Physique générale II

Corrigé de l'examen du 20 juin 2014

Mis à jour le 9 juillet 2014

Prof. A. FASOLI
Auteurs : M. Lai, F. Braunmueller, V. Rackayová, S. Sonnay, B. Le
Révision : A. Bovet & B. Labit

Centre de Recherches en Physique des Plasmas
Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne

Exercice 1

a) Si dans une oscillation complète la masse m retourne à sa place originale, il faut une demi-oscillation pour atteindre la position la plus proche de la paroi. Donc :

$$\frac{T_0}{2} = \pi\sqrt{\frac{m}{k}} = \pi\sqrt{\frac{10kg}{400\frac{N}{m}}} = 0.49s$$

b) La plaque part avec une vitesse nulle de la position initiale x_i, en étant accélérée par le ressort. Ensuite elle croise la position d'équilibre x_0, origine de notre référentiel, avec une accélération nulle et une vitesse maximale pour être ensuite décélérée et atteindre encore une vitesse nulle dans la position la plus proche à la paroi. Nous pouvons évaluer l'énergie totale dans ces deux positions (vitesse nulle = [1] ; vitesse maximale et accélération nulle, soit position d'équilibre = [2]) :

$$E_{[1]} = \frac{1}{2}k(x_i - x_0)^2 = E_{[2]} = \frac{1}{2}mv_{max}^2$$

d'où :

$$v_{\max} = \sqrt{\frac{k}{m}}(x_i - x_0) = \sqrt{\frac{400\,\mathrm{N.m^{-1}}}{10\,\mathrm{kg}}}0.2\ \mathrm{m} = 1.26\ \mathrm{m.s^{-1}}$$

c) Nous allons dériver l'équation du mouvement en partant de l'énergie totale du système, donnée par la somme de l'énergie cinétique, de l'énergie de rotation de la roue et de l'énergie potentielle du ressort dans une position x quelconque :

$$E = \frac{1}{2}mv_x^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}k(x-x_0)^2 = \frac{1}{2}mv_x^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}m'R^2\right)\omega^2 + \frac{1}{2}k(x-x_0)^2$$

avec $I = \frac{1}{2}m'R^2$. En exploitant la conservation de l'énergie du système ($\frac{dE}{dt} = 0$) nous obtenons :

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv_x^2 + \frac{1}{4}m'R^2\omega^2 + \frac{1}{2}k(x-x_0)^2\right) = 0$$

$$\frac{1}{2}\left(m\frac{d}{dt}v_x^2 + \frac{1}{2}m'R^2\frac{d}{dt}\omega^2 + k\frac{d}{dt}(x-x_0)^2\right) = 0$$

$$m2v_x\frac{dv_x}{dt} + m'R^2\omega\frac{d\omega}{dt} + k2x\frac{d(x-x_0)}{dt} = 0$$

Pour la condition de roulement sans glissement : $\omega R = v_x$ et $\frac{d\omega}{dt}R = \alpha R = a_x = \frac{dv_x}{dt}$. Donc :

$$v_x\left(m\frac{dv_x}{dt} + \frac{1}{2}m'\frac{dv_x}{dt} + kx\right) = 0$$

donc nous dérivons l'équation d'un oscillateur simple avec masse $m + \frac{1}{2}m'$ (oscillateur horizontal avec ressort) :

$$\left(m + \frac{1}{2}m'\right)\frac{dv_x}{dt} + kx = 0 \Longrightarrow \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m + \frac{1}{2}m'}x$$

d) En ayant démontré que le mouvement de la plaque dans la deuxième situation est assimilable à un oscillateur simple de masse $m + \frac{1}{2}m'$ nous aurons une période d'oscillation :

$$T' = 2\pi\sqrt{\frac{m + \frac{1}{2}m'}{k}}$$

La plaque atteint la position d'équilibre pour la première fois après $\frac{T}{4}$ (pendant une oscillation entière elle croise la position d'équilibre deux fois). Nous pouvons donc déterminer le retard comme la difference :

$$\Delta t = \frac{T'}{4} - \frac{T_0}{4} = \frac{\pi}{2}\left(\sqrt{\frac{m + \frac{1}{2}m'}{k}} - \sqrt{\frac{m}{k}}\right) = 0.08s$$

e) Pour maintenir une adhésion entre la plaque de masse m et la roue de masse m' instant par instant l'accélération due à la force de frottement ($F_{fr} = \mu_s N$) doit être égale à la force de rappel du ressort ($F_r^{max} = -k(x_i - x_0)$). Nous pouvons évaluer la valeur minimale pour le coefficient de frottement statique en considérant la force de rappel du ressort dans sa valeur maximale (aux extrêmes de l'élongation, $\pm(x_i - x_0)$) :

$$\mu_s m' g \geq k(x_i - x_0) \Longrightarrow \mu_s \geq \frac{(x_i - x_0)k}{gm'} = 0.54$$

Exercice 2

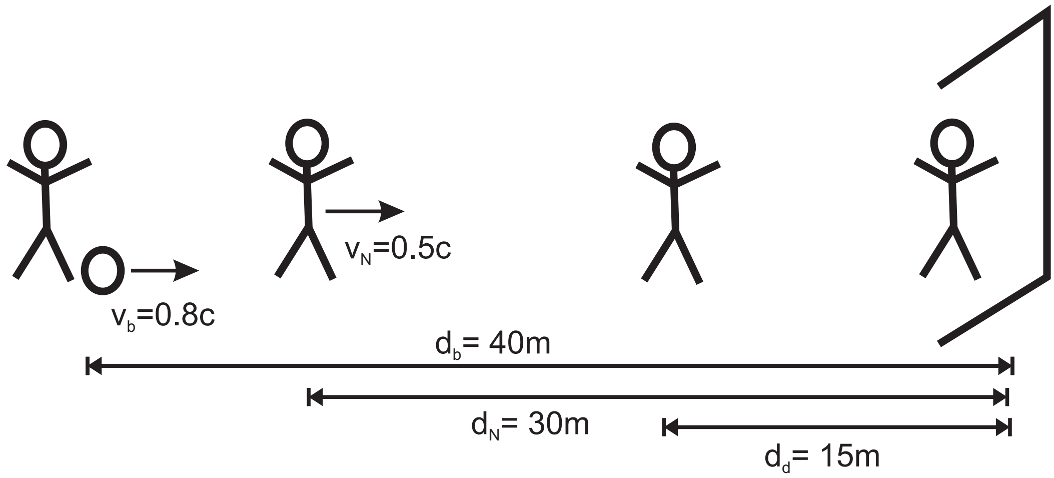

Figure 1 – Schéma de la scène de football.

Il y a trois systèmes référentiels : celui de Buffon (qui est aussi le référentiel du défenseur et de l'arbitre), le référentiel de Neymar et celui du ballon. Il faut noter que pour le processus "passe de Silva vers Neymar", le référentiel du ballon est le référentiel propre, tandis que le référentiel de Neymar est le référentiel propre pour le processus "courir et recevoir le ballon". Par conséquent, la passe de Silva et le début du sprint de Neymar, qui se passent au même instant dans le référentiel de Buffon, sont décalés dans le temps dans le référentiel de Neymar, car les deux évènements ne se passent pas au même endroit.

a) Dans le référentiel de Buffon le ballon et Neymar sont en mouvement, donc on peut trouver le temps et l'endroit de l'arrivée du ballon vers Neymar en égalisant les trajectoires des deux :

$$\begin{aligned} x_{ball}(t) &= x_{Ney}(t) \\ \iff d_{ball} - v_{ball}\Delta t &= d_{Ney} - v_{Ney}\Delta t \\ \implies \qquad \Delta t_{Buf} &= \frac{d_{ball} - d_{Ney}}{v_{ball} - v_{Ney}} = \frac{10\,\mathrm{m}}{0.3\,c} = 1.11 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{sec} = 111\,\mathrm{ns} \end{aligned}$$

La distance du but peut alors être trouvée avec le mouvement du ballon ou de Neymar :

$$x_{arrive} = d_{ball} - v_{ball}\Delta t = 40\mathrm{m} - 0.8c \cdot 1.11 \cdot 10^{-7}\mathrm{sec} = 13.3\mathrm{m}.$$

Pour trouver la distance dans le référentiel de Neymar, on peut calculer la distance que Buffon a parcouru dans ce référentiel pendant le temps de voyage du ballon. Parce que Silva et Neymar ne se trouvent pas au même endroit lors de la passe, pour Neymar, la passe est jouée au moment t_0 qui se trouve avec la transformation de Lorentz :

$$t_0 = \gamma_{Ney-Buf}\left(0 - \frac{v_{Ney}(d_{ball} - d_{Ney})}{c^2}\right) = -1.92 \cdot 10^{-08}\,\mathrm{sec} = -19.2\,\mathrm{ns}$$

Le temps de voyage du ballon vue de Neymar peut être calculé avec une transformation de Lorentz en partant du temps trouvé et de ce décalage :

$$\begin{aligned} \Delta t_N &= \gamma_{Ney-Buf} \cdot \left(\Delta t_B - \frac{v_{Ney}(d_{ball} - x_{arrive})}{c^2}\right) - t_0 \\ &= 1.155 \cdot \left(1.11 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{sec} - \frac{0.5 \cdot (40\,\mathrm{m} - 13.3\,\mathrm{m})}{c}\right) + 1.92 \cdot 10^{-08}\,\mathrm{sec} \\ &= 9.63 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{sec} = 96.3\,\mathrm{ns} \end{aligned}$$

Dans le référentiel de Neymar, Buffon bouge avec une vitesse de $v_{Buffon} = -v_{Neymar}$. La nouvelle distance entre eux (vue de Neymar) est donc :

$$\begin{aligned} x_{Buf}(\Delta t_N) &= (d_{Buf})_N - (v_{Buf})_N \Delta t_N = \frac{(d_{Ney})_B}{\gamma_{Ney-Buf}} - (v_{Ney})_B \Delta t_N \\ &= \frac{30\,\mathrm{m}}{1.155} - 0.5c \cdot 9.63 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{sec} = 11.5\,\mathrm{m} \end{aligned}$$

Remarque : Alternativement et plus facilement on peut directement transformer la distance calculée dans le référentiel de Buffon vers le référentiel de Neymar :

$$x_{Buf}(\Delta t_N) = \frac{(x_{arrive})_B}{\gamma_{Ney-Buf}} = 11.5\,\mathrm{m}.$$

b) Pour répondre, il faut comparer la distance trouvée avec la distance du dernier défenseur au but. Dans le référentiel le défenseur est 15 m devant le but, alors avec une distance de $x_{arrive} = 13.3$ m de Neymar au moment où il reçoit le ballon, on voit que Neymar est au delà du dernier défenseur quand la passe arrive.

c) Nous avons déja traité cette question dans la première question de l'éxercice, avec les réponses pour Buffon :

$$t_{Buf} = 20\,\mathrm{min},\ 111\mathrm{ns}$$

et pour Neymar :

$$t_{Ney} = 20\,\mathrm{min},\ 96.3\,\mathrm{ns}.$$

d) Le travail utilisé par Silva correspond à l'énergie cinétique du ballon, donc le travail relativiste est :

$$E_{kin,rel} = (\gamma_{ball-Buf} - 1) \times m_{ball} \times c^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{(0.8c)^2}{c^2}}} - 1 \right) 0.5\,\mathrm{kg}\,c^2 = 3.00 \cdot 10^{16}\,\mathrm{J},$$

et l'énergie cinétique classique est :

$$E_{kin,class} = \frac{1}{2} \times m_{ball} \times v_{ball}^2 = \frac{1}{2}\, 0.5\,\mathrm{kg}\,(0.8c)^2 = 1.43 \cdot 10^{16}\,\mathrm{J}.$$

Exercice 3

La bulle 1 qui monte sans encombre n'échange pas de chaleur avec l'eau, elle subit donc un processus adiabatique, tandis que la bulle 2 subit une expansion isotherme.
On suppose qu'une bulle d'air est un gaz parfait. On suppose aussi que l'air est un gaz di-atomique.

a) Soit P_{fond} la pression au fond du lac et P_{surface} la pression à la surface avec $P_{\text{surface}} < P_{\text{fond}}$.
Au fond du lac, le volume des deux bulles est égal : V_{fond} mais plus à la surface. On doit donc comparer $V_{\text{adiabatique}}$ et $V_{\text{isotherme}}$.
Pour un gaz parfait diatomique sous expansion adiabatique, nous avons :

$$P_1 V_1^\gamma = P_2 V_2^\gamma$$

où $\gamma = 7/5$=1.4 . En appliquant dans notre cas, on obtient :

$$V_{\text{adiabatique}}^\gamma = \frac{P_{\text{fond}}}{P_{\text{surface}}} V_{\text{fond}}^\gamma \Rightarrow V_{\text{adiabatique}} = \sqrt[\gamma]{\frac{P_{\text{fond}}}{P_{\text{surface}}}} V_{\text{fond}}$$

Pour l'expansion isotherme on utilise la formule des gaz parfaits : $P_1 V_1 = P_2 V_2$ où, pour notre cas, on obtient :

$$V_{\text{isotherme}} = \frac{V_{\text{fond}} P_{\text{fond}}}{P_{\text{surface}}}.$$

Calculons le rapport des volumes :

$$\frac{V_{\text{adiabatique}}}{V_{\text{isotherme}}} = \frac{V_{\text{fond}}}{V_{\text{fond}}} \left(\frac{P_{\text{fond}}}{P_{\text{surface}}} \right)^{1/\gamma} \frac{P_{\text{fond}}}{P_{\text{surface}}} = \left(\frac{P_{\text{fond}}}{P_{\text{surface}}} \right)^{\frac{1}{\gamma}-1} < 1 \Rightarrow V_{\text{adiabatique}} < V_{\text{isotherme}}$$

car $\gamma > 1$. Le volume de la bulle qui a subit une expansion adiabatique est plus petit que le volume de la bulle qui a subit une transformation isotherme.

b) Pour calculer le volume de chaque bulle à la surface, il nous faut connaître, d'après les formules utilisées, le volume initial (V_{fond}) et le rapport entre les pressions au fond et à la surface, $P_{\text{fond}}/P_{\text{surface}}$.

Exercice 4

a) Les trois étapes sont (voir figure) :
  1. transformation isochore (V constant)
  2. expansion isobare (P constant)
  3. compresion isotherme (processus lent, T constant)

  Etant donné le sens anti-horaire du cycle, il s'agit d'un réfrigérateur.

b) A l'état initial : $P_1 V_1 = nRT_1$. Donc $T_1 = \frac{P_1 V_1}{nR} = \frac{20\ \text{atm} \times 4\ \text{L}}{3\,\text{mol} \times 0.0821\ \text{atm.L.mol}^{-1}.\text{K}^{-1}} = 324.8$ K

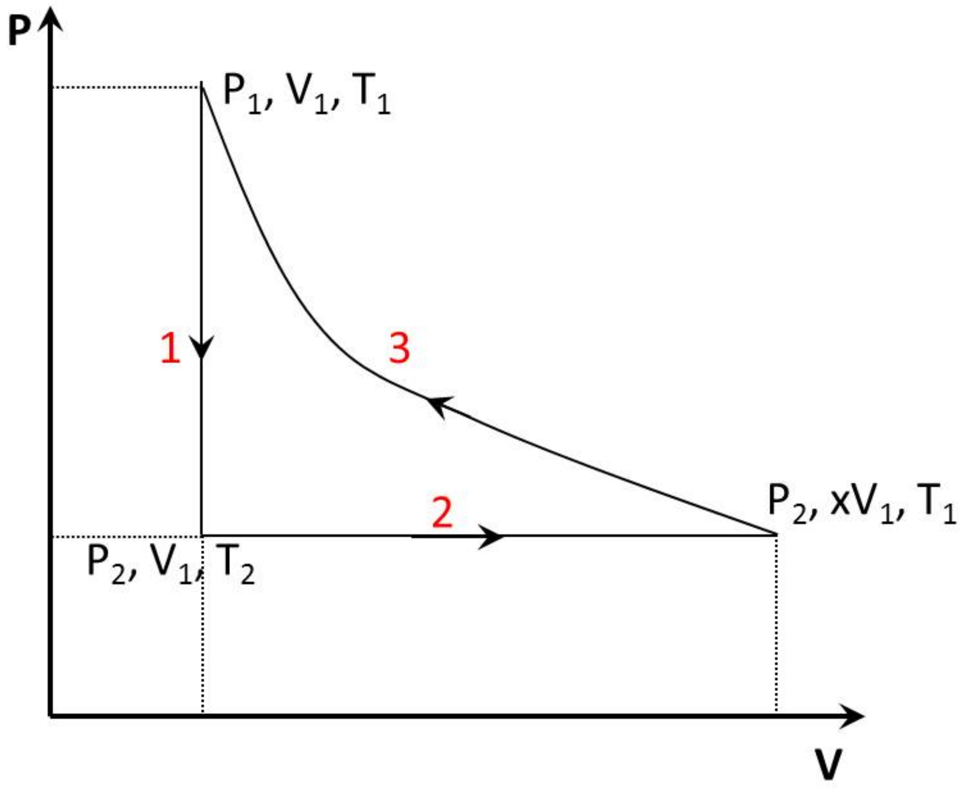

FIGURE 2 – Cycle thermodynamique

c) Comme il s'agit d'un réfrigérateur, on calcule le coefficient de performance (CP)

$$CP = \frac{|Q_L|}{|W|}$$

où Q_L représente la chaleur extraite de la source froide lors de l'expansion isobare et W est la somme des travaux ($W_{tot} = W_{isobare} + W_{isochore} + W_{isotherme}$).
De plus comme $W_{isochore} = 0$, on a
1.$W_{tot} = W_{isobare} + W_{isotherme} = nRT_1 \ln \frac{V_1}{xV_1} + P_2(xV_1 - V_1)$
2. $Q_L = Q_{isobare} = \Delta U_{isobare} + W_{isobare} = n\frac{5}{2}R(T_1 - T_2) + P_2(xV_1 - V_1)$.
Et donc, avec $V = V_1 = V_2$, $P_2 = P_3 = \frac{nRT_3}{V_3} = \frac{nRT_1}{xV_1} = \frac{P_1}{x}$ et $T_2 = \frac{P_2V_2}{nR} = \frac{P_1V_1}{nRx} = \frac{T_1}{x}$, on obtient :

$$CP = \frac{\left|n\frac{5}{2}R(T_1 - T_2) + P_2(xV_1 - V_1)\right|}{\left|nRT_1 \ln \frac{V_1}{xV_1} + P_2(xV_1 - V_1)\right|} = \frac{\left|n\frac{5}{2}R(T_1 - T_2) + nRT_2(x-1)\right|}{|nRT_2(x-1) - \ln(x)nRT_1|} = \frac{\left|n\frac{5}{2}RT_1(1 - \frac{1}{x}) + nRT_1(1 - \frac{1}{x})\right|}{\left|nRT_1(1 - \frac{1}{x}) - \ln(x)nRT_1\right|}$$

$$CP = \frac{7}{2}\frac{x-1}{|x - 1 - x\ln(x)|}$$

Enfin on peut voir que :
1. CP diminue quand x augmente
2. CP ne dépend pas de T

d)

$$W_{tot} = W_{isobare} + W_{isotherme} = nRT_1 \ln \frac{V_1}{xV_1} + P_2(xV_1 - V_1) = 3\,\text{mol} \times 8.314\,\text{J.mol}^{-1}.\text{K}^{-1} \times \ln \frac{4}{4x} + P_2(4x - 4)$$

Il faut maintenant calculer P_2 :

Tournez la page!

De la transformation isochore, on tire $\frac{nRT_1}{P_1} = \frac{nRT_2}{P_2}$ et donc $\frac{T_1}{P_1} = \frac{T_2}{P_2}$ ou $P_2 = \frac{P_1 T_2}{T_1}$. Puis de l'expansion isobare, on trouve : $\frac{V_1}{nRT_2} = \frac{xV_1}{nRT_1}$ et donc $T_2 = \frac{T_1}{x}$ donc $P_2 = \frac{P_1 T_1}{xT_1}$
Soit au final, l'expression suivante pour le travail total :

$$W_{tot} = W_{isobare} + W_{isotherme} = nRT_1 \ln \frac{V_1}{xV_1} + \frac{P_1}{x}(xV_1 - V_1)$$

A.N. pour x=4 $W_{tot} = 3mol \times 8.314 \frac{J}{molK} \times \ln \frac{4}{16} + 5\ atm(16-4) = -5230\ J$

e) Entropie pour la compression isotherme : $dU_{isotherme} = 0$, $dQ_{isotherme} = pdV$, où $p = \frac{nRT}{V}$

et donc

$$\Delta S_{isotherme} = \int \frac{nRTdV}{VT} = \int \frac{nRdV}{V} = nRln \frac{V_1}{xV_1} = -34.5J \tag{1}$$

Energie libre de Gibbs pour la compression isotherme :

$$\Delta G = \int dG = \int dU + pdV + Vdp - TdS - SdT = \int Vdp = \int \frac{nRT}{p} dp = nRT_1 \ln \left(\frac{P_1}{P_3} \right) = nRT_1 \ln(x) \tag{2}$$

Exercice 5

a) La chaleur nécessaire pour que la glace fonde complètement vaut :

$$Q_{g-e} = m_g c_g (0°C - T_g) + m_g L_g \tag{3}$$

où $m_g = \rho_g V_g = \rho_g \pi r_{in}^2 L$.
Le premier terme représente la chaleur nécessaire pour élever la température de la glace de sa valeur initiale ($T_g = -6°C$) à son point de fusion ($0°C$ à la pression atmosphérique). La deuxième terme représente la chaleur nécessaire pour faire fondre toute la glace.
Le flux thermique nette du rayonnement absorbé par la bouteille est :

$$\Phi = \frac{Q}{\triangle t} = \epsilon \sigma_B S (T_a^4 - \overline{T}_g^4) \tag{4}$$

où $S = 2\pi r_{in} L$ la surface d'échange de la chaleur, $T_a = 303°K$ la température ambiante , $\overline{T}_g$ la température moyenne à l'intérieur de la bouteille. On peut approximer $\overline{T}_g = 270°K$ ($-3°C$) pendant la phase de l'augmentation de la température au point de fusion, et $\overline{T}_g = 273°K$ ($0°C$) pendant la phase de la fusion de la glace.
Le temps nécessaire pour que la glace fonde complètement :

$$t_{g-e} = \frac{m_g c_g (0°C - T_g)}{\epsilon \sigma_B S (T_a^4 - 270^4)} + \frac{m_g L_g}{\epsilon \sigma_B S (T_a^4 - 273^4)} = \frac{\rho_g r_{in}}{2\epsilon \sigma_B} \left[\frac{c_g (0°C - T_g)}{T_a^4 - 270^4} + \frac{L_g}{T_a^4 - 273^4} \right] \tag{5}$$

Application numérique :

$$t_{g-e} = 1.1870 \times 10^5 s \simeq 1 \text{ jour } 9 \text{ heures} \tag{6}$$

b) S'il y a l'air il faut rajouter le flux thermique de la conduction. Le flux thermique total est donc :

$$\Phi = \frac{Q}{\triangle t} = \epsilon \sigma_B S (T_a^4 - \overline{T}_g^4) + k_{air} S \frac{T_a - \overline{T}_g}{d} \tag{7}$$

où $d = (7cm - 5cm)/2 = 1cm$ la distance entre les parois. Le premier terme est le flux du rayonnement, le deuxième terme est le flux de la conduction. Comme qu'on a fait dans a) on peut approximer

$\overline{T}_g = 270°K$ $(-3°C)$ pendant la phase de l'augmentation de la température au point de fusion, et $\overline{T}_g = 273°K$ $(0°C)$ pendant la phase de la fusion de la glace.

$$t_{g-e} = \frac{\rho_g r_{in}}{2}\left[\frac{c_g(0°C - T_g)}{\epsilon\sigma_B(T_a^4 - 270^4) + \frac{k_{air}}{d}(T_a - 270)} + \frac{L_g}{\epsilon\sigma_B(T_a^4 - 273^4) + \frac{k_{air}}{d}(T_a - 273)}\right] \quad (8)$$

Application numérique :

$$t_{g-e} = 3.6514 \times 10^4 s \simeq 10 \text{ heures } 9 \text{ minutes} \quad (9)$$

c) La vitesse du N_2 vaut :

$$(v_{rms})_{N_2} = \sqrt{\frac{3k_BT_a}{m_{N_2}}} = \sqrt{\frac{3k_BT_a}{28u}} \simeq 520m/s \quad (10)$$

La vitesse du O_2 vaut :

$$(v_{rms})_{O_2} = \sqrt{\frac{3k_BT_a}{m_{O_2}}} = \sqrt{\frac{3k_BT_a}{32u}} \simeq 486m/s \quad (11)$$

La vitesse des molécules d'air est :

$$v_{air} = 0.8(v_{rms})_{N_2} + 0.2(v_{rms})_{O_2} \simeq 513m/s \quad (12)$$

On peut aussi utiliser la vitesse moyenne $\overline{v} = \sqrt{\frac{8k_BT_a}{\pi m}}$. On obtient $\overline{v}_{N_2} \simeq 479m/s$, $\overline{v}_{O_2} \simeq 448m/s$ et $\overline{v}_{air} \simeq 473m/s$.

La force nette sur la bouteille vaut :

$$F_{nette} = \frac{1}{2}S_{ext}p_{1\%} \quad (13)$$

où on prendre la moité de la surface latérale de la bouteille ($S_{ext} = 2\pi r_{ext}L$) parce ce qu'on considère une direction particulière, et $p_{1\%}$ est la pression due à 1% de la vitesse des molécules d'air. $p_{1\%} \sim$ température $\sim vitesse^2$. Donc on a :

$$p_{1\%} = (0.01)^2 p_{atm} \quad (14)$$

Finalement, on obtient :

$$F_{nette} = \pi r_{ext}L(0.01)^2 p_{atm} \simeq 0.45N \quad (15)$$