Exercice 1

Considérez un référentiel inertiel $\mathcal{R}$ avec comme origine le point spatial A. Une fusée voyage depuis le point A vers un point B sur l'axe $A-B$ avec une vitesse constante $v_{fus} = 0.75c$ (mesurée dans le référentiel $\mathcal{R}$). Les points A et B sont au repos l'un par rapport à l'autre et la distance $A-B$ est de $d = 1.5 \times 10^{11}$ m dans le référentiel $\mathcal{R}$.

a) Quelle est la distance $A-B$ dans le référentiel de la fusée ?

Un faisceau de particules relativistes voyage depuis une étoile lointaine vers le point B et, ensuite, le point A, sur l'axe $A-B$, à une vitesse constante v_P, mesurée dans $\mathcal{R}$. Au moment où l'avant du faisceau se trouve à la position du point B, la fusée se trouve à la position du point A. L'horloge de bord de la fusée indique que 260 s se sont écoulées depuis le moment où la fusée se trouvait à la position du point A jusqu'au moment où la fusée rencontre l'avant du faisceau. À cet instant, la fusée envoie un message radio vers le point A pour l'informer de l'arrivée du faisceau.

b) Calculez la vitesse du faisceau v_P dans le référentiel $\mathcal{R}$.

c) Dans le référentiel de la fusée, combien de temps s'écoule entre l'envoi du message radio et sa réception au point A ?

La station Discovery est au repos dans le référentiel $\mathcal{R}$. Elle se trouve entre le point A et B, sur l'axe $A-B$, à une distance de 3×10^9 m du point A mesurée dans le référentiel de la fusée. Les astronautes de Discovery effectuent une sortie dans l'espace et doivent être prévenus pour qu'ils puissent rentrer dans Discovery avant l'arrivée du faisceau. Pour cela, un message radio est envoyé depuis le point A en direction de Discovery à l'instant précis où le message radio envoyé par la fusée est reçu au point A.

d) Dans le référentiel $\mathcal{R}$, combien de temps s'écoule-t-il entre l'émission du message radio par la fusée et la réception par Discovery du message radio émis depuis le point A ?

e) En sachant qu'il faut 3 minutes (mesurées dans le référentiel $\mathcal{R}$) aux astronautes pour rentrer, est-ce qu'ils vont être prévenus suffisamment à l'avance pour se mettre en sécurité ? Considérez que la communication entre les astronautes et Discovery est instantanée.

f) La distance entre l'avant et l'arrière du faisceau le long de l'axe $A-B$ vaut $L = 10^7$ m dans le référentiel du faisceau. Dans le référentiel $\mathcal{R}$, combien de temps les astronautes doivent-ils rester dans Discovery pour que le faisceau soit passé (quand l'arrière du faisceau est à la position de Discovery) ?

Une sonde se déplace perpendiculairement à l'axe $A-B$, à une vitesse relativiste constante $v_{sonde} = 0.6c$ mesurée dans le référentiel $\mathcal{R}$.

g) Quelle est la norme de la vitesse de la sonde mesurée dans le référentiel du faisceau ?

h) En sachant qu'il a fallu fournir une énergie de 10^{16} J pour accélérer la sonde d'une situation de repos (dans le référentiel $\mathcal{R}$) à la vitesse v_{sonde}, quelle est la masse de la sonde ?

Indications : considérez la fusée et Discovery comme des points matériels dans l'espace, et n'ayant aucun effet sur la propagation du faisceau et des messages radio. Vitesse de la lumière $c = 3 \times 10^8$ m/s.

Corrigé

Voici ci-dessous un schéma général de l'exercice, avec les paramètres principaux (NB : ce schéma n'est bien sûr pas à l'échelle...).

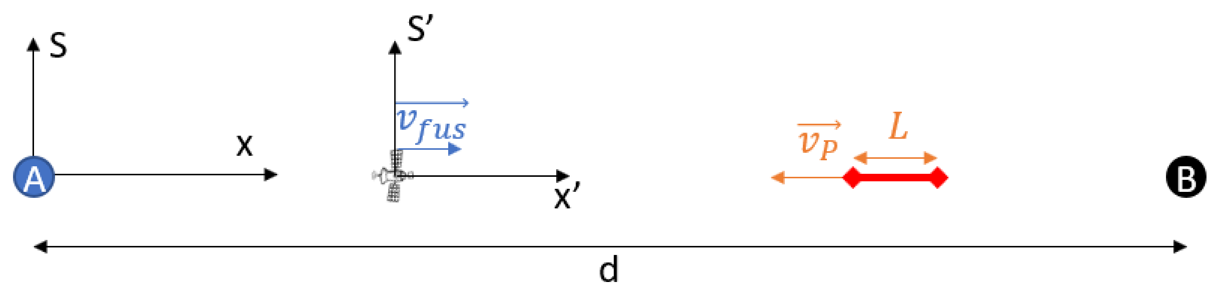


FIGURE 1 – Schéma général de l'exercice

a) Dans ce premier point, seuls les systèmes $A - B$ et "fusée" nous intéressent. Choisissons le référentiel S pour le système $A - B$, la fusée étant en mouvement par rapport à lui (référentiel S'). On nous donne $d = 1.5 \times 10^{11}$ m, exprimée dans le référentiel S. On cherche la distance d' dans le référentiel S'. Il s'agit d'une contraction de longueur, en considérant un déplacement du référentiel S' à une vitesse $v_{fus} = 0.75c$. On trouve :

$$d' = \frac{d}{\gamma_{fus}} = \sqrt{1 - 0.75^2} \cdot 1.5 \times 10^{11} = 9.9 \times 10^{10}\text{m} \tag{1}$$

où γ_{fus} est le coefficient relativiste de la fusée, donné par $\gamma_{fus} = \left(\sqrt{1 - \frac{v_{fus}^2}{c^2}}\right)^{-1}$.

b) La situation de cette question est représentée à la figure 2.

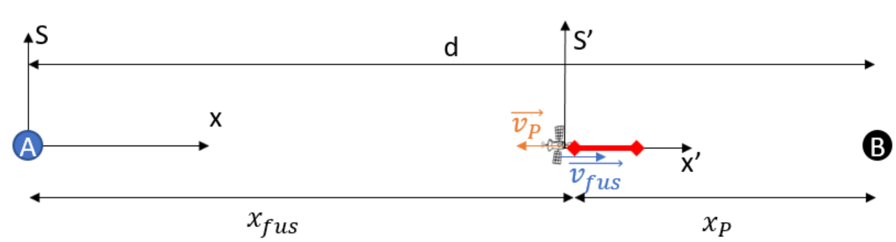


FIGURE 2 – Données et événements du point b)

Considérons à nouveau le référentiel S pour le système $\mathcal{R}$. Le but est d'exprimer toutes les données dans ce référentiel, car nous connaissons la distance totale $A - B$, qui peut être décomposée en la somme de deux distances : celle parcourue par le faisceau et celle parcourue par la fusée. Dans le référentiel de la fusée, le temps écoulé est un temps propre, $t_0 = 260$ s. Si on se place dans notre référentiel S, le temps écoulé est donné par une dilatation de temps :

$$\Delta t = \gamma_{fus} \cdot t_0 \Longrightarrow \Delta t = 393 \text{ s} \tag{2}$$

Dans le référentiel S, la fusée s'éloigne à une vitesse de 0.75c. Du coup, la distance parcourue est simplement donnée par :

$$x_{fus} = v_{fus} \cdot \Delta t = 8.84 \times 10^{10} \text{ m} \tag{3}$$

Comme nous connaissons la distance propre entre A et B, le faisceau de particules a dû nécessairement parcourir le reste de celle-ci, à savoir :

$$x_P = d - x_{fus} \Longrightarrow x_P = 6.16 \times 10^{10} \text{ m} \tag{4}$$

La distance x_P et le temps Δt étant tous deux définis dans le référentiel S, la vitesse du faisceau est simplement donnée par :

$$v_P = \frac{x_P}{\Delta t} \Longrightarrow v_P = 1.57 \times 10^8 \text{ m/s} \simeq 0.52c \tag{5}$$

Note : La réponse ci-dessus est la norme de la vitesse, une grandeur toujours positive. Cependant, la valeur négative -0.52c a aussi été acceptée si cela se justifiait au vu du référentiel choisi.

c) La situation est représentée sur la figure 3.

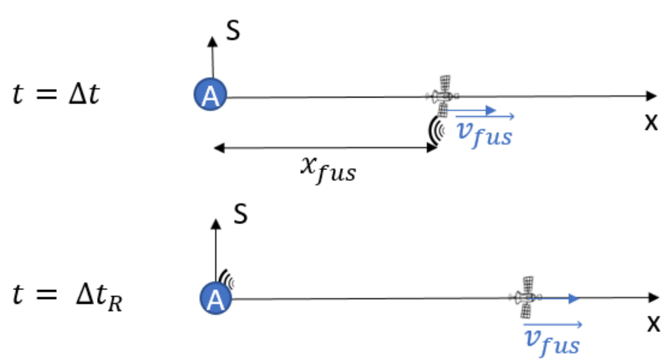


FIGURE 3 – Données et événements du point c)

Nous avons deux événements : l'envoi du signal et la réception du signal. Nous connaissons sa vitesse de propagation ($c = 3 \times 10^8$ m/s) et la distance qu'il doit parcourir (x_{fus}, tirée du point précédent). Du coup, le temps de propagation du signal dans le référentiel S est :

$$\Delta t_R = \frac{x_{fus}}{c} = \frac{8.84 \times 10^{10} \text{ m}}{3 \times 10^8 \text{ m/s}} = 294.81 \text{ s} \tag{6}$$

Ce temps de propagation peut être trouvé dans le référentiel S' de la fusée grâce à la transformée de Lorentz :

$$\Delta t'_R = \gamma_{fus}\left(\Delta t_R - \frac{v_{fus}\cdot\Delta x}{c^2}\right) = \gamma_{fus}\left(\Delta t_R + \frac{v_{fus}\cdot x_{fus}}{c^2}\right) \Longrightarrow \Delta t'_R = 780 \text{ s} \tag{7}$$

où v est la vitesse de la fusée dans le référentiel S et Δx la différence de position entre les deux événements, dans le référentiel $A-B$. Pour être convaincu de cette utilisation de Lorentz (notamment pour se convaincre que $\Delta x < 0$), voici une autre manière de réaliser le calcul. Notons les positions et temps dans chaque référentiel et pour chaque événement (envoi et réception) :

événement	S	S'
envoi	$(x_{fus}, \Delta t)$	$(\gamma_{fus}[x_{fus} - v_{fus}\Delta t], \gamma_{fus}[\Delta t - \frac{x_{fus}\cdot v_{fus}}{c^2}])$
réception	$(0, \Delta t + \Delta t_R)$	$(\gamma_{fus}[0 - v_{fus}(\Delta t + \Delta t_R)], \gamma_{fus}[\Delta t + \Delta t_R - 0])$

Pour connaître le temps demandé, il faut prendre la différence entre les coordonnées temporelles dans S' :

$$\Delta t'_R = \gamma_{fus}(\Delta t + \Delta t_R - 0) - \gamma_{fus}\left(\Delta t - \frac{x_{fus}\cdot v_{fus}}{c^2}\right) \tag{8}$$

$$= \gamma_{fus}\left(\Delta t_R + \frac{x_{fus}\cdot v_{fus}}{c^2}\right) \tag{9}$$

$$= 780 \text{ s} \tag{10}$$

d) La situation est représentée sur la figure 4. Les instants $t = \Delta t$ et $t = \Delta t_R$ on été représentés comme sur la figure 3 mais en considérant le faisceau également. Tous les temps sont considérés comme étant pris dans le référentiel $A - B$.

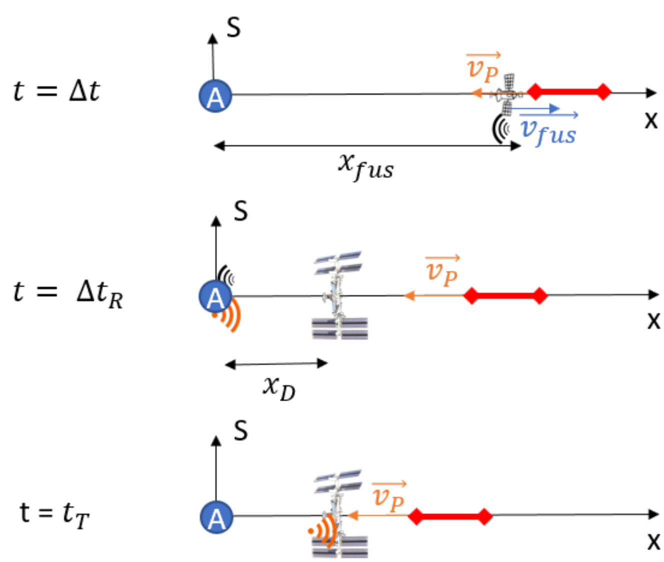


FIGURE 4 – Données et événements du point d)

Dans le référentiel $A - B$, le temps total de transmission du signal, depuis son envoi de la fusée jusqu'à A puis jusqu'à sa réception sur Discovery, est donné par :

$$t_T = \Delta t_R + \frac{x_D}{c} \tag{11}$$

Attention, dans l'énoncé la distance est donnée dans le référentiel de la fusée. Il faut dès lors la repasser en distance propre :

$$x_D = \gamma_{fus} \cdot x'_D = 4.54 \times 10^9 \text{ m} \tag{12}$$

L'équation 11 devient donc :

$$t_T = 294.81 \text{ s } + \frac{4.54 \times 10^9 \text{ m}}{3 \times 10^8 \text{ m/s}} = 309.94 \text{ s} \tag{13}$$

e) **Méthode 1 :** De son côté, le faisceau de particules s'est propagé d'une distance $x_{fus} - x_D$ (c'est à dire la distance qu'il lui restait à parcourir jusqu'au point A, à laquelle il faut enlever la distance de Discovery, se trouvant à une distance x_D en avant de A) et avec une vitesse v_P. Il parcourra cette distance en un temps :

$$t_P = \frac{x_{fus} - x_D}{v_P} = \frac{8.39 \times 10^{10} \text{ m}}{1.56 \times 10^8 \text{ m/s}} = 535.82 \text{ s} \tag{14}$$

Le signal et les particules vont arriver avec une différence de temps de :

$$\Delta t_{PT} = t_P - t_T = 225.89 \text{ s} \tag{15}$$

Ce temps est bel et bien plus grand que 3 minutes, les astronautes ont le temps de rentrer dans la station, OUF !

Méthode 2 : Le temps total qui s'écoule avant que les astronautes ne soient en sécurité est donné par :

$$\Delta t_{safe} = t_T + 180 = 489.93 \text{ s} \tag{16}$$

Pendant cet intervalle de temps, le faisceau a parcouru une distance de :

$$d_f = \Delta t_{safe} \cdot v_P = 7.67 \times 10^{10} \text{ m} \tag{17}$$

Comme d_f est plus petite que la distance entre son point de rencontre avec la fusée et Discovery ($d_{B-D} = x_{fus} - x_D = 8.39 \times 10^{10}$), le faisceau arrivera après que les astronautes aient pu se mettre en sécurité.

f) La longueur propre du faisceau L_0 est de 10^7 m. Cette longueur est contractée dans le référentiel S :

$$L_P = \frac{L_0}{\gamma_P} = 8.53 \times 10^6 \text{ m} \tag{18}$$

En connaissant la vitesse de propagation du faisceau, le temps de passage est donné par :

$$t_{passage} = \frac{L_P}{v_P} = 0.054 \text{ s} = 54 \text{ ms} \tag{19}$$

Si on considère que les astronautes rentrent immédiatement dans Discovery (dès qu'ils sont prévenus), ils vont attendre un temps total de :

$$t_{attente} = \Delta t_{PT} - 180 \text{ s} + t_{passage} = (225.89 - 180 + 0.054) \text{ s} = 45.94 \text{ s} \tag{20}$$

Note : La réponse $t_{passage}$ seule a aussi été acceptée.

g) Choisissons S, le référentiel $A - B$ et S', le référentiel du faisceau. Nous savons que chaque élément se déplace dans le référentiel S comme suit :

$$\begin{array}{cc|c} \text{Faisceau} & u_x = -v_P & u_y = 0 \\ \text{Sonde} & v_x = 0 & v_y = v_{sonde} \end{array}$$

Pour calculer la vitesse de la sonde vue par le faisceau dans son référentiel (S'), on utilise les tranformations de Lorentz inverses avec $v = v_P$. Cela donne, pour chaque axe :

$$u'_x = \frac{v_x - v}{1 - \frac{vv_x}{c^2}} = \frac{0 - v_P}{1 - 0} = -0.52c \tag{21}$$

$$u'_y = \frac{v_y}{\gamma_P \cdot (1 - \frac{vv_x}{c^2})} = \frac{v_{sonde}}{\gamma_P} = 0.51c \tag{22}$$

$$\tag{23}$$

Dès lors, la norme de la vitesse vue par le faisceau est :

$$u' = \sqrt{u'^2_x + u'^2_y} = 0.73c \tag{24}$$

h) Nous connaissons l'énergie et la vitesse de la sonde, il suffit simplement d'appliquer la formule vue au cours :

$$E = m_0 c^2(\gamma_{sonde} - 1) \Longleftrightarrow m_0 = \frac{E}{c^2(\gamma_{sonde} - 1)} = 0.44 \text{ kg} \tag{25}$$

Exercice 2

Un artiste vient de compléter son dernier chef-d'oeuvre : deux cubes en aluminium de masse $m_{Al} = 2$ kg chacun, qui, à l'état initial, sont à la température de $T_{Al,in} = 600°C$.
Pour refroidir le premier cube, l'artiste dispose d'un récipient à parois rigides et thermiquement isolantes, qui se trouve au niveau de la mer. Le récipient est ouvert vers le haut et contient, dans l'état initial, $m_e = 2$ kg d'eau à une température $T_{e,in} = 25°C$. Le premier cube est immergé dans l'eau et l'échange de la chaleur se passe uniquement entre l'eau et le cube jusqu'à atteindre l'état final d'équilibre thermique entre les deux.

a) Montrez que la température du système cube + eau est $T_{sys,f} = 100°C$ dans l'état final.

b) Quelle masse m_{vap} d'eau a été évaporée entre l'état initial et l'état final ?

c) Quelle est la variation d'entropie ΔS_{sys} du système cube + eau (liquide et vapeur) entre l'état initial et l'état final ?

d) À l'état final, quel est le volume V_{sys} occupé par le système composé du cube et de l'eau liquide restante ?

Pour refroidir le deuxième cube, l'artiste dépose celui-ci dans un deuxième récipient (situé au niveau de la mer et identique au premier), qui est instantanément fermé de manière hermétique avec un piston mobile de masse négligeable. Le piston peut coulisser sans frottement et est thermiquement isolant. Dans cet état initial, le récipient contient uniquement 10 moles d'air à une température $T_{a,in} = 25°C$ et le cube, qui est à une température $T_{Al,in} = 600°C$. Le cube et l'air échangent de la chaleur lentement de façon à ce que le piston soit en tout temps en équilibre mécanique, jusqu'à atteindre l'état final, où le cube et l'air sont à l'équilibre thermique.

e) Calculez la température $T_{sys,f}$ du système cube + air dans l'état final.

f) Quel est le volume occupé par l'air V_f dans l'état final et quels sont le travail, W, et la chaleur, Q, échangés avec l'extérieur du récipient fermé ?

Indications : chaleur spécifique de l'aluminium $c_{Al} = 897$ J/(K kg) ; chaleur spécifique de l'eau $c_e = 4186$ J/(K kg) ; chaleur latente de vaporisation de l'eau $L_e = 2256 \times 10^3$ J/kg ; coefficient d'expansion linéaire de l'aluminium $\alpha = 2 \times 10^{-5}$ °C^{-1} ; densité de l'eau ρ_e (exprimée en kg / m^3) à la température T (exprimée en °C) $\rho_e = 1001.4 - 0.1011 \times T - 0.0033 \times T^2$; densité de l'aluminium à 25°C $\rho_{Al} = 2700$ kg/m^3. Pour les points e) et f), on négligera l'expansion thermique du cube et on traitera l'air comme un gaz parfait diatomique (avec uniquement des degrés de liberté translationnels et rotationnels). Constante des gaz parfaits $R = 8.314$ J/K/mol.

Corrigé

a) Montrez que la température, $T_{sys,f}$, du système cube + eau est 100°C dans l'état final.

En étant au niveau de la mer le point d'ébullition de l'eau est 100°C. On peut imaginer trois possibilités :

1. La température finale est comprise entre 25°C et 100°C. Le cube d'aluminium chauffe l'eau, mais pas suffisamment pour atteindre le point d'ébullition.

2. La température finale est de 100°C, et une certaine quantité d'eau sera évaporée.

3. La température finale est entre 100°C et 600°C, et toute l'eau est évaporée.

Pour décider lequel des scénarios sera réalisé, on commence par comparer la quantité de chaleur que le bloc d'aluminium peut transférer à l'eau, et la chaleur nécessaire pour chauffer l'eau jusqu'à 100°C.

La chaleur libérée par le bloc lorsque sa température descend de 600°C à 100°C est

$$\Delta Q_A = c_{Al} m_{Al} (600 - 100)°\mathrm{C} \approx 897 \text{ kJ} \tag{26}$$

La chaleur nécessaire pour chauffer l'eau jusqu'à son point d'ébullition est

$$\Delta Q_e = c_e m_e (100 - 25)°\mathrm{C} \approx 628 \text{ kJ} \tag{27}$$

L'eau atteindra donc son point d'ébullition, et une partie se transformera en vapeur. Pour évaporer toute l'eau dans le récipient, la chaleur nécessaire serait

$$m_e L_e = 4512 \text{ kJ} \tag{28}$$

On conclut alors que le bloc va chauffer l'eau jusqu'à $T_{sys,f} = 100°\mathrm{C}$ mais qu'elle ne va pas complètement s'évaporer.

b) Quelle masse m_{vap} d'eau a été évaporée entre l'état initial et l'état final ?

Pour trouver la masse d'eau évaporée, on égalise la chaleur donnée par le bloc à celle reçue par l'eau

$$c_{Al} m_{Al} (T_{Al,in} - T_{sys,f}) = c_e m_e (T_{sys,f} - T_{e,in}) + m_{vap} L_e \tag{29}$$

$$m_{vap} = \frac{(T_{Al,in} - T_{sys,f}) c_{Al} m_{Al} - (T_{sys,f} - T_{e,in}) c_e m_e}{L_e} \approx 0.12 \text{ kg} \tag{30}$$

c) Quelle est la variation d'entropie ΔS_{sys} du système cube + eau (liquide et vapeur) entre l'état initial et l'état final ?

De manière générale, la variation d'entropie est donnée par la formule suivante :

$$dS = \frac{\delta Q}{T} \tag{31}$$

On exprime la chaleur δQ échangée lors du changement de la température et lors de l'évaporation

$$\delta Q = c\ m\ dT$$
$$\delta Q = L_e\ dm_{vap}$$

On peut maintenant écrire la variation totale d'entropie du système eau+bloc, en faisant attention d'exprimer les températures en degrés Kelvin

$$\Delta S_{sys} = \int_{T_{e,in}}^{T_{sys,f}} \frac{c_e m_e}{T} dT + \int_{T_{Al,in}}^{T_{sys,f}} \frac{c_{Al} m_{Al}}{T} dT + \int_0^{m_{vap}} \frac{L_e dm}{T_{sys,f}} \tag{32}$$

$$\Delta S_{sys} = c_e m_e \ln\left(\frac{T_{sys,f}}{T_{e,in}}\right) + c_{Al} m_{Al} \ln\left(\frac{T_{sys,f}}{T_{Al,in}}\right) + \frac{m_{vap} L_e}{T_{sys,f}} \tag{33}$$

$$\Delta S_{sys} \approx (1879 - 1526 + 721) \text{ J/K} \approx 1075 \text{ J/K} \tag{34}$$

d) À l'état final, quel est le volume V_{sys} occupé par le système composé du cube et de l'eau liquide restante ?

Le volume occupé par l'eau et le bloc dépend de leur température. Le volume d'eau peut être calculé en utilisant l'expression pour sa densité ρ_e donnée dans l'énoncé

$$V_e = \frac{m_e - m_{vap}}{\rho_e} = \frac{m_e - m_{vap}}{1001.4 - 0.1011 T_{sys,f} - 0.0033 T_{sys,f}^2} \approx 2.0 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 \tag{35}$$

Le volume du bloc est trouvé en utilisant le coefficient de dilatation α, qui nous permet de calculer le coefficient d'expansion volumique $\beta = 3\alpha$.

$$V_A = V_0(1 + 3\alpha\Delta T) \tag{36}$$

avec V_0 le volume "initial" du bloc. Attention, puisqu'on connaît la densité de l'aluminium à 25°C, on écrira le volume V_0 pour le bloc à 25°C et la différence de température $\Delta T = T_{sys,f} - 25$.

$$V_A = \frac{m_{Al}}{\rho_A}(1 + 3\alpha(T_{sys,f} - 25°\text{C})) \approx 7.4 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3 \tag{37}$$

Le volume total occupé par le système est simplement la somme des volumes occupés par l'eau et le bloc

$$V_{sys} = V_e + V_A \approx 2.7 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 \tag{38}$$

e) Calculez la température $T_{sys,f}$ du système cube + air dans l'état final.

Dans cette deuxième partie de l'exercice, la chaleur cédée par le bloc servira à chauffer l'air, mais aussi à augmenter son volume, puisque le piston peut coulisser. L'augmentation de volume correspond donc à un travail W effectué par l'air. En considérant le système air + bloc, on peut écrire le premier principe comme suit

$$c_{Al} m_{Al}(T_{Al,in} - T_{sys,f}) = C_V n(T_{sys,f} - T_{a,in}) + W \tag{39}$$

avec $C_V = 5R/2$. Notez qu'on aurait pu simplement égaliser les chaleurs échangées entre bloc et air en utilisant les chaleurs spécifiques à pression constante.
Le travail nécessaire pour augmenter le volume de l'air est donné par

$$W = \int p dV = p_{atm} \cdot (V_f - V_i) \tag{40}$$

où on a supposé que la pression à l'intérieur du cylindre reste égale à la pression atmosphérique, puisque le piston est en équilibre mécanique en tout temps. Pour trouver le changement de volume, on utilise la loi des gaz parfaits

$$pV = nRT \implies (V_f - V_i) = \frac{nR}{p_{atm}} \cdot (T_{sys,f} - T_i) \tag{41}$$

Le travail W vaut donc

$$W = nR(T_{sys,f} - T_i) \tag{42}$$

On peut finalement exprimer la température finale à partir de l'équation 39

$$T_{sys,f} = \frac{T_{Al,in}c_{Al}m_{Al} + T_{a,in}(C_V n + nR)}{c_{Al}m_{Al} + C_V n + nR} \approx 519.7°\text{C} = 792.15 \text{ K} \tag{43}$$

f) Quel est le volume occupé par l'air V_f dans l'état final et quels sont le travail, W, et la chaleur, Q, échangés avec l'extérieur du récipient fermé ?

Le travail W a été exprimé au point précédent :

$$W = nR(T_{sys,f} - T_{a,in}) \approx 41.1 \text{ kJ} \tag{44}$$

La chaleur Q échangée avec l'extérieur est nulle puisqu'on suppose que le récipient est isolé thermiquement.

$$Q = 0 \tag{45}$$

Le volume final V_f peut être calculé en utilisant la loi des gaz parfaits :

$$V_f = \frac{nRT_{sys,f}}{p_{atm}} \approx 0.651 \text{ m}^3 \tag{46}$$

Exercice 3

Un gaz parfait monoatomique ($n = 10$ moles) subit un cycle constitué des transformations suivantes, que l'on considère comme réversibles :

1) Transformation isobare d'un état A avec volume $V_A = 0.4$ m^3, pression $p_A = 2.49$ bar à un état B avec $V_B = 0.1$ m^3.
2) Transformation isochore de l'état B à l'état C avec pression $p_C = p < p_A$.
3) Transformation isobare de l'état C à l'état D.
4) Transformation isochore de l'état D à l'état A.

a) Dessinez le cycle $ABCDA$ dans un diagramme p–V. S'agit-il d'un cycle moteur ou réfrigérateur ?

Considérez le cycle $ABCDA$ tel que $p = 0.83$ bar.

b) Calculez la température T, le volume V, et la pression p dans chaque état A, B, C, D.

c) Calculez la chaleur échangée et le travail lors de chaque transformation 1), 2), 3), 4).

d) Représentez et comparez de manière qualitative les distributions des vitesses des atomes du gaz aux deux températures extrêmes du cycle : vous discuterez en particulier de quelle distribution il s'agit, de la position relative des maxima, de la largeur à mi-hauteur et de l'intégrale de chaque distribution.

Considérez maintenant les transformations 1), 2), 3), 4) avec la pression p à déterminer.

e) Calculez la pression p telle que le changement d'enthalpie du gaz entre l'état C et l'état D vaut $\Delta H_{CD} = 124500$ J.

f) Calculez la pression p telle que $T_D = T_B$.

g) Le changement d'enthalpie du gaz sur le cycle $ABCDA$ est plus grand pour les conditions du point e) ou f) ? Justifiez votre réponse.

h) Si la transformation 1) est remplacée par une transformation irréversible entre les deux mêmes états A et B, quel est le changement d'enthalpie du gaz sur le cycle $ABCDA$? Justifiez votre réponse.

Considérez maintenant les transformations 1), 2), 3), 4) telles que $p/p_A \to 0$. Soit Q_{CD} et Q_{DA} les chaleurs échangées lors des transformations 3) et 4) respectivement, et W_{cycle} le travail total sur cycle $ABCDA$.

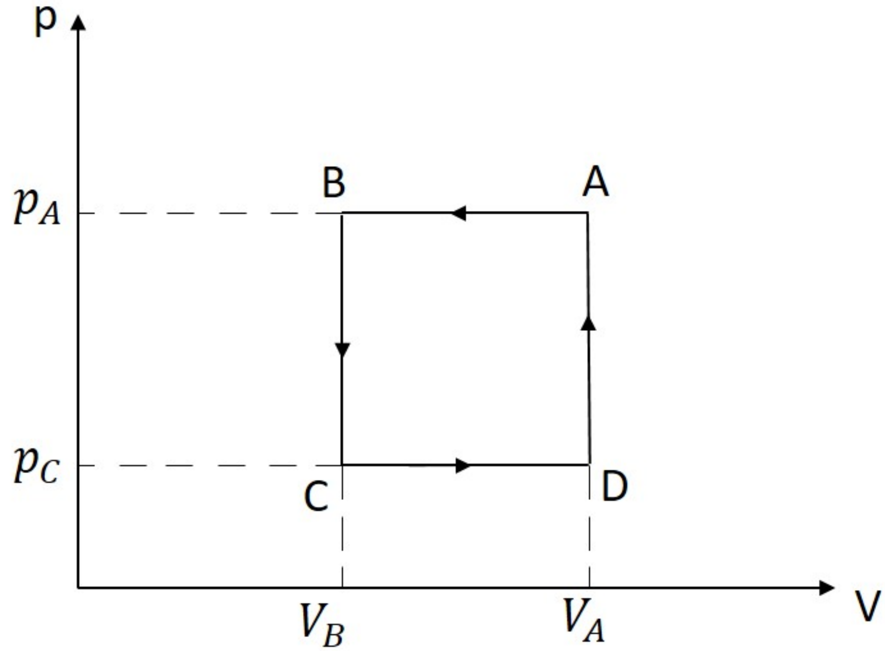
i) Montrez que

$$\lim_{p/p_A \to 0} \frac{|Q_{CD} + Q_{DA}|}{|W_{cycle}|} = 2.$$

Indications : on arrondit la valeur de la constante des gaz parfaits à R = 8.3 J/K/mol.

Corrigé

a) Le cycle est représenté sur la figure ci-dessous. Il s'agit d'un un cycle réfrigérateur car il est parcouru dans le sens anti-horaire.



b) Pour calculer P, V et T dans les états A, B, C, D, on va utiliser la loi des gaz parfaits après avoir converti la pression en [Pa].

Point A :

$$\begin{aligned} V_A &= 0.4 \text{ m}^3 \\ p_A &= 2.49 \text{ bar} = 2.49 \times 10^5 \text{ Pa} \\ T_A &= \frac{p_A V_A}{nR} = 1200\ K \end{aligned} \tag{47}$$

Point B :

$$\begin{aligned} V_B &= 0.1 \text{ m}^3 \\ p_B &= p_A = 2.49 \times 10^5 \text{ Pa} \\ T_B &= \frac{p_B V_B}{nR} = 300\ K \end{aligned} \tag{48}$$

Point C :

$$\begin{aligned} V_C &= V_B = 0.1 \text{ m}^3 \\ p_C &= 0.83 \text{ bar} = 0.83 \times 10^5 \text{ Pa} \\ T_C &= \frac{p_C V_C}{nR} = 100\ K \end{aligned} \tag{49}$$

Point D :

$$\begin{aligned} V_D &= V_A = 0.4 \text{ m}^3 \\ p_D &= p_C = 0.83 \times 10^5 \text{ Pa} \\ T_D &= \frac{p_D V_D}{nR} = 400\ K \end{aligned} \tag{50}$$

c) Pour trouver la chaleur échangée et le travail fait par ou sur le gaz lors de chaque transformation 1, 2, 3, 4, on utilise le premier principe de la thermodynamique et la définition du travail $\delta W = p\delta V$.

Transformation 1 (A→B) :

$$W_{AB} = p_A(V_B - V_A) = -74.700\ kJ \tag{51}$$

$$\Delta U_{AB} = Q_{AB} - W_{AB}$$

$$Q_{AB} = \Delta U_{AB} + W_{AB} = nC_V(T_B - T_A) + p_A(V_B - V_A) = -186.750\ kJ \tag{52}$$

Où on a utilisé $C_V = 3R/2$, pour gaz monoatomique. Étant donné qu'il s'agit d'une transformation isobare, on aurait aussi pu utiliser :

$$Q_{AB} = nC_P(T_B - T_A) \tag{53}$$

Avec $C_P = 5R/2$, toujours pour gaz monoatomique.

Transformation 2 (B→C) :

$$W_{BC} = 0 \tag{54}$$

$$\Delta U_{BC} = Q_{BC}$$

$$Q_{BC} = nC_V(T_C - T_B) = -24.900\ kJ \tag{55}$$

Transformation 3 (C→D) :

$$W_{CD} = p_C(V_D - V_C) = 24.900\ kJ \tag{56}$$

$$\Delta U_{CD} = Q_{CD} - W_{CD}$$

$$Q_{CD} = \Delta U_{CD} + W_{CD} = nC_V(T_D - T_C) + p_C(V_D - V_C) = 62.250\ kJ \tag{57}$$

Étant donné qu'il s'agit d'une transformation isobare, on aurait aussi pu utiliser :

$$Q_{CD} = nC_P(T_D - T_C) \tag{58}$$

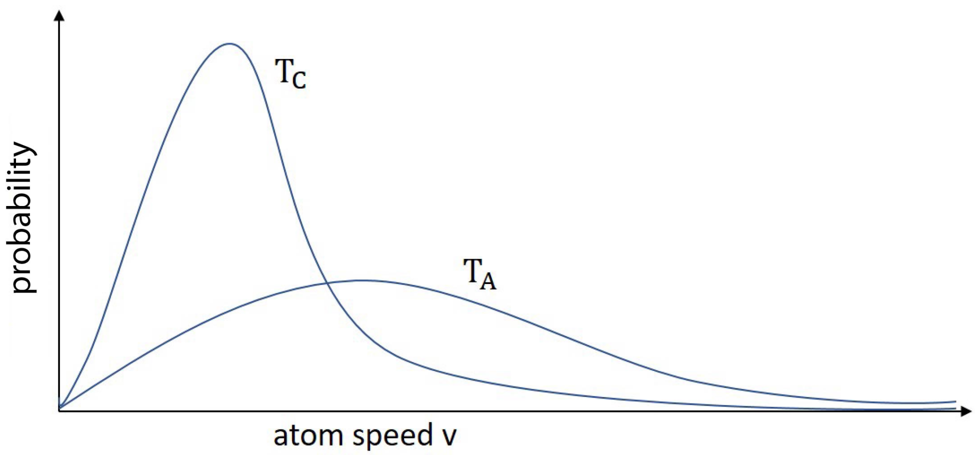
Transformation 4 (D→A) :

$$W_{DA} = 0 \tag{59}$$

$$\Delta U_{DA} = Q_{DA}$$

$$Q_{DA} = nC_V(T_A - T_D) = 99.600\ kJ \tag{60}$$

d) Les températures extrêmes calculées au point b) sont $T_C = 100$ K et $T_A = 1200$ K. La vitesse des atomes du gaz est décrite par une distribution de Maxwell–Boltzmann. Le maximum de la fonction de distribution pour la température plus élevée correspond à une vitesse plus élevée que celle de la température plus basse : il sera plus à droite. La largeur à mi-hauteur de la fonction de distribution est plus grande pour une plus haute température car un plus grand nombre de molécules ont une vitesse élevée alors qu'à basse température la distribution est plus étroite car la majorité des molécules sont à une vitesse plus basse. L'intégrale des deux distributions est toujours égale à 1 car elles sont normalisée par rapport au nombre de molécules considérées dans notre gaz, qui est 10 moles dans ce cas. On pourrait également utiliser non pas la probabilité, mais le nombre d'atomes ou de molécules qui ont une certaine vitesse. Dans ce cas l'intégrale serait égale au nombre total de molécules ou d'atomes dans notre système. Les fonctions de distribution pour les deux températures peuvent être qualitativement dessinées comme suit :



e) L'enthalpie est définie comme H = U + pV. Une variation d'enthalpie peut être écrite comme ΔH = ΔU + Δ(pV) = ΔU + VΔp + pΔV. Dans le cas d'une transformation isobare, telle que la transformation CD, le terme VΔp est nul, donc ΔH = Q :

$$\Delta H_{CD} = \Delta U_{CD} + p\Delta V_{CD} = nC_v(T_D - T_C) + p(V_D - V_C) \tag{61}$$

On utilise la loi des gaz parfaits pour remplacer les températures avec la pression p et le volume, et on utilise $C_V = 3R/2$ pour un gaz monoatomique :

$$\Delta H_{CD} = n\frac{3}{2}R(\frac{pV_D}{nR} - \frac{pV_C}{nR}) + p(V_D - V_C) \tag{62}$$

$$\Delta H_{CD} = (\frac{3}{2} + 1)p(V_D - V_C) = p\frac{5}{2}(V_D - V_C) \tag{63}$$

$$p = \frac{2\Delta H_{CD}}{5(V_D - V_C)} = 1.66 \times 10^5 \ Pa \tag{64}$$

f) Pour calculer p, on va utiliser la loi des gaz parfaits avec T_D=T_B.

$$p = \frac{nRT_D}{V_D} = 0.62 \times 10^5 \ Pa \tag{65}$$

g) L'enthalpie est une variable d'état donc il n'y a pas de variation tout au long du cycle.

$$\Delta H_{cycle} = 0 \tag{66}$$

h) Mêmes considérations qu'à la question g).

$$\Delta H_{cycle} = 0 \tag{67}$$

i) Pour démontrer cette limite il suffit de remplacer les températures par la pression et le volume, d'utiliser $V_A = 4V_B$ et d'expliciter p/p_A :

$$\begin{gathered}
\lim_{p/p_A \to 0} \frac{|Q_{CD} + Q_{DA}|}{|W_{cycle}|} = \\
\lim_{p/p_A \to 0} \left| \frac{Q_{CD} + Q_{DA}}{W_{AB} + W_{CD}} \right| = \\
\lim_{p/p_A \to 0} \left| \frac{nC_P(T_D - T_C) + nC_V(T_A - T_D)}{p_A(V_B - V_A) + p(V_D - V_C)} \right| = \\
\lim_{p/p_A \to 0} \left| \frac{\frac{5}{2}nR(\frac{pV_D}{nR} - \frac{pV_C}{nR}) + \frac{3}{2}nR(\frac{p_AV_A}{nR} - \frac{pV_D}{nR})}{p_A(V_B - V_A) + p(V_A - V_B)} \right| = \\
\lim_{p/p_A \to 0} \left| \frac{\frac{5}{2}p(V_A - V_B) + \frac{3}{2}V_A(p_A - p)}{p_A(V_B - V_A) + \frac{p}{p_A}(V_A - V_B)} \right| = \\
\lim_{p/p_A \to 0} \left| \frac{\frac{5}{2}\frac{p}{p_A}(V_A - V_B) + \frac{3}{2}V_A\frac{p_A}{p_A}(1 - \frac{p}{p_A})}{(V_A - V_B)(\frac{p}{p_A} - 1)} \right| = \\
\lim_{p/p_A \to 0} \left| \frac{\frac{5}{2}\frac{p}{p_A}(V_A - V_B) + \frac{3}{2}V_A(1 - \frac{p}{p_A})}{(V_A - V_B)(\frac{p}{p_A} - 1)} \right| = \\
\left| \frac{\frac{3}{2}V_A}{V_B - V_A} \right| = \\
\left| \frac{\frac{3}{2}4V_B}{V_B - 4V_B} \right| = \\
\left| \frac{\frac{3}{2}4}{-3} \right| = \\
|-2| = 2
\end{gathered} \tag{68}$$

Exercice 4

L'entièreté du sol d'une patinoire est constituée d'une piste de glace (superficie $A = 400$ m^2, épaisseur $L = 5$ cm, conductivité thermique de la glace $\kappa_g = 2.4$ W/m/K). La surface supérieure de la glace est à la température T_s = -5°C. La surface inférieure de la glace est maintenue à la température T_i par un frigo. Les murs et le toit de la patinoire sont à une température égale à celle de l'air à l'intérieur de la patinoire, T_{air} = 5°C.
En sachant que les températures ne changent pas au cours du temps :

a) Calculez la température de la surface inférieure de la glace, T_i, dans le cas où la surface supérieure de la glace échange de la chaleur par convection avec l'air ambiant (négligez tout rayonnement).

b) Calculez la température de la surface inférieure de la glace, T_i, dans le cas où la surface supérieure de la glace échange de la chaleur par convection avec l'air ambiant ainsi que par rayonnement avec les murs et le toit de la patinoire. Traitez la glace, les murs et le toit comme des corps noirs.

c) Montrez que la température à mi-distance entre la surface inférieure et supérieure de la piste de glace est donnée par $T_c = (T_i + T_s)/2$.

Le frigo a un coefficient de performance, $CP = 5$, et fonctionne avec un moteur électrique qui convertit 80% de l'énergie électrique en énergie mécanique. Le prix de l'énergie électrique est de 0.3 CHF pour 1 kWh.

d) Combien coûte l'utilisation du frigo, par jour, pour les conditions du point a) ?

Considérez ensuite une piste de glace synthétique de mêmes dimensions que la piste de glace des points précédents. La glace synthétique a une conductivité thermique $\kappa(x) = \kappa_g \exp(-x/L)$, avec x la coordonnée selon l'axe perpendiculaire à la piste de glace, telle que $x = 0$ à la surface supérieure et $x = L$ à la surface inférieure. En sachant que, en conditions stationnaires, la conduction de la chaleur à l'intérieur de la glace synthétique est décrite par l'équation suivante :

$$\frac{d}{dx}\left[\kappa(x)\frac{dT(x)}{dx}\right] = 0, \tag{69}$$

e) Calculez la température à la surface inférieure, telle que $T(0) = -5$°C et que la puissance thermique à travers la surface supérieure soit de 300 kW.

Indications : la piste de glace est traitée en géométrie plane. Le transport de la chaleur à travers les surfaces verticales de la piste est négligé. Les murs et le toit ont une épaisseur négligeable. Coefficient de transfert de la chaleur par convection *glace-air* $h = 65$W/m^2/K. Constante de Stefan-Boltzmann $\sigma_B = 5.7 \times 10^{-8}$ W/m^2/K^4.

Corrigé

a) Dans le cas stationnaire, l'égalité de puissance thermique à travers la surface supérieure s'applique. Le flux de chaleur est donné par

$$q_T = -\kappa_g \frac{\partial}{\partial x} T(x) = \kappa_g \frac{(T_i - T_s)}{L}. \tag{70}$$

Dans le régime stationnaire, on a l'égalité des flux de chaleurs

$$Aq_T = S_T A, \tag{71}$$

où Aq_T est la puissance totale à travers la couche supérieure de la glace par diffusion, et $S_T A$ est la puissance reçue sur la couche supérieure. On considère les cas où la piste de glace échange de la chaleur par convection avec l'air ambiant. Dans ce cas, on a que

$$AS_T = Ah(T_s - T_{air}). \tag{72}$$

L'égalité des flux devient alors

$$A\kappa_g \frac{(T_i - T_s)}{L} = Ah(T_s - T_{air}), \tag{73}$$

Avec 70, on résout pour T_i,

$$T_i = \frac{Lh}{\kappa_g}(T_s - T_{air}) + T_s. \tag{74}$$

<u>Application numérique :</u>

$$T_i = \frac{0.05[m] \times 65[W/m/m/K]}{2.4[W/m/K]} \times (268.15[K] - 278.15[K]) + 268.15[K] = 254.6[K] \quad (-18.54°C) \tag{75}$$

et

$$q_T = \frac{2.4[W/m/K]}{0.05[m]} \times (254.6[K] - 268.15[K]) = -650[J/m^2/s] \tag{76}$$

b) On considère les cas où la piste de glace échange de la chaleur par convection avec l'air ambiant et par rayonnement thermique. Dans ce cas, le bilan des puissances est

$$q_T A = Ah(T_s - T_{air}) + A\sigma(T_s^4 - T_{air}^4). \tag{77}$$

Dans cette formule nous avons utilisé l'hypothèse que la glace et les parois rayonnent comme des corps noirs.
On en déduit alors la température T_i,

$$T_i = \frac{L}{\kappa}\left[h(T_s - T_{air}) + \sigma\left(T_s^4 - T_{air}^4\right)\right] + T_s \tag{78}$$

<u>Application numérique :</u>

$$\begin{aligned} T_i = &\frac{0.05[m]}{2.4[W/m/K]} \times (65[W/m/m/K] \times (268.15[K] - 278.15[K]) \\ &-5.670 \times 10^{-8} \times (278.15^4 - 268.15^4))\Big) + 268.15[K] = 253.64[K] \quad (-19.51°C) \end{aligned} \tag{79}$$

c) **Méthode 1**
Pour résoudre cette question, nous allons considérer l'équation de l'évolution de la température $T(x)$, c'est-à-dire

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(\kappa\frac{\partial}{\partial x}T\right) = S_T. \tag{80}$$

Dans la couche de glace, il n'y a pas de source de chaleur ($S_T = 0$). Avec les conditions au bord telles que $T(x = L) = T_i$ et $T(x = 0) = T_s$, on obtient le profile de température, $T(x)$, qui s'établit dans la couche de glace,

$$T(x) = (T_i - T_s)\frac{x}{L} + T_s = \left(1 - \frac{x}{L}\right)T_s + T_i\frac{x}{L}, \tag{81}$$

pour $x \in [L, 0]$. La température T_c au centre de la couche, c'est-à-dire en $x = x_c = L/2$, est donc donnée en évaluant 81 en x_c. On obtient que

$$T_c = T(x_c) = \frac{1}{2}\left(T_s + T_i\right). \tag{82}$$

Méthode 2
On peut aussi résoudre ce problème en considérant la continuité des flux au milieu de la couche de glace

$$\frac{\kappa_g}{L}\left(T_i - T_c\right) = \frac{\kappa_g}{L}\left(T_c - T_s\right). \tag{83}$$

On peut résoudre cette équation pour T_c pour trouver

$$T_c = \frac{1}{2}(T_s + T_i). \tag{84}$$

d) La chaleur nécessaire au refroidissement de la couche de glace durant un temps δt est donnée par

$$Q = Aq_T \delta t \tag{85}$$

avec q_T donné par 70. Etant donné $\eta = 0.8$ et le coefficient de performance CP, la quantité d'énergie consommée par le moteur électrique s'exprime comme

$$W = \frac{Q}{CP}\frac{1}{\eta} = \frac{Aq_T\delta t}{CP\eta}. \tag{86}$$

Le prix total du refroidissement de la piste de la glace chaque jour est

$$P = \frac{W_{tot}}{CP}\frac{1}{\eta}\frac{1}{3.6\times 10^6} \times 0.3 \tag{87}$$

avec

$$W_{tot} = Aq_T\delta t_j \tag{88}$$

<u>Application numérique :</u>

$$W_{tot} = 400[m^2] \times 650[W/m^2] \times 86400[s] \simeq 2.2464 \times 10^{10}[J] \tag{89}$$

$$P = \frac{400[m^2] \times 650[W/m^2] \times 86400[s]}{5}\frac{1}{0.8}\frac{1}{3.6\times 10^6[J]} \times 0.3[CHF] = 468[CHF] \tag{90}$$

e) On résout l'équation de la chaleur

$$-\kappa_0 \frac{\partial}{\partial x}\left(e^{-x/L}\frac{\partial}{\partial x}T\right) = 0. \tag{91}$$

avec les conditions $T(x=0) = T_s$ et

$$-\kappa_0 \frac{\partial}{\partial x}T(x=0) = \frac{P_s}{A}, \tag{92}$$

pour $P_s = 780$ kW. On intègre 93 une première fois par rapport à x

$$\frac{\partial}{\partial x}T = Ce^{+x/L}. \tag{93}$$

On impose la condition 92 pour trouver la constante d'intégration C, telle que

$$C = -\frac{LP_s}{\kappa_0 A}. \tag{94}$$

En intégrant une seconde fois par rapport à x, on trouve

$$T(x) = -\frac{LP_s}{\kappa_0 A} e^{+x/L} + D. \tag{95}$$

Avec la condition au bord $T(x=0) = T_s$, on dérive que le profil de température dans la glace synthétique est donné par

$$T(x) = \frac{LP_s}{\kappa_0 A} \left(1 - e^{+x/L}\right) + T_s. \tag{96}$$

Finalement, la température à la surface inférieure est donnée par $T(x = L) = T_i$

$$T_i = \frac{LP_s}{\kappa_0 A} (1 - e) + T_s. \tag{97}$$

Application numérique :

$$T_i = \frac{0.05[m] \times (300 \times 10^3)[W]}{2.4[W/m/K]400[m^2]} (1 - e) + 268[K] \simeq 241.3[K] \quad (-31.85°C). \tag{98}$$