad (52)$$

Le volume d'eau à boire par heure est donc 3.24 l.

- c) T_{sp} vaut maintenant $8 \text{ }^{\circ}\text{C}$ (281 K). La surface de la peau émet de la chaleur par rayonnement à la température T_{sp} et absorbe la chaleur émise par le ciel à la température T_{ciel} . La puissance rayonnée nette est donnée par :

$$P_{\text{ray}} = e \sigma_B S_{\text{cyl}} (T_{sp}^4 - T_{\text{ciel}}^4) \quad (53)$$

Application numérique :

$$P_{\text{ray}} = 0.85 \times 5.67 \times 10^{-8} \times 1.696 \times (281^4 - 243^4) = 224.6 \text{ W} \quad (54)$$

L'énergie rayonnée au cours de la nuit (8 heures) est :

$$E_{\text{ray}} = P_{\text{ray}} \Delta t_{\text{nuit}} = 224.6 \times 8 \times 3600 \simeq 6.45 \times 10^6 \text{ J} \simeq 1.54 \times 10^6 \text{ cal} = 1540 \text{ kcal}$$

Pour maintenir sa température, l'homme doit fournir cette quantité d'énergie à partir des plaques de chocolat. Il doit manger :

$$N_{\text{plaques}} = \frac{E_{\text{ray}}}{E_{\text{plaque}}} = \frac{1540}{520} \simeq 3. \quad (55)$$

