

Physique générale II

CORRIGÉ DE L'EXAMEN DU 22 JUIN 2012

Mis à jour le 10 juillet 2012

Prof. A. FASOLI

Auteurs : F. Avino, F. Braunmueller, M. Craveiro, D. Martinet, E. Seres Roig

Révision : A. Bovet

*Centre de Recherches en Physique des Plasmas
École Polytechnique Fédérale de Lausanne*

Exercice 1

- a) L'énergie potentielle initiale du ressort dû à sa compression ($x_i = -20$ cm) est transformée complètement en énergie cinétique à l'instant où les deux masses arrivent ensemble au point d'équilibre. La conservation de l'énergie mécanique entre ces deux points nous donne :

$$E_{1,2} = \frac{1}{2} k x_i^2 = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v^2, \quad (1)$$

d'où on peut trouver la vitesse au point d'équilibre :

$$v = \sqrt{\frac{k x_i^2}{m_1 + m_2}}. \quad (2)$$

Pendant que la masse m_2 continue avec cette vitesse $v_2 = v$ sans freinage, la masse m_1 continue l'oscillation. L'énergie cinétique de cette masse est de nouveau transférée en énergie potentielle au moment de l'allongement maximal (amplitude A_1) :

$$\begin{aligned} E_1 = \frac{1}{2} k A_1^2 &= \frac{1}{2} m_1 v^2 \\ &= \frac{1}{2} m_1 \frac{k x_i^2}{m_1 + m_2} = \frac{1}{2} \frac{m_1}{m_1 + m_2} k x_i^2. \end{aligned} \quad (3)$$

Donc, l'amplitude de l'oscillation après le détachement de m_2 est :

$$A_1 = \sqrt{\frac{m_1}{m_1 + m_2}} x_i = 15 \text{ cm}. \quad (4)$$

L'amplitude change quand la masse m_2 perd contact. m_2 part avec une partie de l'énergie initiale (sous forme cinétique) et m_1 oscille avec le reste de l'énergie initiale.

La période de l'oscillation peut être trouvée avec la relation $\omega^2 = \frac{k}{m}$:

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = 2\pi \sqrt{\frac{m_1}{k}} = 0.53 \text{ s} \quad (5)$$

b) La formule de cette vitesse a déjà été trouvée dans la partie a) :

$$v = \sqrt{\frac{kx_i^2}{m_1 + m_2}} = 0.5 \text{ m/s.} \quad (6)$$

c) Le temps pendant lequel les masses sont séparées est équivalent à un quart d'une période d'oscillation après le détachement. La distance, qui est parcourue par la masse m_1 est juste l'amplitude, pendant que la masse m_2 continue avec une vitesse constante.

$$\Delta x = \Delta x_2 - \Delta x_1 = v \cdot \frac{T_1}{4} - A_1 = 23.6 \text{ cm} - 15 \text{ cm} = 8.6 \text{ cm} \quad (7)$$

d) La force de rappel du ressort est maximale lorsque l'élongation est maximale :

$$F_{max} = kA_1 = 15 \text{ N.} \quad (8)$$

Pour que le ressort ne se casse pas, la surface minimale de sa section sera donc :

$$S = \frac{F_{max}}{\sigma} = 7.5 \cdot 10^{-8} \text{ m}^2. \quad (9)$$

On trouve finalement le diamètre minimal du ressort avec $S = \pi \left(\frac{d}{2}\right)^2$:

$$d = 2\sqrt{\frac{S}{\pi}} = 3.1 \cdot 10^{-4} \text{ m} = 0.31 \text{ mm.} \quad (10)$$

Exercice 2

Soit S le référentiel lié à la Terre, et S' le référentiel lié à la fusée ($l' = 100 \text{ m}$) qui voyage à une vitesse $v = 0.9c \text{ m/s}$ par rapport à S . Soit l la longueur de la fusée par rapport au système de la Terre.

a) Le moment auquel le signal arrive à l'avant de la fusée, selon le système de la fusée S' est :

$$t'_{avant} = \frac{l'}{c} = \frac{100 \text{ m}}{3 \cdot 10^8 \text{ m/s}} = 3.3 \cdot 10^{-7} \text{ s} \quad (11)$$

b) Le moment auquel le signal arrive à l'avant de la fusée, selon le système de la Terre S est :

$$t_{avant} = \frac{l}{(c - v)} = \frac{l'/\gamma}{(c - v)} \quad (12)$$

avec :

$$\gamma = \frac{1}{(1 - \frac{v^2}{c^2})^{1/2}} = 2.3 \quad (13)$$

donc :

$$t_{avant} = \frac{100 \text{ m}/2.3}{0.1 \times (3 \cdot 10^8 \text{ m/s})} = \frac{43.5 \text{ m}}{3 \cdot 10^7 \text{ m/s}} = 14.5 \cdot 10^{-7} \text{ s} \quad (14)$$

- c) Le moment auquel le signal arrive à l'arrière de la fusée, selon le système de la fusée S' est :

$$t'_{arriere} = \frac{2l'}{c} = \frac{200 \text{ m}}{3 \cdot 10^8 \text{ m/s}} = 6.6 \cdot 10^{-7} \text{ s} \quad (15)$$

et selon le système de la Terre S :

$$t_{arriere} = \frac{l}{(c-v)} + \frac{l}{(c+v)} = \frac{l'/\gamma}{(c-v)} + \frac{l'/\gamma}{(c+v)} = 15.2 \cdot 10^{-7} \text{ s} \quad (16)$$

- d) La distance totale couverte par le signal lumineux, selon le système de la fusée S' est :

$$d' = 2l' = 200 \text{ m} \quad (17)$$

et selon le système de la Terre S :

$$d = ct_{arriere} = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s} \times 15.2 \cdot 10^{-7} \text{ s} = 456 \text{ m} \quad (18)$$

- e) La quantité d'énergie épargnée équivaut à l'énergie cinétique de la masse des chaussettes qui voyagent à la vitesse de la fusée $v = 0.9c$:

$$E = (\gamma - 1)mc^2 = 1.3 \times 0.2 \text{ kg} \times (3 \cdot 10^8 \text{ m/s})^2 = 23.4 \cdot 10^{12} \text{ kJ} \quad (19)$$

Exercice 3

L'énergie interne et l'entropie sont des variables d'état, c'est à dire que leur valeur ne dépend pas du chemin parcouru lors de la transformation du gaz et leur variation sera identique pour les trois transformations a), b) et c).

Pour un gaz parfait, on sait que :

$$\Delta U_{A \rightarrow B} = nC_v \Delta T = nC_v (T_B - T_A) \quad (20)$$

$$\Delta S_{A \rightarrow B} = \int_A^B \frac{\delta Q}{T} = \int_A^B \frac{dU + pdV}{T} = nc_v \int_A^B \frac{dT}{T} + nR \int_A^B \frac{dV}{V} = nc_v \cdot \ln\left(\frac{T_B}{T_A}\right) + nR \cdot \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right) \quad (21)$$

où $C_v = \frac{3}{2}R$ pour un gaz monoatomique,

$$n = \frac{\text{masse}_{Ar}}{M_{Ar}}$$

$$\text{et } \frac{V_B}{V_A} = \frac{nR \cdot T_B \cdot p_A}{nR \cdot T_A \cdot p_B} = \frac{T_B \cdot p_A}{T_A \cdot p_B}$$

On obtient ainsi :

$$\Delta U_{A \rightarrow B} = \frac{\text{masse}_{Ar}}{M_{Ar}} \frac{3}{2} R \cdot (T_B - T_A) = \frac{0.01}{0.049} \cdot \frac{3}{2} \cdot 8.31 \cdot (600 - 300) = 763 \text{ J} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \Delta S_{A \rightarrow B} &= \int_A^B \frac{\delta Q}{T} = n c_v \cdot \ln\left(\frac{T_B}{T_A}\right) + n R \cdot \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right) \\ &= \frac{0.01}{0.049} \cdot \frac{3}{2} \cdot 8.31 \cdot \ln\left(\frac{600}{300}\right) + \frac{0.01}{0.049} \cdot 8.31 \cdot \ln\left(\frac{600 \cdot 300}{300 \cdot 100}\right) \\ &= 4.8 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \end{aligned} \quad (23)$$

Il nous faut maintenant calculer pour chaque processus le travail fourni ou reçu par le gaz ainsi que la chaleur échangée avec le milieu extérieur puisque ces variables sont dépendantes du chemin de la transformation thermodynamique. On se rappelle aussi le premier principe de la thermodynamique : $\Delta U = Q - W$.

- a) $A \rightarrow C : p$ constante
 $C \rightarrow B : V$ constant

Comme V est constant pendant la transformation réversible $C \rightarrow B$, on sait donc que $W_{C \rightarrow B} = 0$. En conséquence, $W_{A \rightarrow C \rightarrow B} = W_{A \rightarrow C}$.

Comme p est constante pendant $A \rightarrow C$:

$$W_{A \rightarrow C} = p_A \int_A^C dV = p_A \cdot (V_C - V_A) = p_A \cdot (V_B - V_A) = p_A \cdot n R \cdot \left(\frac{T_B}{p_B} - \frac{T_A}{p_A}\right).$$

On obtient alors :

$$W_{A \rightarrow C \rightarrow B} = p_A \cdot n R \cdot \left(\frac{T_B}{p_B} - \frac{T_A}{p_A}\right) = 300 \cdot \frac{0.01}{0.049} \cdot 8.31 \cdot \left(\frac{600}{100} - \frac{300}{300}\right) = 2544 \text{ J} \quad (24)$$

$$Q_{A \rightarrow C \rightarrow B} = \Delta U_{A \rightarrow B} + W_{A \rightarrow C \rightarrow B} = 763 + 2554 = 3307 \text{ J} \quad (25)$$

- b) $A \rightarrow D : V$ constante
 $D \rightarrow B : p$ constant

Similairement à a), comme V est constant pendant la transformation réversible $A \rightarrow D$, on sait que $W_{A \rightarrow D} = 0$. En conséquence, $W_{A \rightarrow D \rightarrow B} = W_{D \rightarrow B}$.

Comme p est constante pendant $D \rightarrow B$:

$$W_{D \rightarrow B} = p_B \int_D^B dV = p_B (V_B - V_D) = p_B (V_B - V_A) = p_B \cdot n R \cdot \left(\frac{T_B}{p_B} - \frac{T_A}{p_A}\right).$$

On obtient alors :

$$W_{A \rightarrow D \rightarrow B} = p_B \cdot nR \cdot \left(\frac{T_B}{p_B} - \frac{T_A}{p_A} \right) = 100 \cdot \frac{0.01}{0.049} \cdot 8.31 \cdot \left(\frac{600}{100} - \frac{300}{300} \right) = 848 \text{ J} \quad (26)$$

$$Q_{A \rightarrow D \rightarrow B} = \Delta U_{A \rightarrow B} + W_{A \rightarrow D \rightarrow B} = 763 + 848 = 1611 \text{ J} \quad (27)$$

- c) $A \rightarrow E : T$ constante
 $E \rightarrow B : p$ constant

On sait que $T_E = T_A$ et $p_E = p_B$. On peut donc calculer V_E à l'aide de l'équation des gaz parfaits.

$$V_E = \frac{nR \cdot T_E}{p_E} = \frac{nR \cdot T_A}{p_B} \quad (28)$$

On calcule ensuite $W_{A \rightarrow E}$ et $W_{E \rightarrow B}$

$$W_{A \rightarrow E} = \int_A^E p dV = nRT_A \int_A^E \frac{dV}{V} = nRT_A \cdot \ln\left(\frac{\frac{nR \cdot T_A}{p_B}}{\frac{nR \cdot T_A}{p_A}}\right) = nRT_A \cdot \ln\left(\frac{p_A}{p_B}\right) \quad (29)$$

$$W_{E \rightarrow B} = p_B \int_E^B dV = p_B \cdot (V_B - V_E) = p_B \cdot \left(V_B - \frac{nR \cdot T_A}{p_B} \right) = nR \cdot (T_B - T_A) \quad (30)$$

On obtient donc :

$$\begin{aligned} W_{A \rightarrow E \rightarrow B} &= W_{A \rightarrow E} + W_{E \rightarrow B} = nRT_A \cdot \ln\left(\frac{p_A}{p_B}\right) + nR \cdot (T_B - T_A) \\ &= \frac{0.01}{0.049} \cdot 8.31 \cdot 300 \cdot \ln\left(\frac{300}{100}\right) + \frac{0.01}{0.049} \cdot 8.31 \cdot (600 - 300) = 1068 \text{ J} \end{aligned} \quad (31)$$

et on en déduit $Q_{A \rightarrow E \rightarrow B}$:

$$Q_{A \rightarrow E \rightarrow B} = \Delta U_{A \rightarrow B} + W_{A \rightarrow E \rightarrow B} = 763 + 1068 = 1831 \text{ J} \quad (32)$$

- d) L'entropie S et l'énergie libre F étant des variables d'état, la différence d'entropie et d'énergie libre entre deux états ne dépend que des états eux-mêmes et non pas du chemin parcouru pour passer de l'un à l'autre. On peut alors calculer la différence d'entropie et d'énergie libre pour la transformation réversible $A \rightarrow E$ calculée en c). En effet la différence entre A et E de ces deux variables d'état est la même que celle pour une transformation irréversible entre ces mêmes états.

Calculons d'abord ΔS :

$$\Delta S_{A \rightarrow E} = \int_A^E \frac{\delta Q}{T_A} \quad (33)$$

Or, comme T est constante au cours de la transformation $A \rightarrow E$, on a que :
 $\Delta U_{A \rightarrow E} = 0 \Leftrightarrow Q_{A \rightarrow E} = W_{A \rightarrow E}$. On peut alors utiliser les résultats trouvés en c) :

$$\Delta S_{A \rightarrow E} = \frac{Q_{A \rightarrow E}}{T_A} = \frac{nRT_A \cdot \ln(\frac{p_A}{p_B})}{T_A} = \frac{0.01}{0.049} \cdot 8.31 \cdot \ln(\frac{300}{100}) = 1.9 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \quad (34)$$

La définition de l'énergie libre est :

$$F = U - TS \quad (35)$$

Par dérivation on obtient :

$$dF = dU - TdS - SdT = TdS - pdV - Tds - SdT = -pdV - SdT \quad (36)$$

Sachant que T est constante lors de $A \rightarrow E$, ΔF peut être facilement calculée en utilisant les résultats trouvés en c) :

$$\Delta F_{A \rightarrow E} = - \int_A^E pdV = -W_{A \rightarrow E} = -nRT_A \cdot \ln(\frac{p_A}{p_B}) = -\frac{0.01}{0.049} \cdot 8.31 \cdot 300 \cdot \ln(\frac{300}{100}) = -559 \text{ J} \quad (37)$$

e) Calculons d'abord la différence d'énergie moyenne d'une particule entre l'état A et l'état B :

$$\Delta \langle E \rangle_{particule} = \frac{\Delta U_{A \rightarrow B}}{N_A} = \frac{c_v \cdot \Delta T}{N_A} = \frac{12.5}{6.022 \cdot 10^{23}} \cdot (T_B - T_A) = 6.2 \cdot 10^{-21} \text{ J} \quad (38)$$

Maintenant calculons la différence d'énergie moyenne d'une particule en partant de sa vitesse quadratique moyenne et en supposant que son énergie est purement cinétique (gaz parfait) :

$$\begin{aligned} \Delta \langle E_{cin} \rangle_{particule} &= \frac{1}{2} m \cdot (\langle v_B \rangle^2 - \langle v_A \rangle^2) = \frac{1}{2} m \cdot \frac{8k\Delta T}{\pi \cdot m} \\ &= \frac{4k \cdot (T_B - T_A)}{\pi} = 1.76 \cdot 10^{-23} (T_B - T_A) = 5.3 \cdot 10^{-21} \text{ J} \end{aligned} \quad (39)$$

En fait lors du calcul de l'énergie cinétique moyenne, on utilise le carré de la vitesse moyenne. Or, on sait que le carré de la moyenne n'est pas égal à la moyenne du carré d'une valeur $\frac{1}{N} \cdot (\sum_{N_i} v_i)^2 \neq \frac{1}{N} \sum_{N_i} v_i^2$, ce qui explique la différence trouvée entre ces deux calculs. Afin de calculer correctement l'énergie cinétique moyenne des particules il faudrait

connaître la moyenne du carré de la vitesse. En effet, la forme correcte de la différence d'énergie cinétique moyenne est la suivante :

$$\Delta \langle E_{cin} \rangle_{particule} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot (\langle v_B^2 \rangle - \langle v_A^2 \rangle)$$

Exercice 4

Avant de commencer les calculs, il est préférable de mettre les données de l'exercice dans les unités du système international :

- $T_A = 243 \text{ K}$; $p_A = 202'650 \text{ Pa}$
- $p_B = p_A = 202'650 \text{ Pa}$ (transformation isobare)
- $T_C = T_A = 243 \text{ K}$; $p_C = 101'325 \text{ Pa}$

De plus, on sait que c'est un gaz diatomique, ce qui veut dire que $\nu = 5$ (il y a 5 degrés de liberté), et donc $C_v = \frac{\nu}{2}R = \frac{5}{2}R$ et $\gamma = \frac{2+\nu}{\nu} = \frac{7}{5}$. On rappelle aussi que $R = 8.315 \text{ J/(mole K)}$, ainsi que la loi des gaz parfaits : $pV = nRT$.

- a) On veut calculer les paramètres p , V et T pour chaque état du cycle.

Etat A : On donne $p_A = 202'650 \text{ Pa}$ et $T_A = 243 \text{ K}$. Ainsi

$$V_A = \frac{nRT_A}{p_A} = 0.01994 \approx 0.02 \text{ m}^3 \quad (40)$$

Etat C : On donne aussi la pression et la température : $p_C = 101'325 \text{ Pa}$ et $T_C = 243 \text{ K}$.

Ainsi

$$V_C = \frac{nRT_C}{p_C} = 0.03988 \approx 0.04 \text{ m}^3 \quad (41)$$

Etat B : Pour cet état, il faut utiliser le fait que la transformation de l'état B à l'état C est une adiabate. En effet, on sait que $pV^\gamma = cst$. Ainsi, on a

$$p_C V_C^\gamma = p_B V_B^\gamma \iff V_B = \left(\frac{p_C V_C^\gamma}{p_B} \right)^{1/\gamma} = 0.0243 \text{ m}^3 \quad (42)$$

On peut maintenant calculer la température en ce point du cycle :

$$T_B = \frac{p_B V_B}{nR} = 296 \text{ K} \quad (43)$$

En résumé,

	$p \text{ [Pa]}$	$V \text{ [m}^3\text{]}$	$T \text{ [K]}$
Etat A	202'650	0.02	243
Etat B	202'650	0.0243	296
Etat C	101'325	0.04	243

b) Afin de calculer les différentes chaleurs échangées, on va rappeler le premier principe

$$\Delta U = Q - W = nC_V \Delta T \quad (44)$$

$$\implies Q = W + nC_V \Delta T \quad (45)$$

On peut maintenant calculer la chaleur pour chaque transformation du cycle :

Transformation A→B : C'est une isobare : $p = \text{cst}$. Ainsi,

$$\begin{aligned} Q_{A \rightarrow B} &= \int_A^B p \, dV + nC_V \Delta T \\ &= p_A (V_B - V_A) + nC_V (T_B - T_A) \\ &= 3073.2 \text{ J} \end{aligned}$$

Transformation B→C : C'est une adiabate : $Q_{B \rightarrow C} = 0$. On peut aussi le calculer :

$$\begin{aligned} Q_{B \rightarrow C} &= \int_B^C p \, dV + nC_V \Delta T \\ &= \int_B^C \frac{p_B V_B^\gamma}{V^\gamma} \, dV + nC_V (T_C - T_B) \\ &= p_B V_B^\gamma \int_B^C \frac{dV}{V^\gamma} + nC_V (T_C - T_B) \\ &= \frac{p_B V_B^\gamma}{1 - \gamma} (V_C^{1-\gamma} - V_B^{1-\gamma}) + nC_V (T_C - T_B) \\ &= 0 \text{ J} \end{aligned}$$

Transformation C→A : C'est une isotherme : $\Delta T = 0 \implies \Delta U = 0 \implies Q = W$. Ainsi,

$$\begin{aligned} Q_{C \rightarrow A} &= \int_C^A p \, dV \\ &= \int_C^A \frac{nRT_A}{V} \, dV \\ &= nRT_A \ln \left(\frac{V_A}{V_C} \right) \\ &= -2802.8 \text{ J} \end{aligned}$$

c) Le rendement d'un cycle est défini comme le rapport entre le travail net du cycle et la chaleur fournie au système ($Q > 0$), soit

$$\eta = \frac{\sum W}{Q_{\text{reçue}}} \quad (46)$$

On peut donc écrire

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{W_{A \rightarrow B} + W_{B \rightarrow C} + W_{C \rightarrow A}}{Q_{A \rightarrow B}} \\ &= \frac{p_A (V_B - V_A) + \frac{p_B V_B^\gamma}{1 - \gamma} (V_C^{1-\gamma} - V_B^{1-\gamma}) + Q_{C \rightarrow A}}{Q_{A \rightarrow B}} \\ &= \frac{871.4 + 2213 - 2802.8}{3073.2} \\ &= 9.16 \% \end{aligned}$$

d) La variation d'entropie entre deux états s'écrit

$$\Delta S = \int \frac{\delta Q}{T} \quad (47)$$

Or, pendant la transformation $C \rightarrow A$, la température reste constante. On peut donc écrire

$$\Delta S = \frac{1}{T_A} \int_C^A p dV = nR \ln \left(\frac{V_A}{V_C} \right) = -11.53 \text{ J/K} \quad (48)$$

e) Le diagramme P-V de ce cycle est présenté dans la figure (1).

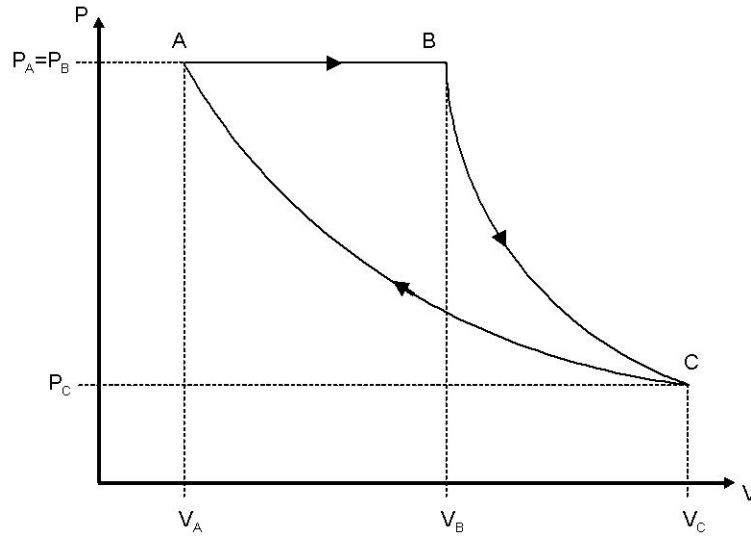


FIGURE 1 – Diagramme P-V du cycle considéré

La transformation $B \rightarrow C$ est en $1/V^\gamma$, tandis que la transformation $C \rightarrow A$ est en $1/V$, d'où la différence d'inclinaison.

f) Afin de représenter le cycle dans le diagramme T-S, il faut considérer la variation d'entropie lors des transformations. Pour la transformation $B \rightarrow C$, c'est très simple : $\Delta S = 0$, car $\delta Q = 0$ (adiabate). Elle sera représentée par une ligne verticale.

Pour la transformation $C \rightarrow A$, on a $\Delta T = 0$, donc $\delta Q = \delta W < 0$, ainsi $\Delta S < 0$. Elle sera représentée par une ligne horizontale.

Finalement, on s'aperçoit que $T_B > T_C$. On peut donc tracer le cycle.

Remarque : La courbe entre A et B est une exponentielle. En effet, on a que $\delta Q = nC_p dT$, avec $C_p = \gamma C_v$. On trouve donc

$$\Delta S = \int_A^B \frac{\delta Q}{T} = \underbrace{n\gamma C_v}_{A, >0} \ln \left(\frac{T_B}{T_A} \right) \quad (49)$$

Que l'on peut ré-exprimer comme

$$T_B = T_A e^{\Delta S/A} \quad (50)$$

qui est bien une exponentielle croissante.

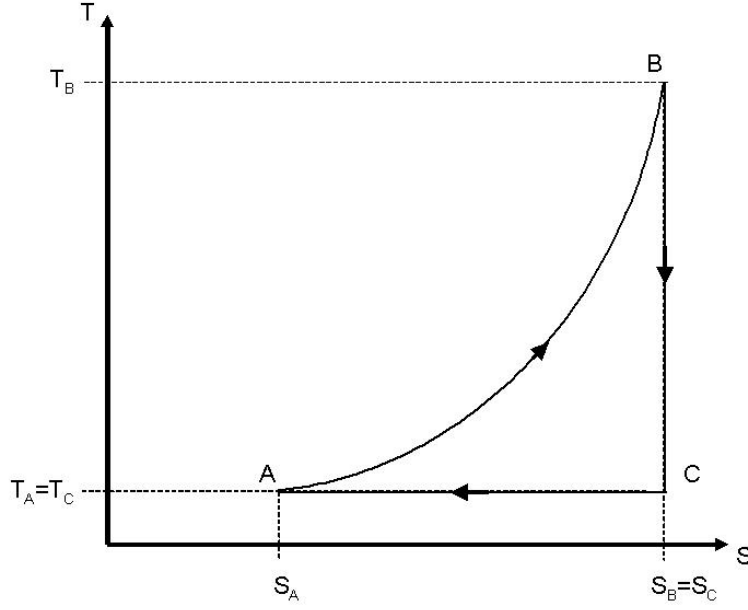
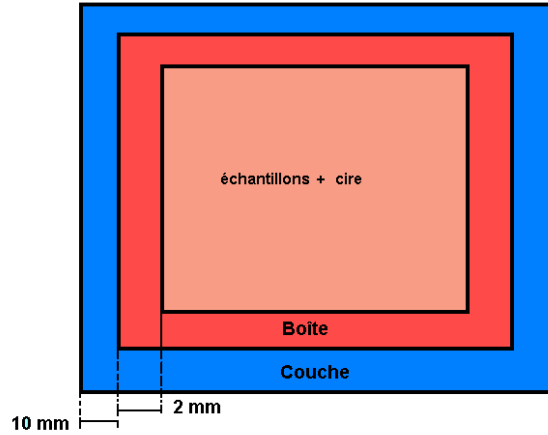


FIGURE 2 – Diagramme T-S du cycle considéré

Exercice 5



- La condition pour pouvoir calculer la masse de cire nécessaire sans connaître la masse des échantillons est d'avoir les échantillons à $37^{\circ}C$ au début des 24h.
- On a deux matériaux (boîte et couche isolante), on peut écrire la valeur de la puissance traversant les deux matériaux :

$$\begin{cases} P_b^{j/n} = \frac{k_b}{d_b} A (T_{int} - T_{milieu}^{j/n}) \\ P_c^{j/n} = \frac{k_c}{d_c} A (T_{milieu}^{j/n} - T_{ext}^{j/n}) \end{cases} \quad (51)$$

où $k_b = 0.2 W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}$ est la conductivité thermique des parois de la boîte, $d_b = 2 mm = 2 \cdot 10^{-3} m$ est l'épaisseur des parois de la boîte, $k_c = 0.01 W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}$ est la conductivité

thermique de la couche, $d_c = 10mm = 10^{-2}m$ est l'épaisseur de la couche isolante, $A = 6\ell^2 = 6m^2$ est la surface à travers laquelle on a la conduction (on peut prendre la même pour la boîte et la couche isolante), $T_{int} = 37^\circ C = 310K$ est la température dans la boîte, $T_{ext}^j = 23^\circ C = 296K$ est la température extérieure pendant la journée, $T_{ext}^n = 16^\circ C = 289K$ est la température extérieure pendant la nuit et $T_{milieu}^{j/n}$ est la température à l'interface entre la boîte et la couche.

En considérant que la puissance doit être la même $P_b^{j/n} = P_c^{j/n}$, on trouve :

$$T_{milieu}^{j/n} = \frac{T_{ext}^{j/n} k_c d_b + T_{int} k_b d_c}{k_c d_b + k_b d_c} \Rightarrow \begin{cases} T_{milieu}^j \simeq 309.86K \\ T_{milieu}^n \simeq 309.79K \end{cases}$$

En utilisant cette équation dans (51), on trouve :

$$P_b^{j/n} = P_c^{j/n} = \frac{Q^{j/n}}{\Delta t} = H_{eq} A \cdot (T_{int} - T_{ext}^{j/n}) \quad \text{avec} \quad H_{eq} = \frac{k_b k_c}{k_c d_b + k_b d_c} \simeq 0.99W \cdot K^{-1}$$

Dans les deux cas, on trouve :

$$\begin{cases} P^j = 83.17W \\ P^n = 124.75W \end{cases}$$

La chaleur totale donnée fournie par la cire pendant 24h doit être :

$$Q_{tot} = P^j \cdot \Delta t^j + P^n \cdot \Delta t^n = \underbrace{83.17W \times (14 \cdot 3600)s}_{\simeq 4.19 \cdot 10^6 J} + \underbrace{124.75W \times (10 \cdot 3600)s}_{\simeq 4.49 \cdot 10^6 J} \simeq 8.68 \cdot 10^6 J$$

On peut donc calculer la masse nécessaire de cire :

$$Q_{tot} = m_c \cdot L_{fus}^c \Rightarrow m_c = Q_{tot} / L_{fus}^c = \frac{8.68 \cdot 10^6 J}{2.05 \cdot 10^5 J/kg} \simeq 42.36kg$$

où $L_{fus}^c = 205kJ/kg = 2.05 \cdot 10^5 J/kg$ est la chaleur latente de fusion de la cire.

- c) On suppose que le balance énergétique entre la puissance de rayonnement d'entrée et de sortie est dominée par la différence entre la rayonnement de l'intérieur à $37^\circ C$ et de l'extérieur ($23^\circ C$ pendant la journée et $16^\circ C$ pendant la nuit). Donc on trouve :

$$\begin{cases} \Phi_{int} = \epsilon \sigma_B \cdot A \cdot T_{int}^4 \\ \Phi_{ext}^j = \epsilon \sigma_B \cdot A \cdot (T_{ext}^j)^4 \\ \Phi_{ext}^n = \epsilon \sigma_B \cdot A \cdot (T_{ext}^n)^4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Delta \Phi^j = \Phi_{int} - \Phi_{ext}^j = \epsilon \sigma_B \cdot A \cdot [T_{int}^4 - (T_{ext}^j)^4] = \\ \Delta \Phi^n = \Phi_{int} - \Phi_{ext}^n = \epsilon \sigma_B \cdot A \cdot [T_{int}^4 - (T_{ext}^n)^4] = \end{cases}$$

où ϵ est l'émissivité de la boîte.

Si on néglige le transfert thermique par rayonnement, on suppose que $\Delta \Phi^j \ll P^j$ et $\Delta \Phi^n \ll P^n$, c'est-à-dire :

$$\epsilon \ll \min \left\{ \frac{P_j}{\sigma_B \cdot A \cdot [T_{int}^4 - (T_{ext}^j)^4]}, \frac{P_n}{\sigma_B \cdot A \cdot [T_{int}^4 - (T_{ext}^n)^4]} \right\} \simeq 0.16$$

- d) Pour réduire la valeur de l'émissivité de la boîte, on peut, par exemple, la couvrir avec des parois d'acier ou la peindre en blanc.