Physique générale II

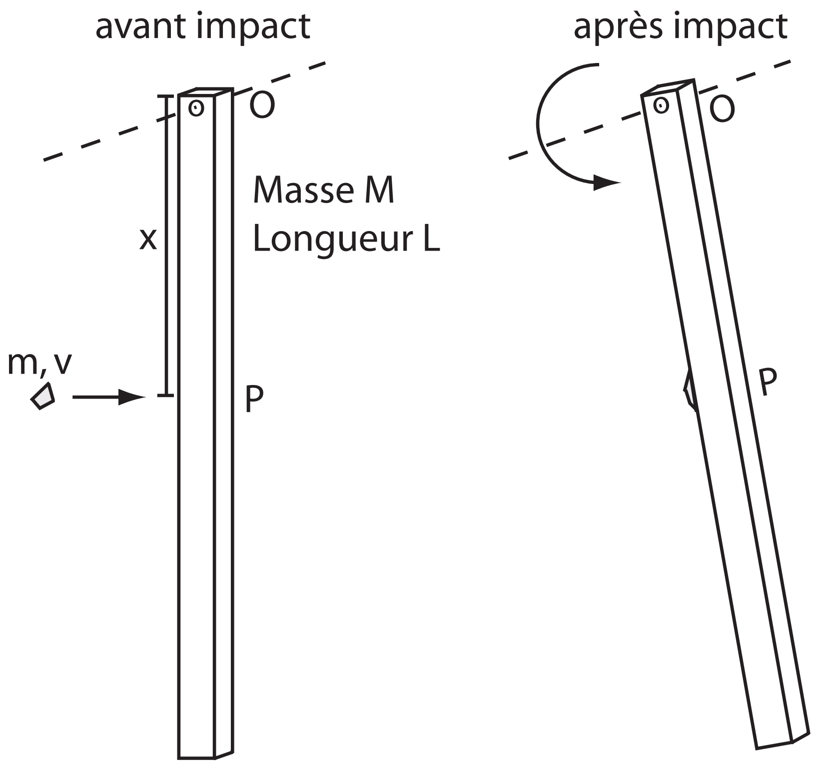
Corrigé de l'examen du 07 juillet 2010

Mis à jour le 14 juin 2012

Prof. A. FASOLI
Auteur : Loïc CURCHOD, loic.curchod@epfl.ch

Centre de Recherches en Physique des Plasmas
École Polytechnique Fédérale de Lausanne

Exercice 1



a) Le schéma du problème est donné dans la figure dessus. On aurait aussi pu comprendre la donnée de sorte que le bâton est initialement orienté vers le haut. Ceci ne change rien pour les parties b) et c), mais donne une solution différente pour les points d) et e).

b) Comme la collision est inélastique, l'énergie cinétique n'est pas conservée pendant le choc. De plus, la quantité de mouvement du système bâton-projectile n'est pas conservée non plus étant donné que l'axe de rotation exerce une force extérieure sur le système via le bâton. Par contre, le moment cinétique L_O par rapport au point de rotation O est conservé.

Avant le choc, seul le projectile a un moment cinétique non-nul. Par rapport au point O, il est donné par

$$L_{\mathrm{p},O} = xmv \tag{1}$$

Juste après le choc, le moment cinétique du bâton avec le projectile est donné par

$$L_{\mathrm{bp},O} = I_{\mathrm{bp},O}\omega \tag{2}$$

Ici, $I_{\mathrm{bp},O}$ est le moment d'inertie du bâton avec le projectile, par rapport au point O. On sait que $I_{\mathrm{bp},O} = I_{\mathrm{b},O} + I_{\mathrm{p},O}$, la somme du moment d'inertie du bâton et du moment d'inertie du projectile. L'indication donne $I_{\mathrm{b},O} = ML^2/3$. Le projectile peut être considéré comme un point de masse. Donc, $I_{\mathrm{b},O} = mx^2$. La conservation du moment cinétique donne alors :

$$L_{\mathrm{p},O} = L_{\mathrm{bp},O} \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{xmv}{\frac{ML^2}{3} + mx^2} \tag{3}$$

On cherche $x_0 \in [0, L]$ tel que ω est maximale. Pour $x = 0$, on a $\omega = 0$. Donc, ω est maximale soit à un point où $\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}x} = 0$, soit pour $x = L$. Avec l'expression (3), la condition $\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}x} = 0$ devient

$$\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}x} = \frac{mv\left(\frac{ML^2}{3} + mx^2\right) - xmv2xm}{\left(\frac{ML^2}{3} + mx^2\right)^2} = 0 \tag{4}$$

Avec $m = M/2$, on trouve que $\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}x} = 0$ pour $x = \sqrt{2/3}L$. On reste donc avec deux candidats pour x_0 : soit $x_0 = \sqrt{2/3}L$, soit $x_0 = L$. Une possibilité de trouver le bon x_0 est d'introduire les deux expressions dans l'expression (3) de ω pour tester lequel donne la valeur maximale de ω. Mais il y a un argument plus direct : Comme $\omega = 0$ pour $x = 0$ et pour $x \to \infty$, et comme $\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}x} = 0$ seulement pour $x = \sqrt{2/3}L$, on sait qu'on a trouvé le maximum. Donc,

$$x_0 = \sqrt{2/3}L = 1.22 \text{ m}. \tag{5}$$

c) Introduisant $x_0 = \sqrt{2/3}L$ dans l'expression (3), on trouve que

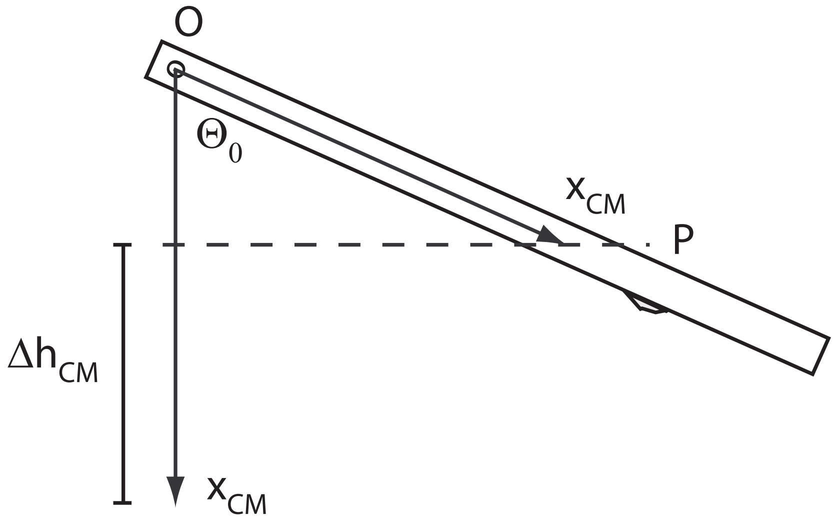
$$\omega_{\max} = \frac{\sqrt{\frac{2}{3}}L\frac{M}{2}v}{\frac{ML^2}{3} + \frac{M}{2}\frac{2}{3}L^2} = \frac{v}{2\sqrt{\frac{2}{3}}L} \simeq 3.27\,\mathrm{rad\ s^{-1}}. \tag{6}$$

d) Après l'impact, l'énergie mécanique du système est conservée. Juste après l'impact du projectile, l'énergie cinétique du système est donnée par

$$E_{\mathrm{cin}} = \frac{1}{2} I_{\mathrm{bp},O}\omega_{\max}^2 \tag{7}$$

Quand le bâton a atteint l'angle de déviation maximal Θ_0, cette énergie cinétique s'est transformée en énergie potentielle

$$E_{\mathrm{pot}} = (M + m)g\Delta h_{\mathrm{CM}} \tag{8}$$



Ici Δh_{CM} est le changement de hauteur du centre de masse du bâton (avec le projectile) entre sa position verticale d'origine et Θ_0. On trouve

$$E_{\mathrm{cin}} = E_{\mathrm{pot}} \quad \Rightarrow \quad \Delta h_{\mathrm{CM}} = \frac{\frac{1}{2} I_{\mathrm{bp},O} \omega_{\max}^2}{\frac{3}{2} M g} = 0.54\,\mathrm{m} \tag{9}$$

avec $I_{\mathrm{bp},O} = \frac{M}{2} x_0^2 + \frac{ML^2}{3} = 0.375\,\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2$. La distance du centre de masse par rapport au point O est donnée par

$$x_{\mathrm{CM}} = \frac{x_0 \frac{M}{2} + \frac{L}{2} M}{\frac{M}{2} + M} = 0.91 \text{ m} \tag{10}$$

La relation entre Θ_0, Δh_{CM} et x_{CM} est donnée par (voir la figure ci-dessus)

$$\cos(\Theta_0) = \frac{x_{\mathrm{CM}} - \Delta h_{\mathrm{CM}}}{x_{\mathrm{CM}}} \tag{11}$$

et Θ_0 est donc donné par

$$\Theta_0 = \mathrm{acos}\left(\frac{x_{\mathrm{CM}} - \Delta h_{\mathrm{CM}}}{x_{\mathrm{CM}}} \right) = 66.3^\circ \tag{12}$$

Si l'on comprend la donnée de sorte que le bâton est initialement orienté vers le haut, le système bâton plus projectile fait des tours complets autour de l'axe de rotation et Θ_0 vaut 2π (ou l'infini).

e) Le bâton (avec projectile) est un pendule physique qui fait des oscillations (non-amorties) autour de sa position d'équilibre $\theta = 0$ où θ est l'angle entre le bâton et la verticale. Comme Θ_0 n'est pas petit, ces oscillations ne sont pas harmoniques. Dans le cas où l'on a supposé que le bâton est initialement orienté vers le haut, le bâton fait des tours entiers avec une vitesse angulaire variable.

Exercice 2

Dans cet exercice, on définit trois référentiels : le référentiel $\mathcal{R}$ du désert (dans lequel les lampes sont au repos), le référentiel $\mathcal{R}'$ du cycliste qui circule à une vitesse v dans le même sens que la propagation des flashs lumineux, et le référentiel $\mathcal{R}''$ le référentiel du cycliste qui roule à une vitesse $-v$ par rapport à $\mathcal{R}$.

a) On doit déterminer le temps τ' et la distance $\Delta x'$ qui séparent les flashs dans le référentiel $\mathcal{R}'$ du cycliste. On s'intéresse donc à deux évènements : évènement 1 = la lampe 1 s'allume ; évènement 2 = la lampe voisine s'allume. Dans le référentiel $\mathcal{R}$ du désert, on choisit les origines de l'axe x et du temps t telles que ces évènements ont les coordonnées

$$(x_1, t_1) = (0\,\mathrm{m}, 0\,\mathrm{s}) \tag{13}$$

$$(x_2, t_2) = (d, \tau) \tag{14}$$

On a donc :

$$\Delta x = x_2 - x_1 = d = 10\,\mathrm{m} \quad \text{et} \quad \Delta t = t_2 - t_1 = \tau = 5\,\mathrm{ns} \tag{15}$$

On utilise ensuite les transformations de Lorentz qui lient les coordonnées d'espace et de temps entre un référentiel $\mathcal{R}$ et un référentiel $\mathcal{R}'$ en translation par rapport à $\mathcal{R}$ avec une vitesse v dans la direction positive des x (ce qui correspond tout à fait à la situation que l'on traite ici) :

$$x = \gamma\,(x' + vt') \tag{16}$$

$$y = y' \tag{17}$$

$$z = z' \tag{18}$$

$$t = \gamma\left(t' + \frac{vx'}{c^2}\right) \tag{19}$$

où le coefficient relativiste s'écrit :

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = 1.25 \tag{20}$$

On inverse cette relation pour obtenir les coordonnées dans $\mathcal{R}'$ en fonction des coordonnées dans $\mathcal{R}$:

$$x' = \gamma\,(x - vt) \tag{21}$$

$$t' = \gamma\left(t - \frac{vx}{c^2}\right) \tag{22}$$

Pour les évènements qui nous intéressent (flash 1 suivi de flash 2), on obtient alors

$$d' = \Delta x' = \gamma\,(\Delta x - v\Delta t) = 11.375\,\mathrm{m} \tag{23}$$

$$\tau' = \Delta t' = \gamma\left(\Delta t - \frac{v\Delta x}{c^2}\right) = -18.75\,\mathrm{ns} \tag{24}$$

Donc, dans le référentiel du cycliste, les évènements « flashs successifs » sont séparés par une distance plus grande que dans le référentiel du désert. Ces évènements sont séparés

par un intervalle de temps $\tau' = \Delta t' < 0$, ce qui indique que les évènements ont lieu dans un ordre inverse dans le référentiel $\mathcal{R}'$ du cycliste (ce qui est tout à fait permis étant donné qu'aucun lien de cause à effet ne lie les flashs successifs).
Les lampes étant au repos dans le référentiel du désert, la distance d qui les sépare est une longueur propre. La longueur propre d' qui sépare les lampes dans le référentiel $\mathcal{R}'$ du cycliste (à ne pas confondre avec la distance entre les flashs qui sont des évènements) vaut donc :

$$d' = \frac{d}{\gamma} = 8\,\mathrm{m} \tag{25}$$

On peut aussi trouver ce résultat à partir des transformations de Lorentz en considérant que pour mesurer la distance entre les lampes dans le référentiel du cycliste, le cycliste doit trouver une règle (ou tout autre objet) de longueur d' telle que ses extrémités s'alignent avec deux lampes voisines simultanément. En d'autres termes, les évènements « l'extrémité a de la règle s'aligne avec une lampe » et « l'extrémité b de la règle s'aligne avec une lampe voisine » sont séparé par $\Delta x = d'$ et $\Delta t' = 0\,\mathrm{s}$ dans le référentiel $\mathcal{R}'$. On sait que ces évènements sont séparés par une distance $\Delta x = d$ dans le référentiel $\mathcal{R}$ du désert. (Par contre, ils ne sont pas simultanés dans $\mathcal{R}$.) Avec la première transformation de Lorentz, on obtient

$$\Delta x = \gamma\left(\Delta x' + v\Delta t'\right) \quad \Rightarrow \quad d' = \Delta x' = \frac{\Delta x}{\gamma} = \frac{d}{\gamma} = 8\,\mathrm{m} \tag{26}$$

b) Dans ce cas, la vitesse relative du référentiel $\mathcal{R}''$ par rapport à $\mathcal{R}$ vaut $-v$, ce qui ne change pas la valeur de γ : $\gamma(-v) = \gamma(v)$. La distance d'' entre les lampes dans le $\mathcal{R}''$ est donc égale à d' dans $\mathcal{R}'$:

$$d'' = \frac{d}{\gamma} = d' = 8\,\mathrm{m} \tag{27}$$

Que le cycliste voyage dans une direction ou une autre, il observe un contraction des longueurs. Quant à la distance et au temps qui séparent les flashs, leur expression est similaire à celle du point a), mais avec une vitesse relative opposée :

$$d' = \Delta x' = \gamma\left(\Delta x + v\Delta t\right) = 13.625\,\mathrm{m} \tag{28}$$

$$\tau' = \Delta t' = \gamma\left(\Delta t + \frac{v\Delta x}{c^2}\right) = 31.25\,\mathrm{ns} \tag{29}$$

c) Pour que les flashs soient simultanés dans le référentiel $\mathcal{R}'$, il faut que $\tau' = \Delta t' = 0$:

$$0 = \Delta t' = \gamma\left(\Delta t - \frac{v\Delta x}{c^2}\right) = \gamma\left(\tau - \frac{vd}{c^2}\right) \quad \Rightarrow \quad \tau = \frac{vd}{c^2} \tag{30}$$

d) Pour que le cycliste voie les flashs, il faut que la lumière soit émise puis qu'elle se propage jusqu'à ses yeux. En considérant que le cycliste est aligné avec une lampe quand celle-ci émet (évènement 1 : $(X'_1, T'_1) = (0\,\mathrm{m}, 0\,\mathrm{ns})$), la lampe suivante à une distance d' de la première « émettra » son flash (évènement 2) au temps $T'_2 = \tau' = -18.75\,\mathrm{ns}$ « après » la première lampe (i.e. avant la première lampe). Pendant cet intervalle de temps, les lampes se sont déplacées par rapport au cycliste d'une distance $D' = -v\tau' = 3.375\,\mathrm{m}$. L'évènement 2 a donc lieu à la position $X'_2 = d' + D' = 14.75\,\mathrm{m}$. Finalement, la lumière de la deuxième lampe atteint l'oeil du cycliste (évènement 3) au point $X_3' = 0\,\mathrm{m}$, toujours à l'origine du référentiel. La lumière émise par la deuxième lampe doit donc parcourir une distance $\Delta X_{2,3}' = X_3' - X_2'$ à une vitesse $-c$ pour atteindre l'oeil du cycliste après un temps $\Delta T_{3,2}' = \frac{\Delta X_{2,3}'}{-c} \simeq 49.2\,\mathrm{ns}$. Finalement, le cycliste voit les flashs avec un intervalle de temps :

$$\Delta T_{1,3}' = \Delta T_{1,2}' + \Delta T_{2,3}' = -18.75\,\mathrm{ns} + 49.2\,\mathrm{ns} \simeq 30.4\,\mathrm{ns} \tag{31}$$

Exercice 3

a) Il s'agit d'un cycle moteur. En effet, le cycle est parcouru dans le sens horaire, de sorte que le travail fournit par le gaz lors des transformations AB et BC (représenté par la surface sous les courbes AB et BC) est plus élevé que le travail reçu par le gaz lors des transformations CD et DA.

b) On calcule la pression, la température et le volume du gaz aux états A, B, C et D :

- Etat A. La pression et le volume sont donnés :

$$p_A = 12\,\mathrm{atm} = 1215600\,\mathrm{Pa} \quad \text{et} \quad V_A = 3\,\mathrm{L} = 3 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}^3 \tag{32}$$

  La température en A est calculée grâce à la loi des gaz parfaits :

$$p_A V_A = nRT_A \quad \Rightarrow \quad T_A = \frac{p_A V_A}{nR} = 548.3\,\mathrm{K} \tag{33}$$

  où $n = 0.8\,\mathrm{mol}$ et R est la constante des gaz parfaits.

- Etat B. Le volume est donné :

$$V_B = 12\,\mathrm{L} = 12 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}^3 \tag{34}$$

  La transformation AB étant isotherme, la température en B est égale à la température en A :

$$T_B = T_A = 548.3\,\mathrm{K} \tag{35}$$

  On utilise ensuite la loi des gaz parfaits pour déterminer la pression à l'état B :

$$p_B V_B = nRT_B \quad \Rightarrow \quad p_B = \frac{nRT_B}{V_B} = 303900\,\mathrm{Pa} = 3\,\mathrm{atm} \tag{36}$$

- Etat C. La pression est donnée :

$$p_C = 1\,\mathrm{atm} \simeq 101300\,\mathrm{Pa} \tag{37}$$

  La transformation BC étant adiabatique, les pressions et volumes en B et C sont liés par :

$$p_B V_B^\gamma = p_C V_C^\gamma \tag{38}$$

  où γ est la constante adiabatique. Le gaz étant mono-atomique, ses molécules n'ont que $\nu = 3$ degrés de liberté, i.e. les degrés de liberté liés à la translation. La constante adiabatique vaut donc :

$$\gamma = \frac{\nu + 2}{\nu} = \frac{5}{3} \tag{39}$$

On obtient alors le volume à l'état C :

$$V_C = V_B \left(\frac{p_B}{p_C}\right)^{1/\gamma} \simeq 23.2\,\mathrm{L} = 23.2 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}^3 \tag{40}$$

On détermine ensuite la température en C avec la loi des gaz parfaits :

$$p_C V_C = nRT_C \quad \Rightarrow \quad T_C = \frac{p_C V_C}{nR} \simeq 353.3\,\mathrm{K} \tag{41}$$

- Etat D. La transformation CD étant isobare, les pressions en C et D sont identiques :

$$p_D = p_C = 1\,\mathrm{atm} \simeq 101300\,\mathrm{Pa} \tag{42}$$

La transformation DA étant adiabatique, les pressions et volumes en D et A sont liés par :

$$p_D V_D^\gamma = p_A V_A^\gamma \quad \Rightarrow \quad V_D = V_A \left(\frac{p_A}{p_D}\right)^{1/\gamma} \simeq 13.3\,\mathrm{L} = 13.3 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}^3 \tag{43}$$

Finalement, on détermine la température à l'état D grâce à la loi des gaz parfaits :

$$p_D V_D = nRT_D \quad \Rightarrow \quad T_D = \frac{p_D V_D}{nR} \simeq 202.9\,\mathrm{K} \tag{44}$$

c) Le rendement d'un moteur est le rapport du travail net fournit par le système lors du cycle (i.e. la somme de tous les travaux effectués et reçus), sur la chaleur totale reçue par le système lors du cycle (i.e. la somme des chaleurs Q positives) :

$$\eta = \left|\frac{W_{\text{net}}}{Q_{\text{reçue}}}\right| \tag{45}$$

On doit donc déterminer les chaleurs et travaux échangés lors de chaque transformation du cycle.

- Transformation AB. Le travail effectué par le système est donné :

$$W_{AB} = 4000\,\mathrm{J} \tag{46}$$

La transformation AB étant isotherme, la variation d'énergie interne du gaz est nulle :

$$\Delta U_{AB} = nc_V \underbrace{\Delta T_{AB}}_{=0} = 0 \tag{47}$$

On obtient alors la chaleur reçue par le gaz en utilisant le premier principe de la thermodynamique :

$$\Delta U_{AB} = Q_{AB} - W_{AB} \quad \Rightarrow \quad Q_{AB} = W_{AB} = 4000\,\mathrm{J} \tag{48}$$

Le signe de Q_{AB} étant positif, cette chaleur est effectivement reçue par le gaz.

- Transformation BC. La transformation étant adiabatique, le gaz ne reçoit ni ne cède aucune chaleur :
$$Q_{BC} = 0 \tag{49}$$
On peut ensuite calculer le travail effectué par le gaz grâce au premier principe :
$$\Delta U_{BC} = Q_{BC} - W_{BC} \quad \Rightarrow \quad W_{BC} = -\Delta U_{BC} = -nc_V \Delta T_{BC} \simeq 1945\,\mathrm{J} \tag{50}$$
On pourrait aussi intégrer le travail le long de BC grâce à la relation $pV^\gamma = \text{constante}$:
$$pV^\gamma = \text{constante} \quad \Rightarrow \quad p(V) = p_B V_B^\gamma V^{-\gamma} \tag{51}$$
et on obtient
$$W_{BC} = \int_B^C p(V)\mathrm{d}V = \int_B^C p_B V_B^\gamma V^{-\gamma}\mathrm{d}V = p_B V_B^\gamma \left[\frac{V^{1-\gamma}}{1-\gamma}\right]_B^C \tag{52}$$
$$= p_B V_B^\gamma \frac{V_C^{1-\gamma} - V_B^{1-\gamma}}{1-\gamma} \simeq 1945\,\mathrm{J} \tag{53}$$
- Transformation CD. On calcule le travail effectué par le gaz :
$$W_{CD} = \int_C^D p\mathrm{d}V = p_C\left(V_D - V_C\right) \simeq -1003\,\mathrm{J} \tag{54}$$
où l'on a utilisé le fait que la pression est constante sur CD. Remarquez que le signe négatif de W_{CD} indique que le travail est en fait effectué sur le gaz (pour réduire son volume). Le premier principe donne ensuite la chaleur reçue par le gaz :
$$\Delta U_{CD} = Q_{CD} - W_{CD} \quad \Rightarrow \quad Q_{CD} = nc_V \Delta T_{CD} + W_{CD} \simeq -2504\,\mathrm{J} \tag{55}$$
Le signe négatif de Q_{CD} indique que le gaz en fait cède cette chaleur. Elle ne fait donc pas partie de la somme des chaleurs effectivement reçues par le gaz.
- Transformation DA. La transformation étant adiabatique, le gaz ne reçoit ni ne cède aucune chaleur :
$$Q_{DA} = 0 \tag{56}$$
Le travail effectué par le gaz est obtenu par le premier principe :
$$\Delta U_{DA} = Q_{DA} - W_{DA} \quad \Rightarrow \quad W_{DA} = -\Delta U_{DA} = -nc_V \Delta T_{DA} \simeq -3446\,\mathrm{J} \tag{57}$$
On peut aussi intégrer le travail le long de DA comme pour la transformation BC. Remarquez que le signe négatif du travail indique qu'il est en fait effectué sur le gaz pour le comprimer. Finalement, on calcule le rendement du cycle :
$$W_{\text{net}} = W_{AB} + W_{BC} + W_{CD} + W_{DA} \tag{58}$$
$$Q_{\text{reçue}} = Q_{AB} \tag{59}$$
$$\Rightarrow \quad \eta = \left|\frac{W_{\text{net}}}{Q_{\text{reçue}}}\right| = \left|\frac{W_{AB} + W_{BC} + W_{CD} + W_{DA}}{Q_{AB}}\right| \simeq 0.37 \tag{60}$$

d) La transformation AB étant irréversible, l'échange de chaleur infinitésimal δQ n'est pas défini est **on ne peut pas écrire** :

$$\Delta S_{AB} = \int_A^B \mathrm{d}S \underbrace{=}_{\text{Faux !}} \int_{AB,\text{irrév}} \frac{\delta Q}{T} = \frac{Q_{AB}}{T_A} \tag{61}$$

On doit trouver une transformation réversible équivalent, e.g. qui mène le gaz de l'état A à l'état B. On choisit la transformation isotherme réversible AB. La variation d'énergie interne du gaz est toujours nulle pour cette transformation :

$$\Delta U_{AB,\text{rév}} = nc_V \underbrace{\Delta T_{AB}}_{=0} = 0 \tag{62}$$

Par contre, le travail effectué par le gaz et la chaleur reçue par le gaz dans le cas réversible seront différents du travail et de la chaleur dans le cas irréversible. On calcule le travail en intégrant $p\mathrm{d}V$ sur AB :

$$W_{AB,\text{rév}} = \int_A^B p\mathrm{d}V = \int_A^B \frac{nRT}{V}\mathrm{d}V = nRT_A \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right) \simeq 5056\,\mathrm{J} \tag{63}$$

où l'on a utilisé la loi des gaz parfaits et le fait que la température est constante le long de AB. On utilise ensuite le premier principe pour déterminer la chaleur reçue par le gaz :

$$\Delta U_{AB,\text{rév}} = Q_{AB,\text{rév}} + W_{AB,\text{rév}} \quad \Rightarrow \quad Q_{AB,\text{rév}} = W_{AB,\text{rév}} \simeq 5056\,\mathrm{J} \tag{64}$$

On peut maintenant écrire

$$\Delta S_{AB} = \int_{AB,\text{rév}} \frac{\delta Q}{T} = \frac{Q_{AB,\text{rév}}}{T_A} \simeq 9.22\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}} \tag{65}$$

La variation d'enthalpie libre (énergie libre de Gibbs) s'écrit

$$\Delta G_{AB} = \int_A^B \mathrm{d}G = \int_A^B \left(V\mathrm{d}p - S \underbrace{\mathrm{d}T}_{=0}\right) \tag{66}$$

$$= \int_A^B \frac{nRT}{p}\mathrm{d}p = nRT_A \ln\left(\frac{p_B}{p_A}\right) \simeq -5056\,\mathrm{J} \tag{67}$$

On remarque que la variation d'énergie libre du gaz en passant de l'état A à l'état B correspond au travail réversible $W_{AB,\text{rév}}$ que le système peut fournir.

e) Si la transformation isotherme AB était réversible, on a vu au point précédent que le travail effectué par le système ainsi que la chaleur qu'il reçoit sont différents par rapport au cas réversible. Ces nouvelles valeurs $W_{AB,\text{rév}}$ et $Q_{AB,\text{rév}}$ entrent dans le calcul du rendement pour donner :

$$\eta_{\text{rév}} = \left|\frac{W_{\text{net,rév}}}{Q_{\text{reçue,rév}}}\right| = \left|\frac{W_{AB,\text{rév}} + W_{BC} + W_{CD} + W_{DA}}{Q_{AB,\text{rév}}}\right| \simeq 0.50 > \eta_{\text{irrév}} \tag{68}$$

On constate qu'un machine thermique opérant sur un cycle réversible est plus efficace qu'une machine thermique opérant sur un cycle irréversible.

Exercice 4

a) On calcule le nombre de glaçons qu'il faut ajouter au bain pour que le mélange atteigne 38°C en faisant le bilan d'énergie thermique du bain que l'on considère comme un système isolé. Toute l'énergie thermique ôtée de l'eau du bain est utilisée pour augmenter la température du bloc d'aluminium et des glaçons (qui fondent à 0°C) :

$$0 = Q_{\text{eau}} + Q_{\text{alu}} + Q_{\text{glaçons}} \tag{69}$$

$$\Rightarrow \quad 0 = m_{\text{e}}c_{\text{e}}(T_{\text{f}} - T_{\text{i}}) + m_{\text{a}}c_{\text{a}}(T_{\text{f}} - T_{\text{froid}}) + m_{\text{g}}c_g(0\,°\text{C} - T_{\text{fr}}) + m_{\text{g}}L + m_{\text{g}}c_{\text{e}}(T_{\text{f}} - 0\,°\text{C}) \tag{70}$$

$$\Rightarrow \quad m_{\text{g}} = \frac{m_{\text{e}}c_{\text{e}}(38°\text{C} - 45°\text{C}) + m_{\text{a}}c_{\text{a}}(38°\text{C} - (-25°\text{C}))}{-c_{\text{g}} \cdot 25 - c_{\text{e}} \cdot 38 - L} \simeq 4429.6\,\text{g} \tag{71}$$

c'est-à-dire 89 glaçons. Le bain de M. Fogg coûtera donc 89 CHF.

b) La variation d'entropie de l'eau du bain (sans compter l'eau de fonte des glaçons) vaut

$$\Delta S_{\text{eau}} = \int_{\text{i}}^{\text{f}} \frac{\delta Q}{T} = \int_{\text{i}}^{\text{f}} \frac{m_{\text{eau}}c_{\text{eau}}\text{d}T}{T} = m_{\text{eau}}c_{\text{eau}} \ln\left(\frac{T_{\text{f}}}{T_{\text{i}}}\right) \simeq -9309\,\text{J/K} \tag{72}$$

avec $T_{\text{i}} = 318.15\,\text{K}$ et $T_{\text{f}} = 311.15\,\text{K}$. L'entropie de l'eau du bain diminue donc. Quant à la variation d'entropie de l'univers, elle est la somme des variations d'entropie de l'eau du bain, du bloc d'aluminium et des glaçons.

$$\Delta S_{\text{alu}} = \int_{\text{i}}^{\text{f}} \frac{\delta Q}{T} = \int_{\text{i}}^{\text{f}} \frac{m_{\text{alu}}c_{\text{alu}}\text{d}T}{T} = m_{\text{alu}}c_{\text{alu}} \ln\left(\frac{T_{\text{f}}}{T_{\text{i}}}\right) \simeq 1018\,\text{J/K} \tag{73}$$

avec $T_{\text{i}} = 248.15\,\text{K}$ et $T_{\text{f}} = 311.15\,\text{K}$.

$$\Delta S_{\text{glace}} = \int_{T_{\text{i}}}^{273.15\,\text{K}} \frac{\delta Q}{T} + \int_{\text{fonte}} \frac{\delta Q}{T} + \int_{273.15\,\text{K}}^{T_{\text{f}}} \frac{\delta Q}{T} \tag{74}$$

$$= \int_{T_{\text{i}}}^{273.15\,\text{K}} \frac{m_{\text{eau}}c_{\text{eau}}\text{d}T}{T} + \frac{1}{237.15\,\text{K}} \int_{\text{fonte}} \delta Q + \int_{273.15\,\text{K}}^{T_{\text{f}}} \frac{m_{\text{eau}}c_{\text{eau}}\text{d}T}{T} \tag{75}$$

$$= m_{\text{eau}}c_{\text{eau}} \ln\left(\frac{273.15\,\text{K}}{248.15\,\text{K}}\right) + \frac{m_{\text{eau}}L}{273.15\,\text{K}} + m_{\text{eau}}c_{\text{eau}} \ln\left(\frac{311.15\,\text{K}}{273.15\,\text{K}}\right) \tag{76}$$

$$\simeq 9603\,\text{J/K} \tag{77}$$

où nous avons utilisé le fait que la fonte de la glace se déroule à température $T = 0°\text{C} = 273.15\,\text{K}$ constante. La variation d'entropie de l'univers vaut donc :

$$\Delta S_{\text{univers}} = \Delta S_{\text{eau}} + \Delta S_{\text{alu}} + \Delta S_{\text{glace}} \simeq 1312\,\text{J/K} \tag{78}$$

qui est belle est bien positive pour ce processus irréversible.

c) S'il on admet que le bain met $t = 1\,\text{min}$ pour atteindre sa température finale, une émissivité $e = 1$ de l'eau du bain et une température de l'air extérieur $T_{\text{air}} = 25°\text{C} = 298.15\,\text{K}$, l'énergie perdue par radiation vaut

$$E_{\text{rad}} = t \cdot P_{\text{rad}} = t \cdot \sigma e A \left(\bar{T}^4 - T_{\text{air}}^4\right) \tag{79}$$

$$= 1\,\text{min} \cdot 60\,\frac{\text{s}}{\text{min}} \cdot 5.6703 \cdot 10^{-8}\,\frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}^4} \cdot 1 \cdot 2\,\text{m}^2 \cdot \left(314.65^4 - 298.15^4\right) = \tag{80}$$

$$= 12927\,\text{J} \tag{81}$$

où $\bar{T}$ est la température moyenne de l'eau entre 45°C et 38°C ($\bar{T} = 41.5°\text{C} = 314.65\text{K}$). Cette énergie est d'un ordre de grandeur plus petite que l'énergie échangée entre l'eau du bain et l'aluminium :

$$Q_{\text{alu}} = m_{\text{alu}} c_{\text{alu}} \Delta T_{\text{alu}} = 283500\,\text{J} \tag{82}$$

Exercice 5

a) Pour un conducteur de section A, l'équation de transfert de la chaleur s'écrit :

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = -kA\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x} \tag{83}$$

Dans le cas du cône, la principale difficulté est donc d'évaluer la section A pour une certaine cote x. Notons $R(x)$ le rayon du cône à x donné. La surface de la section à x vaut donc :

$$A(x) = \pi R(x)^2 \tag{84}$$

Or, on a

$$R(x) = 20 \cdot 10^{-2} + (40 - 20) \cdot 10^{-2} x \tag{85}$$

$$\Rightarrow R(x) = 20 \cdot 10^{-2}(1 + x) \tag{86}$$

Donc

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = -k\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}\pi\left(20 \cdot 10^{-2}(1+x)\right)^2 \tag{87}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = -k\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}4\pi \cdot 10^{-2}(1+x)^2 \tag{88}$$

b) $\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}$ représente le transfert de chaleur par unité de temps. Cette grandeur est indépendant de la position x le long de l'axe du cône. A l'aide de l'équation précédente, on obtient donc :

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}x}{(1+x)^2} = -k4\pi \cdot 10^{-2}\mathrm{d}T \tag{89}$$

$$\Rightarrow \quad \int_{x=0}^{x=L} \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}x}{(1+x)^2} = -k4\pi \cdot 10^{-2}\int_{x=0}^{x=L} \mathrm{d}T \tag{90}$$

Et comme $\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}$ ne dépend pas de x :

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}\int_{x=0}^{x=L}\frac{\mathrm{d}x}{(1+x)^2} = -k4\pi\cdot 10^{-2}\int_{x=0}^{x=L}\mathrm{d}T \tag{91}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}\left[\frac{-1}{1+x}\right]_{x=0}^{x=L} = -k4\pi\cdot 10^{-2}[T]_{x=0}^{x=L} \tag{92}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}\left[\frac{-1}{2}-\frac{-1}{1}\right] = -k4\pi\cdot 10^{-2}\underbrace{[T_2-T_1]}_{=-50\,\mathrm{K}} \tag{93}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = k4\pi \tag{94}$$

c) On a désormais la valeur de $\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}$ que l'on peut remplacer dans l'équation obtenue au point a) pour trouver l'expression de $\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}$. On obtient :

$$k4\pi = -k\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}4\pi\cdot 10^{-2}(1+x)^2 \tag{95}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x} = \frac{-10^2}{(1+x)^2} \tag{96}$$

Donc, en intégrant entre $x=0$ et $x=x'$ quelconque compris entre 0 et L, on obtient la température $T(x')$ en fonction de la coordonnée le long de l'axe longitudinale du cône :

$$T(x')-T_1 = \frac{10^2}{1+x'} - 10^2 \tag{97}$$

$$\Rightarrow \quad T(x') = T_1 - \frac{10^2x'}{1+x'} = 80°\mathrm{C} - \frac{10^2x'}{1+x'} \tag{98}$$

On peut bien sûr remplacer la variable x' par x.

d) Il s'agit d'une simple application numérique du résultat obtenu au point c). Avec $x' = 0.5\,\mathrm{m}$, on obtient

$$T \simeq 46.7°\mathrm{C} \tag{99}$$