Exercice 1

La planète α est immobile dans le référentiel attaché à la Terre (supposé inertiel) et se trouve à une distance $L_{\alpha\mathrm{T}} = 10^{11}$ m de la Terre. α envoie le long de l'axe α-Terre un vaisseau de transport vers la Terre, avec une vitesse $v_v = 0.6c$. Quand l'horloge de bord du vaisseau indique qu'une minute s'est écoulée depuis son départ d'α, le système de contrôle du vaisseau tombe en panne. Au même moment dans le vaisseau, celui-ci envoie un signal radio "SOS" vers la Terre : le vaisseau avance toujours à une vitesse constante v_v et ne pourra pas atterrir en toute sécurité sur Terre.

a) Quelle est la distance, dans le référentiel de la Terre, entre le vaisseau et α au moment de l'envoi du signal "SOS" ?

Pour agir de la meilleure manière face à cette urgence, le centre de commande sur Terre effectue deux mesures : l'événement 1 correspond à la mesure de l'avant du vaisseau et l'événement 2 correspond à la mesure de l'arrière du vaisseau. Dans le référentiel du vaisseau, l'évènement 1 précède l'évènement 2 d'un intervalle de temps de 10^{-7} s. Considérez, uniquement pour la question b), que le vaisseau a une longueur propre $L_v = 100$ m, et qu'il ne peut donc pas être considéré comme un point matériel.

b) Quel événement a lieu en premier dans le référentiel de la Terre et de combien de temps précède-t-il l'évènement suivant ? Quelle est la distance spatiale entre les deux événements mesurée dans le référentiel de la Terre ?

Le centre de contrôle sur Terre décide d'agir pour éviter l'accident et effectue deux actions en même temps : il envoie un missile de la Terre ($v_m = 0.6c$) vers le vaisseau sur l'axe Terre-vaisseau pour le détruire ainsi qu'un message radio "EVAC" pour prévenir l'équipage de l'arrivée du missile et ordonner l'évacuation du vaisseau. Lorsque le vaisseau reçoit le message "EVAC", il est à une distance de 10^{10} m de la Terre, mesurée dans le référentiel du vaisseau.

c) Combien de temps (mesuré dans le référentiel du vaisseau) reste-t-il à l'équipage pour évacuer le vaisseau à partir de la réception du message "EVAC" envoyé par la Terre ?

Pour gagner du temps supplémentaire pour l'évacuation, l'équipage arrive à activer des freins d'urgence au moment de la réception du signal "EVAC", ce qui leur permet d'instantanément réduire la vitesse du vaisseau de transport à $v_{vf} = 0.1c$ dans le référentiel de la Terre.

d) Dans combien de temps la collision se produira-t-elle alors (dans le référentiel de la Terre) ? Quelle quantité d'énergie cinétique est perdue par le vaisseau, en sachant que sa masse au repos est $m_0 = 10^5\ kg$?

Après le freinage, l'équipage du vaisseau de transport s'enfuit grâce à un vaisseau de secours. La Terre observe le vaisseau de secours quitter le vaisseau de transport avec un angle de 30° par rapport à l'axe α - Terre, et avec une vitesse constante de norme $v_S = 0.5c$. Au même moment, l'horloge de bord du vaisseau de transport indique qu'il reste 5 s avant la collision avec le missile.

e) L'équipage arrive-t-il à se sauver, en sachant que il faut être au moins à une distance de 6×10^8 m (dans le référentiel du vaisseau de transport) au moment de la collision entre le vaisseau de transport et le missile ? (N.B. : Négligez les masses des différents vaisseaux pour cette question).

Indications : Considérez la Terre, α, le vaisseau de transport, le missile et le vaisseau de secours comme des points matériels, à l'exception du vaisseau de transport dans le point b). Vitesse de la lumière $c = 3 \times 10^8$ m/s.

Pour la suite de l'exercice, on choisit $\mathcal{R}$ comme le référentiel des planètes et $\mathcal{R}'$ comme le référentiel du vaisseau de transport (voir figure 1). On définit le facteur gamma du vaisseau :

$$\gamma_v = \left(\sqrt{1 - \frac{v_v^2}{c^2}}\right)^{-1} = \left(\sqrt{1 - 0.6^2}\right)^{-1} = 1.25 \tag{1}$$

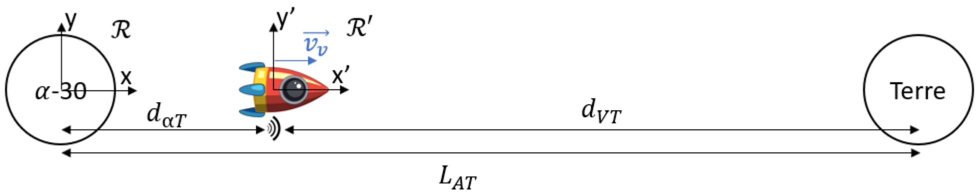


FIGURE 1 – Schéma général de l'exercice

a) (3 pt)

On donne le temps propre du vaisseau entre son départ et la panne : $\Delta t' = 60$ s. On veut trouver $d_{\alpha T}$ (voir figure 1). Il y a deux possibilités pour arriver à la solution demandée : soit trouver Δt grâce à Lorentz puis le multiplier par la vitesse du vaisseau, soit trouver $d'_{\alpha T}$ grâce à la vitesse et ensuite effectuer Lorentz. La première possibilité donne :

$$\Delta t = \gamma_v \Delta t' = 75 \ s$$
$$d_{\alpha T} = v_v \Delta t = 1.35 \times 10^{10} \ m$$

b) (4 pt)

On considère deux événements dans les deux référentiels.

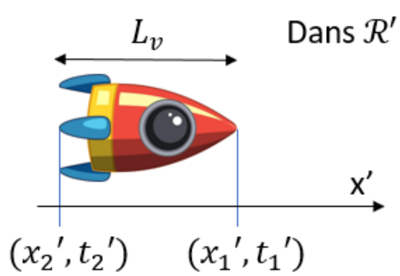


FIGURE 2 – Les deux événements dans $\mathcal{R}'$

Pour le référentiel $\mathcal{R}'$:

$$\begin{cases} x'_1 = 100 \ m \\ t'_1 = 0 \ s \end{cases} \qquad \begin{cases} x'_2 = 0 \ m \\ t'_2 = 10^{-7} \ s \end{cases}$$

Pour $\mathcal{R}$, en utilisant Lorentz et en substituant par les valeurs ci-dessus :

$$\begin{cases} x_1 = \gamma_v\left(x'_1 + vt'_1\right) = \gamma_v x'_1 = 125\ m \\ t_1 = \gamma_v\left(t'_1 + \frac{vx'_1}{c^2}\right) = \gamma_v \frac{vx'_1}{c^2} = 2.5\times 10^{-7}\ s \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 = \gamma_v\left(x'_2 + vt'_2\right) = \gamma_v vt'_2 = 22.5\ m \\ t_2 = \gamma_v\left(t'_2 + \frac{vx'_2}{c^2}\right) = \gamma_v t'_2 = 1.25\times 10^{-7}\ s \end{cases}$$

On cherche les différences des coordonnées temporelles et spatiales entre les événements 1 et 2, c'est-à-dire Δx_{12} et Δt_{12} [1] :

$$\Delta x_{12} = x_2 - x_1 = -102.5\ m$$
$$\Delta t_{12} = t_2 - t_1 = -1.25\times 10^{-7}\ m < 0 \Longrightarrow t_2 < t_1$$

Vu dans le référentiel $\mathcal{R}$, le premier événement est celui de la mesure de l'arrière du vaisseau.

c) (7 pt)

Nous allons répondre à cette question en se plaçant uniquement dans le référentiel $\mathcal{R}$, puis en transformant le temps final avec Lorentz pour avoir la réponse dans $\mathcal{R}'$.

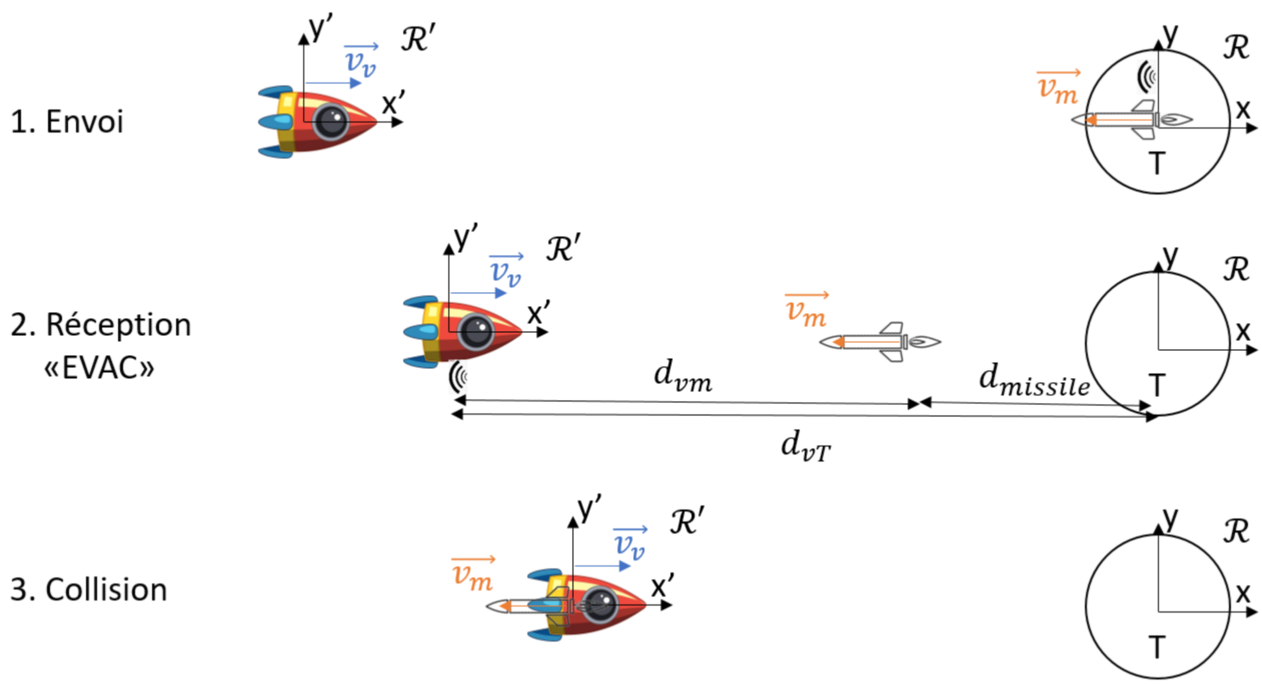


FIGURE 3 – Les 3 événements à considérer dans le référentiel de la Terre. On cherche le temps entre 2 et 3 au point c).

La distance entre le vaisseau et la Terre au moment "2." (voir figure 6) dans $\mathcal{R}$ est :

$$d_{vT} = \gamma_v d'_{vT} = 1.25\times 10^{10}\ m$$

1. Notez que cette réponse finale pouvait être obtenue en appliquant directement les transformées de Lorentz avec $\Delta x'$ et $\Delta t'$. Attention toutefois à bien prendre $\Delta x' = -100\ m$, puisqu'on mesure d'abord l'avant puis l'arrière du vaisseau dans son référentiel.

Quand le vaisseau reçoit le message, le missile a déjà parcouru une certaine distance, que l'on peut trouver comme suit :

$$t_{signal} = d_{vT}/c = 41.67\ s$$
$$d_{missile} = v_m t_{signal} = 7.5 \times 10^9\ m$$

La distance qui sépare le missile et le vaisseau est donc :

$$d_{vm} = d_{vT} - d_{missile} = 1.25 \times 10^{10} - 7.5 \times 10^9 = 5 \times 10^9\ m$$

Comme le missile et le vaisseau de transport voyagent à la même vitesse, ils vont chacun parcourir la moitié du chemin restant avant de se rencontrer. Ensuite, on trouve te temps avant la collision dans $\mathcal{R}$ (entre les instants "2" et "3" sur la figure 6) en divisant par la vitesse du vaisseau :

$$d_{coll} = d_{vm}/2 = 2.5 \times 10^9\ m$$
$$t_{coll} = d_{coll}/v_v = 13.9\ s$$

Ce temps est trouvé dans $\mathcal{R}'$ grâce à Lorentz. Étant donné que, dans $\mathcal{R}'$, il s'agit d'un temps propre (les événements "réception du signal EVAC" et "collision" se passent au même endroit), cela revient à contracter le temps précédemment trouvé :

$$t'_{coll} = t_{coll}/\gamma_v = 11.1\ s$$

Nous pouvons trouver le même résultat en réfléchissant dans le référentiel du vaisseau $\mathcal{R}'$. L'intervalle temporel entre la réception et l'émission dans le référentiel du vaisseau et donné par :

$$-c\Delta t'_{r-e} = -d'_{vT} + (-v_v)\Delta t'_{r-e} \quad \Rightarrow \quad \Delta t'_{r-e} = \frac{d'_{vT}}{c - v_v}$$

La vitesse du missile dans le référentiel $\mathcal{R}'$ est donnée par :

$$v_{m/v} = \frac{v_m - v_v}{1 - v_m v_v/c^2} \simeq 0.88\, c$$

L'intervalle spatial entre le vaisseau et le missile au moment de la réception du message, est donc :

$$d'_{vm} = c\Delta t'_{r-e} - |v_{m/v}\Delta t'_{r-e}|$$

L'intervalle de temps avant la collision dans $\mathcal{R}'$ sera donc :

$$\Delta t'_{coll} = \frac{d'_{vm}}{v_{m/v}} = \frac{\Delta t'_{r-e}(c - |v_{m/v}|)}{v_{m/v}} \simeq 11.1\ s$$

d) (4 pt)

Dans le référentiel de la Terre, on sait que la distance à parcourir est donnée par d_{vm} et que les objets ont maintenant des vitesses respectives de v_{vf} et v_m. On trouve donc le temps avant la collision :

$$d_{vm} = v_{vf}\Delta t_{coll} + v_m \Delta t_{coll}$$
$$\Rightarrow \Delta t_{coll} = \frac{d_{vm}}{v_{vf} + v_m} = 23.8\ s$$

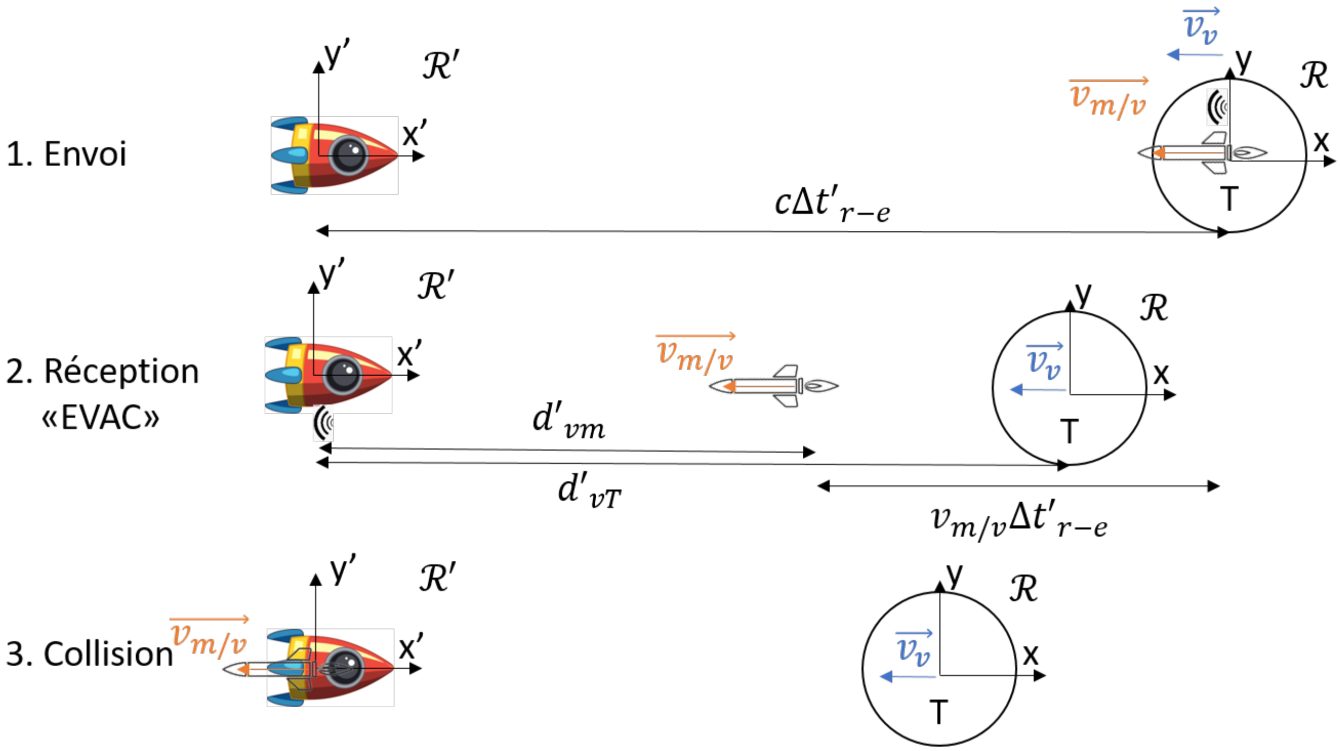


FIGURE 4 – Les 3 événements à considérer dans le référentiel du vaisseau. On cherche le temps entre 2 et 3 au point c).

Comme le temps de collision initial (à la vitesse v_v) était de 13.9 s, l'équipage arrive à gagner 9.9 secondes supplémentaires.
Il est possible de trouver le même résultat à partir de la distance d'_{vm} dans la question c), en réfléchissant dans le référentiel du vaisseau.

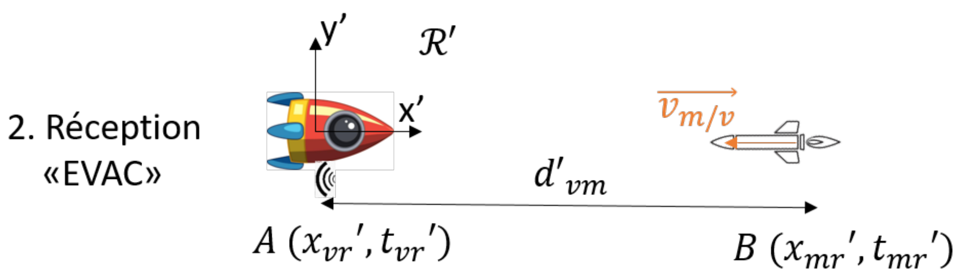


FIGURE 5 – Les 2 événements A et B simultanés dans le référentiel du vaisseau R'.

Tout d'abord, pour pouvoir appliquer aux deux évènements simultanés $A(x'_{vr}, t'_{vr})$ e $B(x'_{mr}, t'_{mr})$ (avec $t'_{vr} = t'_{mr}$) les transformations de Lorentz en passant du référentiel R' avec $v_v = 0.6c$ mesurée depuis la Terre, au nouveau référentiel R' avec la nouvelle $v_{vf} = 0.1c$ mesurée depuis la Terre (appelé à partir de ce moment R''), il faut calculer v_v mesurée depuis le référentiel du vaisseau après l'application des freins :

$$v''_v = \frac{v_v - v_{vf}}{1 - v_v v_{vf}/c^2} \qquad \Rightarrow \qquad \gamma''_v = \frac{1}{\sqrt{[1 - (v''_v)^2/c^2]}}$$

Nous pouvons à ce point appliquer Lorentz :

$$x''_{mr} - x''_{vr} = \Delta x''_{vm} = \gamma''_v(\Delta x'_{vm} + v''_v \underbrace{\Delta t'_{vm}}_{=0}) = \gamma''_v \Delta x'_{vm}$$

$$t''_{mr} - t''_{vr} = \Delta t''_{vm} = \gamma''_v(\underbrace{\Delta t'_{vm}}_{=0} + \frac{v''_v \Delta x'_{vm}}{c^2}) = \frac{\gamma''_v v''_v \Delta x'_{vm}}{c^2}$$

On peut noter comme dans R'', les deux évènements A et B ne sont plus simultanés ($t''_{mr} > t''_{vr}$), qui correspond à la situation indiqué dans la figure suivante :

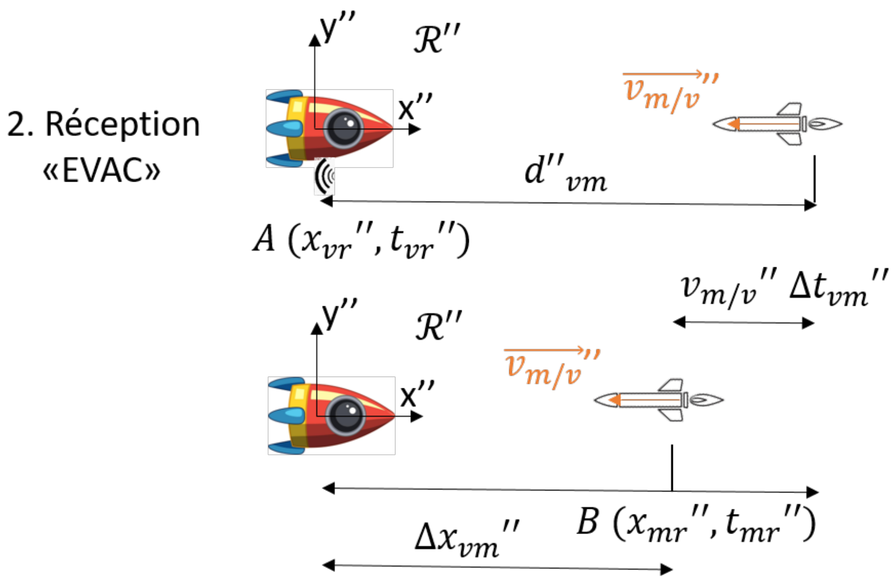


FIGURE 6 – Les 2 événements A et B, plus simultanés dans le référentiel du vaisseau R''.

Pour calculer dans le référentiel R'' le temps de la collision $\Delta t''_{coll}$ depuis la réception du message $\Delta t''_{coll}$, il faut donc calculer la distance $d''_{vm} = \Delta x''_{vm} + v''_{m/v}\Delta t''_{vm}$:

$$\Delta t''_{coll} = \frac{d''_{vm}}{v''_{m/v}}$$

Le temps de collision demandé dans le référentiel de la Terra sera, avec Lorentz :

$$\Delta t_{coll} = \gamma_{vf}\Delta t''_{coll} = \frac{1}{\sqrt{[1-(v_{vf})^2/c^2]}}\Delta t''_{coll} = 23.8\, s$$

Veuillez noter comme cette dernière méthode de résolution dans le référentiel de la fusée est bien plus longue que celle dans le référentiel de la Terre.

L'énergie cinétique est donnée par $E = (\gamma - 1)m_0 c^2$. On associe à la nouvelle vitesse v_{vf} un coefficient relativiste $\gamma_{vf} = 1.005$. La différence entre les deux énergies cinétiques, avant et après l'actionnement des freins, sera donc :

$$\Delta E = (\gamma_{vf} - \gamma_v)m_0 c^2 = -2.2 \times 10^{21}\ J$$

Cette énergie est bien négative puisqu'elle est perdue par le vaisseau.

e) (7 pt)

Nous devons définir un référentiel $\mathcal{R}''$ attaché au vaisseau de secours. il faut ensuite traduire la vitesse v_S dans le référentiel $\mathcal{R}'$ grâce aux transformées de Lorentz, car les grandeurs (temps avant explosion et distance de sécurité) sont données dans le référentiel $\mathcal{R}'$.

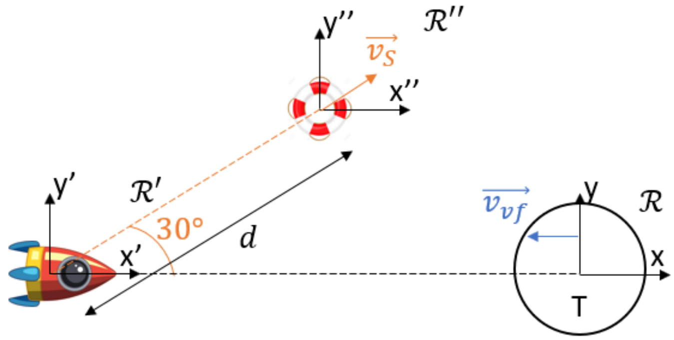


FIGURE 7 – Schéma de la situation pour le point e), avec le vaisseau de sauvetage. On note v_{vf} négatif sur $\mathcal{R}$ pour être cohérent avec les transformées de Lorentz données au cours.

Dans le référentiel $\mathcal{R}$, la vitesse du vaisseau de secours a les composantes suivantes :

$$v_{Sx} = v_S \cos(30) = 0.43c$$
$$v_{Sy} = v_S \sin(30) = 0.25c$$

Pour trouver ces composantes dans $\mathcal{R}'$, on applique les transformations de Lorentz :

$$v'_{Sx} = \frac{v_{Sx} - v_{vf}}{1 - \frac{v_{vf} v_{Sx}}{c^2}} = 0.35c$$
$$v'_{Sy} = \frac{v_{Sy}}{\gamma_{vf}\left(1 - \frac{v_{vf} v_{Sx}}{c^2}\right)} = 0.26c$$

où $v = v_{vf}$ car c'est la vitesse de déplacement de $\mathcal{R}$ par rapport à $\mathcal{R}'$. La distance parcourue par le vaisseau de secours dans $\mathcal{R}'$ pendant 5 s est :

$$d'_x = t_{safe} v'_{Sx} = 5.22 \times 10^8 \ m$$
$$d'_y = t_{safe} v'_{Sy} = 3.90 \times 10^8 \ m$$

Ce qui donne une distance totale de $d' = \sqrt{d'^2_x + d'^2_y} = 6.52 \times 10^8$ m : l'équipage est sauf !

Exercice 2

Un récipient déformable en aluminium de masse $m_{\text{rec}} = 0.485$ kg contient 0.3 kg d'eau. Le tout se trouve au niveau de la mer. À l'état initial, le récipient a un volume total $V_{\text{Al}} = 1\ell$ et il est à l'équilibre thermique avec l'eau à la température $T_i = 50$ °C. Dans cet état, le récipient est déposé dans un bain d'éthanol liquide, que l'on considère comme un réservoir de chaleur, à la température $T_{\text{éth}} = -100$ °C.

a) Démontrez que, à l'état initial, le récipient flotte dans l'éthanol.

Après avoir déposé le récipient dans le bain, de la chaleur est échangée uniquement entre le bain d'éthanol et le récipient et l'eau jusqu'à atteindre, à l'état final, l'équilibre thermique.

b) Déterminez si, à l'état final, le récipient coule ou flotte dans l'éthanol. Justifiez votre réponse.

Entre l'état initial et l'état final, calculez :

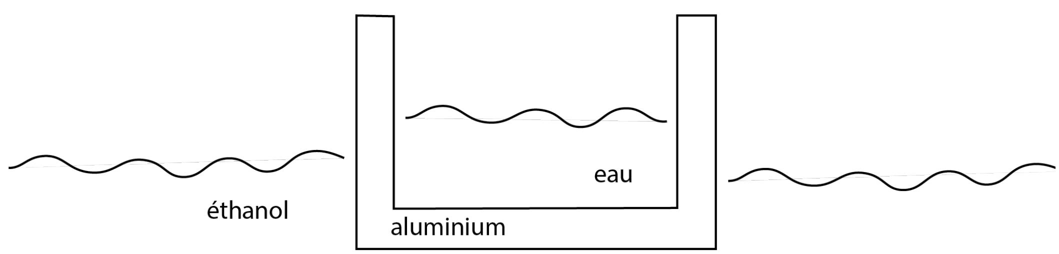
c) La chaleur échangée entre l'éthanol et le récipient et l'eau.

d) La variation d'entropie de l'univers.

Considérez dans la suite de l'exercice le même récipient déformable en aluminium de masse $m_{\text{rec}} = 0.485$ kg avec la même masse d'eau (0.3 kg) contenue à l'intérieur, mais avec les parois externes parfaitement isolées thermiquement. À l'état initial, le récipient a un volume total $V_{\text{Al}} = 1\ell$, l'eau et le récipient sont à l'équilibre thermique à la température $T_i = 50$ °C et il sont immergés dans un bain d'éthanol, qui n'échange pas de chaleur, ni avec le récipient, ni avec l'eau.

e) Vous aimeriez ajouter dans le récipient, avec l'eau à l'intérieur, une masse de 5.5 g à 90 °C d'un matériau "M". Quelle chaleur spécifique massique minimum devrait avoir ce matériau "M" pour que le système récipient+eau+masse ne coule pas quand le tout a atteint l'équilibre thermique ?

f) En sachant que la masse molaire du matériau "M" est de 150 g/mol, comparez la chaleur spécifique molaire c_M du matériau "M" avec celle calculée avec la loi de Dulong-Petit. Pensez-vous que ce matériau existe ? Justifiez votre réponse.



Indications : négligez le travail associé au changements de volumes et considérez les masses constantes. Considérez les valeurs données dans la suite comme constantes pour toutes valeurs de température. Coefficient de dilatation volumique de l'aluminium $\beta_{\text{Al}} = 70 \cdot 10^{-6}$ °C^{-1} ; densité volumique de l'éthanol $\rho_{\text{éth}} = 790$ kg/m^3 ; chaleur spécifique massique de l'aluminium $c_{\text{Al}} = 897$ J/kg/K ; chaleur spécifique massique de l'eau $c_{\text{eau}} = 4186$ J/kg/K ; chaleur spécifique massique de la glace $c_{\text{gl}} = 2090$ J/kg/K ; chaleur latente de fusion de la glace $L_{\text{gl}} = 334$ kJ/kg.

a) (2 pt)

Grâce à Archimède, nous savons que la masse immergée d'un corp flottant dans l'éthanol correspond exactement aux masse d'éthanol dans le volume immerge. Pour le démontrer, écrivons la condition de flottement de le récipient

$$\rho_{eth} V_{imm} g = (m_{eau} + m_{Al}) g$$

nous considérons que V_{imm} est égal au volume du conteneur en aluminium, qui est le cas limite avant de couler. Nous pouvons maintenant vérifier les deux masses et conclure que le conteneur flotte.

Application numérique :

$$\rho_{eth} V_{imm} = \rho_{\text{éth}} = 790\text{kg/m}^3 1\text{l} \frac{1\text{m}^3}{1000\text{l}} = 0.79\text{kg} > m_{eau} + m_{Al} = 0.3\text{kg} + 0.485\text{kg} = 0.785\text{kg}$$

La solution alternative avec la masse volumique du récipient :

$$\rho_{rec} = (m_{eau} + m_{Al})/V_{rec} \tag{2}$$

$$\rho_{rec} = (0.3\text{kg} + 0.485\text{kg})/0.001\text{m}^3 = 785\text{kg/m}^3 < 790\text{kg/m}^3 \tag{3}$$

b) (3.5 pt)

La température du récipient est maintenant de $T = -100$ °C. En raison de la dilatation (ou mieux dans ce cas, du rétrécissement), le volume du récipient est maintenant plus faible. Le volume d'éthanol déplacé change et, par conséquent, la masse de liquide déplacé est inférieure à la masse du récipient et de l'eau. Recalculons le volume du récipient :

$$\frac{\Delta V_{Al}}{V_{Al}} = \beta_{Al} \Delta T$$

$$m_{disp} = (\Delta V_{Al} + V_{Al}) \rho_{eth}$$

Application numérique :

$$\Delta V_{Al} = V_{Al} \beta_{Al} \Delta T = 1 \cdot 10^{-3}\ \text{m}^3 \beta_{\text{Al}} = 70 \cdot 10^{-6}\ ^\circ\text{C}^{-1} (-100 - 50)^\circ\text{C} = -1.05 \cdot 10^{-5}\ \text{m}^3$$

$$m_{disp} = (-1.05 \cdot 10^{-5} + 1 \cdot 10^{-3} \text{m}^3) 790\ \text{kg/m}^3 = 0.7817\text{kg} < m_{eau} + m_{al} = 0.785\ \text{kg}$$

La solution alternative avec la masse volumique du récipient :

$$\rho_{rec} = (m_{eau} + m_{Al})/V_{rec} \tag{4}$$

$$\rho_{rec} = (0.3\text{kg}+0.485\text{kg})/(0.001-1.05 \cdot 10^{-5}\text{m}^3) = 0.785\text{kg}/9.895 \cdot 10^{-4}\text{m}^3 = 793.3\text{kg/m}^3 > 790\text{kg/m}^3 \tag{5}$$

c) (5 pt)

En supposant que le récipient échange de la chaleur uniquement avec l'éthanol et non avec l'environnement, nous avons :

$$\sum Q = Q_e + Q_s + Q_{gl} + Q_{Al}$$

Le premier terme Q_e est l'énergie nécessaire pour diminuer la température de l'eau de sa valeur initiale à son point de fusion. Le deuxième terme Q_s représente l'énergie nécessaire pour transforme l'eau en glace. Le troisième Q_g terme représente l'énergie cédée par le glace pour diminuer sa température de fusion à l'état final. Le quatrième terme Q_{Al} représente l'énergie cédée par l'aluminium pour diminuer sa température initiale de à l'état final.

$$Q = m_e c_e (T_{e,f} - T_{e,i}) + m_e L_{gl} + m_e c_{gl}(T_{gl,f} - T_{gl,i}) + m_{al} c_{al}(T_{Al,f} - T_{Al,i})$$

Application numérique :

$$\begin{aligned} Q_{eau} =& m_e c_e (T_{e,f} - T_{e,i}) + m_e L_{gl} + m_e c_{gl}(T_{gl,f} - T_{gl,i}) \\ &= 0.3 \text{ kg} \left[4186 \text{ J/(kg K)}(0-50) \text{ K} + 334 \cdot 10^3 \text{ J/kg} + 2090 \text{ J/(kg K)}(-100-0) \text{ K}\right] \\ &= -62790 - 100200 - 62700 \text{ J} \\ &= -225690 \text{ J} \end{aligned}$$

$$Q_{Al} = m_{Al} c_{Al}(T_{Al,f} - T_{Al,i}) = 0.485 \text{ kg } 897 \text{ J/(kg K)}(-100-50) \text{ K} \simeq -6.53 \cdot 10^4 \text{ J}$$

$$Q_{tot} = Q_{al} + Q_{eau} \simeq -2.91 \cdot 10^5 \text{ J}$$

d) (6.5 pt)

Pour calculer la variation d'entropie de l'univers, nous devons additionner la variation d'entropie de tous les processus séparément. Nous commençons par l'eau.

a) La variation d'entropie de l'eau doit être calculée en trois étapes :
   1.- Refroidissement de l'eau de 50 °C à la température de solidification, 0 °C
   On obtient pour la variation d'entropie de l'eau :

$$\Delta S_1 = mc_{\text{eau}} \int_{T_i}^{T_f} \frac{\mathrm{d}T}{T} = mc_{\text{eau}} \ln\left(\frac{T_f}{T_i}\right). \qquad (6)$$

2.- solidification de l'eau à 0 ℃ en glace à 0 ℃

La chaleur transférée à l'eau est :

$$Q = mL_{gl}. \tag{7}$$

Ainsi, la variation d'entropie de l'eau lors de sa solidification (c.-à.-d. à température constante) est :

$$\Delta S_2 = \int_i^f \frac{\delta Q}{T} = \frac{1}{T}\int_i^f \delta Q = \frac{Q}{T} = -\frac{mL_{gl}}{T}. \tag{8}$$

3.- Refroidissement de la glace de 0 ℃ à −100 ℃

La quantité infinitésimale de chaleur pour chauffer la glace de dT est :

$$\delta Q = mc_{\mathrm{gl}}\,\mathrm{d}T. \tag{9}$$

Donc, la variation d'entropie de la glace s'écrit :

$$\Delta S_3 = \int_i^f \frac{\delta Q}{T} = mc_{\mathrm{gl}}\int_{T_i}^{T_f} \frac{\mathrm{d}T}{T} = mc_{\mathrm{gl}}\,\ln\left(\frac{T_f}{T_i}\right). \tag{10}$$

Nous devons également tenir en compte la variation de l'entropie de l'aluminium

$$\Delta S_{Al} = m_{Al}c_{\mathrm{al}}\int_{T_i}^{T_f} \frac{\mathrm{d}T}{T} = m_{Al}c_{\mathrm{al}}\ln\left(\frac{T_f}{T_i}\right). \tag{11}$$

Pour la variation d'entropie de l'éthanol, sachant que sa température est constante, on obtient

$$\Delta S_{eth} = \int_i^f \frac{\delta Q}{T} = \frac{1}{T}\int_i^f \delta Q = \frac{Q}{T} \tag{12}$$

Application numérique :

$$\Delta S_1 = 0.3\ \mathrm{kg} \times 4186\,\mathrm{J\,kg^{-1}\,K^{-1}} \times \ln\left(\frac{273\ \mathrm{K}}{323\ \mathrm{K}}\right) = -211.2\,\mathrm{J\,K^{-1}}.$$

$$\Delta S_2 = -\frac{0.3\ \mathrm{kg} \times 3.335\cdot 10^5\ \mathrm{J\,kg^{-1}}}{273\ \mathrm{K}} = -367\,\mathrm{J\,K^{-1}}.$$

$$\Delta S_3 = 0.3\ \mathrm{kg} \times 2050\ \mathrm{J\,kg^{-1}\,K^{-1}} \times \ln\left(\frac{173\ \mathrm{K}}{273\ \mathrm{K}}\right) = -286\,\mathrm{J\,K^{-1}}.$$

$$\Delta S_{Al} = 0.485\ \mathrm{kg} \times 897\ \mathrm{J\,kg^{-1}\,K^{-1}} \times \ln\left(\frac{173\ \mathrm{K}}{323\ \mathrm{K}}\right) = -271.62\,\mathrm{J\,K^{-1}}.$$

$$\Delta S_{eth} = \frac{2.9095\cdot 10^5\ \mathrm{J}}{173\ \mathrm{K}} = 1681\,\mathrm{J\,K^{-1}}.$$

On a donc pour la variation totale d'entropie de la glace :

$$\Delta S_{\mathrm{eau}} = \Delta S_1 + \Delta S_2 + \Delta S_3 = -864.2591\,\mathrm{J\,K^{-1}}. \tag{13}$$

$$\Delta S_{\mathrm{tot}} = \Delta S_1 + \Delta S_2 + \Delta S_3 + \Delta S_{al} + \Delta S_{eth} = 545.8\,\mathrm{J\,K^{-1}}. \tag{14}$$

e) (6 pt)

Comme la masse du récipient a augmenté, une masse plus importante d'éthanol doit être déplacée pour que le récipient continue à flotter. Nous calculons la nouvelle masse du récipient et le volume d'éthanol à déplacer qui en résulte :

$$m_e = m_{Al} + m_w + m_M$$

$$V_{e)} = (m_e/\rho_{eth})$$

Ce volume correspond au nouveau volume du récipient après l'insertion de la nouvelle masse. Ce volume doit être atteint grâce à la dilatation causée par l'augmentation de la température du système provoquée par la masse.

$$\Delta V_e = V_e - V_{Al}$$

$$\Delta T = \frac{\Delta V_e}{\beta_{Al} V_e}$$

La variation de température calculée ici est relative aux 50 ℃ initiaux et correspond à l'augmentation constatée lorsque le système est en équilibre. Nous pouvons maintenant trouver le c_M de la masse qui permettrait une telle augmentation de température :

$$\sum Q = Q_e + Q_{Al} + \underbrace{Q_M}_{\text{énergie libérée par la masse M}} = 0$$

$$Q = m_e c_e (T_{e,f} - T_{e,i}) + m_e L_{gl} + m_M c_M (T_{M,f} - T_{M,i}) + m_{Al} c_{Al} (T_{Al,f} - T_{Al,i}) = 0$$

En supposant que $T_{Al,f} = T_{eau,f} = T_{Al,i} + \Delta T$ nous pouvons résoudre l'équation ci-dessus par rapport au terme recherché c_M :

$$c_M = (m_e c_e \Delta T_e + m_{Al} c_{Al} \Delta T_e)/(m_M \Delta T_m)$$

<u>Application numérique :</u>

$$V_e = 0.7905 \text{ kg}/790 \text{ kg/m}^3 = 1.0006 \text{ L}$$

$$\Delta T = (0.0006 \text{ L}/70 \cdot 10^{-6} \text{ ℃}^{-1})1.0006 \text{ L} = 9 \text{℃}$$

$$T_f = 50 + \Delta T = 59 \text{℃}$$

$$c_M = \frac{(0.3 \text{ kg} \times 4186 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1} + 0.485 \text{ kg} \times 897 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}) \times 9 \text{ ℃}}{(0.0055 \text{ kg} \times (90 - 59) \text{ K}))} = 90'000 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$$

f) (2 pt) L'approximation de Dulong-Petit est formulée en termes de capacité thermique molaire. Nous pouvons donc transformer la valeur trouvée au point e) en unités molaires

$$c_{M,mol} = c_{M,mass} M = 90'000 \text{ J kg}^{-1}\text{ K}^{-1} \times 150 \times 10^{-3} \text{ kg mol}^{-1} = 13'479 \text{ J mol}^{-1}\text{ K}^{-1}$$

Par rapport aux :

$$c = 3R = 24.94 \text{ J mol}^{-1}\text{ K}^{-1}$$

Le c_M du point e) est beaucoup plus grand que $3R$, ce qui nous permet de conclure que ce matériel n'existe pas.

Exercice 3

Un gaz parfait monoatomique ($n = 10$ môles), contenu dans un cylindre fermé, subit un cycle moteur constitué des trois transformations suivantes, que l'on considère comme réversibles :

1) Détente adiabatique d'un état A à un état B.
2) Compression de l'état B à un état C avec pression p et volume V du gaz qui suivent la relation :

$$p = mV + q \quad \text{avec} \qquad m = \frac{p_B(\alpha V_B - V_C)}{V_C(V_C - V_B)}\,, \quad q = \frac{p_B(V_C^2 - \alpha V_B^2)}{V_C(V_C - V_B)}\,, \quad \alpha = 1.2\,, \tag{15}$$

telle que $p_C > p_B$.

3) Transformation isochore de l'état C à l'état A.

a) Dessinez qualitativement le cycle ABCA dans un diagramme $p - V$ et $T - V$ en définissant l'orientation du cycle avec des flèches.

Considérez le cycle ABCA tel que $V_A = 1$ m^3, $T_A = 500\ K$, et $T_B = 200\ K$.

b) Calculez la température T, le volume V, et la pression p du gaz dans chaque état A, B, C.
c) Calculez la chaleur échangée, le travail et la variation d'énergie interne du gaz lors de chaque transformation 1), 2), 3).
d) Calculez la variation d'enthalpie du gaz lors de la transformation 3).

Dans le suite de l'exercice, considérez le même gaz qui subit une séquence de i_{max} cycles moteur consécutifs, chacun formé de trois transformations du même type que 1), 2) et 3), mais avec des états B et C, qui changent d'un cycle au suivant, définis comme ci-dessous. Les variables d'état sont indiquées avec l'index "i" (exemple : $V_B(i)$ est le volume du gaz dans l'état B au cycle i). Considérez la séquence des cycles moteur telle que :

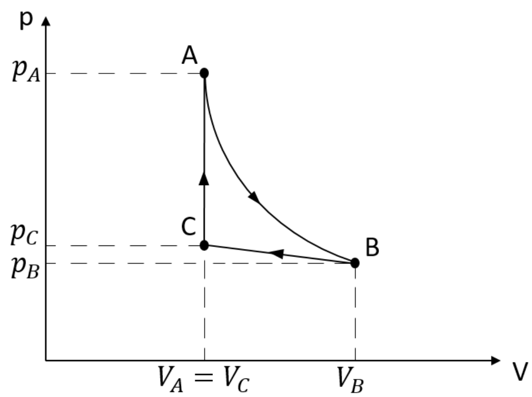
— Au premier cycle, $V_A(1) = 1$ m^3 , $T_A(1) = 500\ K$, $T_B(1) = 200\ K$.
— À chaque cycle i, les paramètres m et q de l'eq. (15) sont calculés en utilisant les variables d'état évaluées au i-ème cycle.
— $T_B(i + 1) = T_C(i)$.

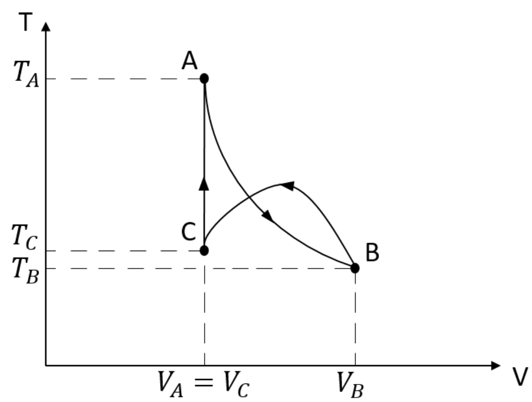
e) Montrez que $T_C(i) = \alpha^i T_B(1)$.
f) En sachant que la chaleur lors de la transformation CA est échangée uniquement avec un réservoir à la température de $500K$, calculez le nombre maximum de cycles moteur i_{max} que l'on peut effectuer.

Indications : on arrondit la valeur de la constante des gaz parfaits à $R = 8.3$ J/K/mol.

a) (5 pt)

Dans le diagramme p-V, la transformations A-B est une adiabatique ($pV^\gamma = const$) et la C-A est une isochore (donc une droite verticale). Dans ce même diagramme p-V, la transformation B-C est une droite avec pente négative (on peut le voire en utilisant l'Eq. (1)). Comme il s'agit d'un cycle moteur le sense de parcours est horaire. Le diagramme T-V est moins intuitif que le diagramme p-V. Pour obtenir $T = T(V)$, on utilise la loi des gaz parfaits ($pV = nRT$) dans laquelle on insère l'Eq. (1). La transformation B-C devient donc une parabole avec concavité vers le bas, puisque selon l'Eq. (1) la droite a coefficient angulaire négatif. A noter que cela signifie que pendant la transformation B-C, la température augmente d'abord, puis diminue ensuite, jusqu'à la valeur T_C. Le sense est toujours horaire.





b) (4 pt)

Pour trouver les valeurs, nous utilisons la loi des gaz parfaits et l'équation du processus adiabatique. La constante γ se trouve comme (en étant un gaz monoatomique) :

$$\gamma = \frac{C_p}{C_V} = \frac{5}{3} = 1.67 \tag{16}$$

Pour le point C on utilise l'équation donnée par le problème.

Point A :

$$p_A = \frac{nRT_A}{V_A} = 4.150 \cdot 10^4 \ Pa \tag{17}$$

Point B :

$$V_B = V_A \left(\frac{T_A}{T_B}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} = 3.95 \ m^3 \tag{18}$$

$$p_B = \frac{nRT_B}{V_B} = 4.2 \cdot 10^3 \ Pa \tag{19}$$

Point C :

$$p_C = mV_C + q = 1.99 \cdot 10^4 \ Pa \tag{20}$$

$$m = -5.32 \cdot 10^3 \ Pa/m^3 \tag{21}$$

$$q = 2.52 \cdot 10^4 \ Pa \tag{22}$$

$$T_C = \frac{p_C V_C}{nR} = 240 \ K \tag{23}$$

c) (6 pt)

Pour trouver le travail, la chaleur et la variation d'énergie interne, nous utilisons le premier principe de la thermodynamique.

Transformation AB. Comme c'est un adiabatique, Q=0, et on trouve l'énergie interne grâce à la température finale et initiale.

$$Q_{AB} = 0 \tag{24}$$

$$\Delta U_{AB} = nC_V(T_B - T_A = -3.73 \cdot 10^4 \ J \tag{25}$$

$$W_{AB} = -\Delta U_{AB} = 3.73 \cdot 10^4 \ J \tag{26}$$

Transformation BC. La pression de cette transformation suit l'équation linéaire donnée par le problème, on peut donc la remplacer dans la définition du travail, et l'intégrer pour trouver le travail effectué par le processus.

$$W_{BC} = \int_{V_B}^{V_C} pdV = \int_{V_B}^{V_C} (mV + q)dV \tag{27}$$

$$W_{BC} = \left[m\frac{V^2}{2} + qV\right]_{V_B}^{V_C} = m\frac{V_C^2}{2} + qV_C - m\frac{V_B^2}{2} - qV_B = -3.56 \cdot 10^4 \ J \tag{28}$$

$$\Delta U_{BC} = nC_V(T_C - T_B) = 4.98 \cdot 10^3 \ J \tag{29}$$

$$Q_{BC} = \Delta U_{BC} + W_{BC} = -3.06 \cdot 10^4 \ J \tag{30}$$

Transformation CA. Comme cette transformation est une isochore, le volume est constant et le travail W=0.

$$W_{CA} = 0 \tag{31}$$

$$\Delta U_{CA} = nC_V(T_A - T_C) = 3.24 \cdot 10^4 \ J \tag{32}$$

$$Q_{CA} = \Delta U_{CA} = 3.24 \cdot 10^4 \ J \tag{33}$$

d) (2 pt)

Pour trouver l'enthalpie, on utilise sa définition :

$$\Delta H = \Delta U + \Delta(pV) \tag{34}$$

Transformation CA :

$$\Delta H_{CA} = \Delta U_{CA} + p_A V_A - p_C V_C = 5.4 \cdot 10^4 \ J \tag{35}$$

e) (5 pt)

Pour trouver la relation entre T_C et T_B, nous devons trouver la relation entre α et les paramètres du cycle. On part de l'équation de la transformation BC, et on cherche α par rapport à la pression et aux volumes des points B et C.

$$p_C = mV_C + q = \frac{p_B(\alpha V_B - V_C)}{V_C(V_C - V_B)} V_C + \frac{p_B(V_C^2 - \alpha V_B^2)}{V_C(V_C - V_B)} \tag{36}$$

$$\frac{p_C}{p_B} V_C(V_C - V_B) = V_C(\alpha V_B - V_C) + (V_C^2 - \alpha V_B^2)$$

$$\frac{p_C}{p_B} V_C(V_C - V_B) = \alpha V_B(V_C - V_B)$$

$$\alpha = \frac{p_C V_C}{p_B V_B} \tag{37}$$

Cette relation est vraie pour chaque cycle i, car m et q varient à chaque cycle en fonction des volumes et des pressions en B et C, tandis que α reste constant. On pourrait donc réécrire :

$$\alpha = \frac{p_C(i) V_C(i)}{p_B(i) V_B(i)} \tag{38}$$

Donc on peut introduire α dans la loi des gaz parfaits du point C pour trouver une relation entre la température en C et la température en B. Faisons le calcul pour le premier cycle :

$$T_C(1) = \frac{p_C(1) V_C(1)}{nR} = \alpha \frac{p_B(1) V_B(1)}{nR} = \alpha T_B(1) \tag{39}$$

Cette relation est valable pour chaque cycle, car α est défini avec les paramètres du i-ème cycle. Pour le second cycle, on sait que $T_B(i+1) = T_C(i)$, donc en substituant dans l'eq. 39, on obtient :

$$T_B(2) = T_C(1) = \alpha T_B(1) \tag{40}$$

Et si on fait le même calcul que eq. 39, on trouve :

$$T_C(2) = \alpha T_B(2) = \alpha^2 T_B(1) \tag{41}$$

Et par extension :

$$T_C(i) = \alpha^i T_B(1) \tag{42}$$

f) (3 pt)

Pour trouver le nombre maximum de cycles moteur possibles, il faut trouver combien de cycles sont nécessaires pour augmenter la température du point C jusqu'à la température du point A, puisque la température du point A est fixé parce que le gaz échange de la chaleur avec le réservoir. La condition $T_C > T_A$ correspond a un cycle réfrigérateur.

$$T_A = T_C(i) = \alpha^i T_B(1) \tag{43}$$

$$i = \frac{\ln \frac{T_A(1)}{T_B(1)}}{\ln \alpha} \simeq 5 \tag{44}$$

Exercice 4

L'intérieur d'un tuyau cylindrique rigide composé d'une paroi en acier est complètement rempli de glace à la température de $T_{gl} = 0$ °C. Le tuyau a une longeur de $l = 10$ m, un rayon interne $r_i = 0.09$ m et un rayon externe $r_e = 0.1$ m. Les températures des surfaces interne et externe de la paroi sont indiquées par T_i et T_e respectivement. Pour fondre la glace (température de fusion de la glace $T_{\text{fus}} = 0$°C), la surface externe du tuyau est chauffée par un flux d'eau à la température $T_{eau} = 90$ °C. La direction radiale est décrite par la coordonnée $r > 0$ associée à un repère cylindrique centré sur l'axe du tuyau. La surface interne du tuyau est en équilibre thermique avec la glace qui fond. Soit κ le coefficient de diffusivité thermique de l'acier et h le coefficient de transfert de la chaleur entre l'eau et l'acier.

a) Montrez que la température dans la paroi du tuyau est donnée par $T(r) = A \times log(r) + B$, où $A = (T_e - T_i)/log(r_e/r_i)$ et $B = T_e - log(r_e)(T_e - T_i)/log(r_e/r_i)$.

b) Donnez l'expression du flux de chaleur $J(r)$ dans la paroi du tuyau en fonction de T_i, T_e, r_e, r_i et κ.

c) Pour les valeurs données, calculez la température T_e.

d) Calculez le temps nécessaire pour que, à l'intérieur du tuyau, toute la glace fonde complètement jusqu'à obtenir uniquement de l'eau à 0 °C.

Considérez pour la suite de l'exercice un tuyau cylindrique rigide composé d'une paroi en acier (rayon interne r_i, longueur l) dont l'intérieur est complètement rempli de glace à la température $T_{gl} = 0$ °C, en équilibre thermique avec la surface interne. La surface externe (de rayon r_e à déterminer) est chauffée par un flux d'eau à la température T_{eau}.

e) On souhaite trouver le rayon extérieur r_e qui minimise le temps de fonte de la glace (c'est à dire le temps qu'il faut pour obtenir uniquement de l'eau liquide à 0 °C), autrement dit qui maximise le flux de chaleur à travers le tuyau. Montrez que le rayon extérieur du tuyau pour lequel le temps de fonte sera minimal est donné par $r_e = \kappa/h$.

Indications : Traitez ce problème en coordonnées cylindriques. On suppose que le transfert de chaleur se fait en régime stationnaire et uniquement dans la direction radiale par convection entre l'eau et le tuyau (pour $r \geq r_e$), et par conduction dans la paroi du tuyau et entre le tuyau et la glace. On néglige les transferts de chaleur aux extrémités du tuyau. On fait l'hypothèse que la chaleur échangée avec la paroi interne est transférée de manière homogène à toute la glace. Densité volumique de la glace $\rho = 920$ kg/m^3. Chaleur latente de fusion de la glace $L_{\text{gl}} = 334$ kJ/kg. Coefficient de diffusivité thermique de l'acier $\kappa = 50$ W/m/K. Coefficient de transfert de la chaleur entre l'eau et l'acier $h = 400$ W/m^2/K. Le logarithme en base e de la variable x est indiqué par $log(x)$.

a) (6 pt)

On part de l'équation de diffusion de la chaleur en coordonnées cylindriques sans source de chaleur interne :

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right) = \frac{\rho c_V}{\kappa}\frac{\partial T}{\partial t} \tag{45}$$

Puisqu'on est en régime stationnaire, $\frac{\partial}{\partial t} = 0$. On doit donc résoudre l'équation suivante pour trouver $T(r)$

$$\begin{aligned}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right) &= 0\\ \frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right) &= 0\\ r\frac{\partial T}{\partial r} &= A\\ \frac{\partial T}{\partial r} &= \frac{A}{r}\\ T(r) &= A\ln r + B\end{aligned}$$

Pour trouver les constantes d'intégration, on utilise les conditions au bord suivantes :

$$\begin{aligned}T(r_i) = T_i &= A\ln(r_i) + B\\ T(r_e) = T_e &= A\ln(r_e) + B\end{aligned}$$

On a deux équations pour deux inconnues, et on trouve

$$\begin{aligned}A &= \frac{T_e - T_i}{\ln\left(\frac{r_e}{r_i}\right)}\\ B &= T_e - \ln(r_e)\frac{T_e - T_i}{\ln\frac{r_e}{r_i}}\end{aligned}$$

b) (3 pt)

La loi de Fourier nous dit que le flux de chaleur J est donné par

$$\begin{aligned}J &= -\kappa\frac{\partial T}{\partial r}\\ J &= -\kappa\frac{(T_e - T_i)}{r\ln\left(\frac{r_e}{r_i}\right)}\end{aligned}$$

c) (6 pt)

Pour trouver T_e, on utilise le fait que $\frac{\delta Q}{dt}$ est constant pour tout r.
On peut donc égaliser la chaleur transmise par unité de temps des deux côtés de la surface externe S du tuyau :

$$\begin{aligned} hS(T_e - T_{eau}) &= J(r_e)S \\ T_e &= T_{eau} - \frac{\kappa(T_e - T_i)}{hr_e \ln\left(\frac{r_e}{r_i}\right)} \\ T_e &= \frac{T_{eau} + \frac{\kappa T_i}{hr_e \ln\left(\frac{r_e}{r_i}\right)}}{1 + \frac{\kappa}{hr_e \ln\left(\frac{r_e}{r_i}\right)}} \\ T_e &\simeq 7.00\,°\mathrm{C} \end{aligned}$$

d) (5 pt)

La chaleur totale nécessaire pour fondre la glace est égale à $M_{gl}L_{gl}$ avec M_{gl} la masse de la glace contenue dans le tuyau.
Comme $\frac{\delta Q}{dt}$ est constant dans le temps, on peut simplement écrire

$$\begin{aligned} \frac{\delta Q}{dt}\Delta t &= M_{gl}L_{gl} \\ \Delta t &= \frac{L_{gl}\rho r_i^2 \pi l}{J(r)2\pi r l} \\ \Delta t &= \frac{L_{gl}\rho r_i^2 \ln\left(\frac{r_e}{r_i}\right)}{2\kappa(T_e - T_i)} \\ \Delta t &\simeq 375 \text{ s} \end{aligned}$$

e) (5 pt)

Pour simplifier les calculs, on va égaliser le flux de chaleur des deux côtés de la paroi externe du tuyau pour éliminer T_e et trouver une expression pour $\frac{dQ}{dt}$ qui l'on va, par la suite, maximiser.

$$\frac{dQ}{dt} = -\frac{2\pi l \kappa(T_e - T_i)}{\ln\left(\frac{r_e}{r_i}\right)} \implies T_i - T_e = \frac{dQ}{dt}\frac{\ln\left(\frac{r_e}{r_i}\right)}{2\pi l \kappa}$$

$$\frac{dQ}{dt} = 2\pi r_e l h(T_e - T_{eau}) \implies T_e - T_{eau} = \frac{dQ}{dt}\frac{1}{2\pi r_e l h}$$

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{T_i - T_{eau}}{\frac{\ln\left(\frac{r_e}{r_i}\right)}{2\pi l \kappa} + \frac{1}{2\pi r_e l h}} \tag{46}$$

On maximise $\frac{dQ}{dt}$ en cherchant r_e pour lequel la dérivée s'annule :

$$\frac{\partial}{\partial r_e}\left(\frac{dQ}{dt}\right) = 0 \tag{47}$$

$$\frac{\partial}{\partial r_e}\left(\frac{\ln\left(\frac{r_e}{r_i}\right)}{2\pi l\kappa}+\frac{1}{2\pi r_e lh}\right)=0 \tag{48}$$

$$\frac{1}{2\pi l\kappa r_e}-\frac{1}{2\pi lhr_e^2}=0 \tag{49}$$

$$r_e=\frac{\kappa}{h} \tag{50}$$

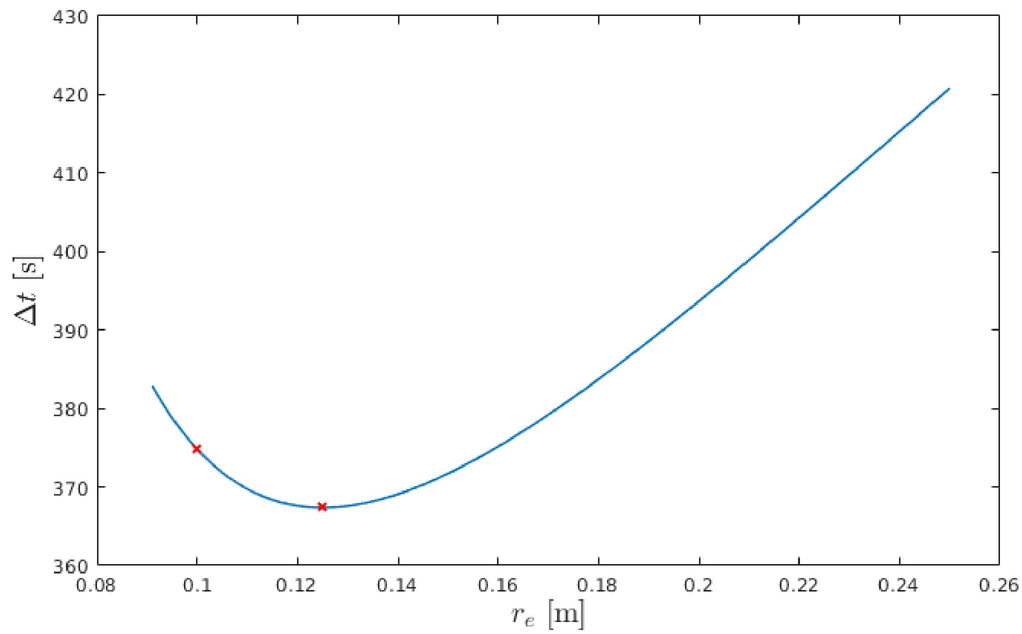


FIGURE 8 – Temps nécessaire pour faire fondre la glace, en fonction du rayon externe.