Physique générale II

Corrigé de l'examen du 24 juin 2011

Mis à jour le 24 juin 2011

Prof. A. FASOLI
Auteurs : A. Bovet, M. Craveiro, K. Gustafson, D. Martinet, E. Seres Roig
Révision : Jonathan Rossel

Centre de Recherches en Physique des Plasmas
École Polytechnique Fédérale de Lausanne

Exercice 1

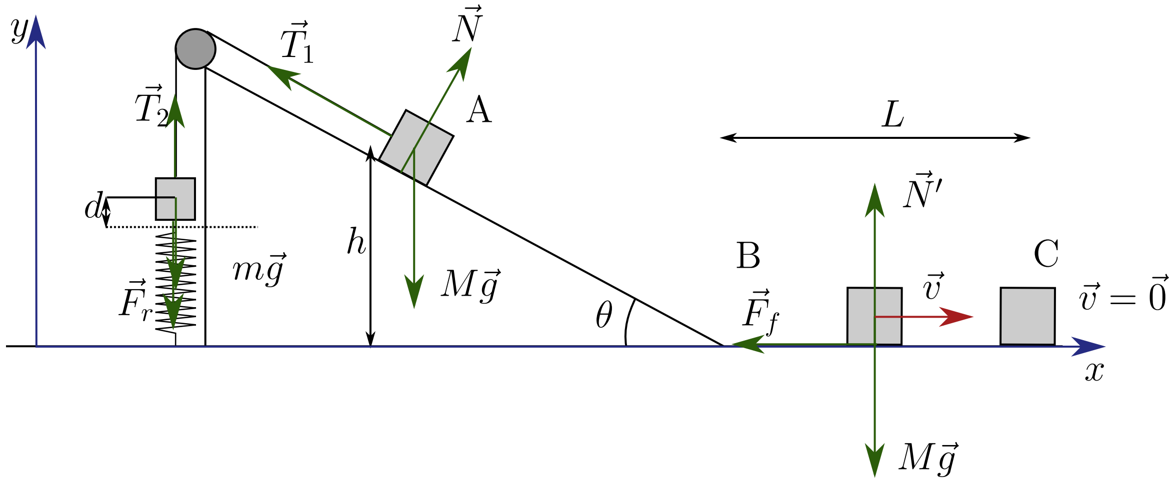


Figure 1 – Schéma de l'exercice 1

a) Les différentes forces exercées sur les deux masses sont représentées sur la figure 1. La deuxième loi de Newton appliquée à ces deux masses nous donne les équations suivantes :

$$\vec{N} + \vec{T}_1 + M\vec{g} = \vec{0} \quad (1)$$
$$\vec{F}_r + \vec{T}_2 + m\vec{g} = \vec{0} \quad (2)$$

où $F_r = -kd$, d est l'élongation du ressort et $T_1 = T_2 = T$ (fil inextensible et de masse négligeable). En projetant ces équations sur les axes x et y, on trouve :

$$N \sin\theta - T\cos\theta = 0 \quad (3)$$
$$N\cos\theta + T\sin\theta - Mg = 0 \quad (4)$$
$$-mg - kd + T = 0 \quad (5)$$

Nous avons trois inconnues (N, T et d) et trois équations, nous pouvons donc résoudre le système. En sortant N de (3) et en l'insérant dans (4), on trouve :

$$\begin{aligned} T\frac{\cos^2\theta}{\sin\theta} + T\sin\theta &= Mg && (6)\\ T\left(\frac{\cos^2\theta + \sin^2\theta}{\sin\theta}\right) &= Mg && (7)\\ \frac{T}{\sin\theta} &= Mg && (8) \end{aligned}$$

Ce que l'on aurait aussi pu trouver en projetant l'équation (1) sur un axe parallèle à $\vec{T_1}$. Finalement, en utilisant ce résultat dans (5) :

$$mg + kd = Mg\sin\theta \tag{9}$$

Ce qui donne pour l'élongation du ressort :

$$d = \frac{g}{k}\left(M\sin\theta - m\right) = \frac{9.81}{30}\left(0.5 \times 0.5 - 0.125\right) \approx 4.1 \text{ cm} \tag{10}$$

b) On coupe le fil donc $T_2 = T_1 = 0$. L'équation (2) devient :

$$\vec{F_r} + m\vec{g} = m\vec{a} \tag{11}$$

Projetée selon y :

$$-ky(t) - mg = m\ddot{y}(t) \tag{12}$$

où y représente l'élongation du ressort à l'instant t. En effectuant le changement de variable $z(t) = y(t) + \frac{mg}{k}$ $(\dot{z}(t) = \dot{y}(t), \ddot{z}(t) = \ddot{y}(t))$, on trouve :

$$-kz(t) = m\ddot{z}(t) \tag{13}$$

qui est l'équation d'un oscillateur harmonique de pulsation $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ dont la période est donnée par :

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{0.125}{30}} \approx 0.4 \text{ s} \tag{14}$$

c) La solution générale de l'équation du mouvement (13) est :

$$z(t) = A\cos(\omega_0 t + \phi) \tag{15}$$

Ce qui donne pour l'élongation du ressort :

$$y(t) = A\cos(\omega_0 t + \phi) - \frac{mg}{k} \tag{16}$$

Les conditions initiales sont :

$$\begin{aligned} \dot{y}(t=0) &= 0 && (17)\\ y(t=0) &= d && (18) \end{aligned}$$

Ce qui nous permet d'identifier A et ϕ :

$$-A\omega_0 \sin(\phi) = 0 \quad \Rightarrow \quad \phi = 0 \tag{19}$$

$$A\cos(0) - \frac{mg}{k} = d \quad \Rightarrow \quad A = d + \frac{mg}{k} \tag{20}$$

L'élongation du ressort à l'instant t est finalement donnée par :

$$y(t) = \left(d + \frac{mg}{k}\right)\cos(\omega_0 t) - \frac{mg}{k} \tag{21}$$

et la vitesse de la masse par :

$$\dot{y}(t) = -\omega_0 \left(d + \frac{mg}{k}\right)\sin(\omega_0 t) \tag{22}$$

Donc à $t = 10s$, la vitesse vaut :

$$\dot{y}(t = 10s) = -\omega_0 \left(d + \frac{mg}{k}\right)\sin(\omega_0 10) \tag{23}$$

$$= -\sqrt{\frac{k}{m}}\left(d + \frac{mg}{k}\right)\sin(\sqrt{\frac{k}{m}}10) \tag{24}$$

$$= -\sqrt{\frac{30}{0.125}}\left(0.041 + \frac{0.125 \times 9.81}{30}\right)\sin(\sqrt{\frac{30}{0.125}}10) \tag{25}$$

$$\approx 1.05 \text{ m/s} \tag{26}$$

d) La masse M part du point A, à une hauteur h du plan horizontal, arrive au point B, en bas du plan incliné, puis s'arrête au point C après avoir parcouru une distance L sur le plan horizontal (voir fig. 1).

Le théorème de l'énergie cinétique nous dit que la variation de l'énergie cinétique entre le point A et le point C est égal à la somme des travaux des forces entre ces deux points. Les seules forces qui travaillent entre A et C sont la force de pesanteur entre A et B et la force de frottement entre B et C. Comme la vitesse de la masse est nulle en A et en C, la variation de l'énergie cinétique est également nulle.

$$\Delta^{AC} E_c = W^{AB}_{M\vec{g}} + W^{BC}_{\vec{F}_f} \tag{27}$$

$$0 = Mgh - F_f L \tag{28}$$

$$\mu_d N' L = Mgh \tag{29}$$

$$\mu_d MgL = Mgh \tag{30}$$

$$\tag{31}$$

où on a utilisé le fait que la force de frottement est égale au produit du coefficient de frottement et de la force de soutien, que le coefficient de frottement dynamique doit être utilisé si le corps est en mouvement et qu'entre B et C, la norme de N' est égal à Mg. Donc

$$L = \frac{h}{\mu_d} = \frac{0.5}{0.25} = 2 \text{ m} \tag{32}$$

e) Dans ce cas, lorsque la masse arrive au point B elle est arrêtée sur une distance $D = 2$mm par une force $\vec{F}$, que l'on suppose constante, exercée par le mur contre la masse. De nouveau on peut appliquer le théorème de l'énergie cinétique entre le moment où la masse se trouve au point A et le moment où elle est arrêtée par le mur. La variation d'énergie cinétique est nulle et les forces effectuant un travail sont la force de pesanteur entre A et B et la force $\vec{F}$ sur une distance D. On a donc :

$$0 = Mgh - FD \tag{33}$$

et

$$F = \frac{Mgh}{D} \tag{34}$$

La contrainte de compression sur la masse vaut :

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{F}{S} = \frac{Mgh}{DS} = \frac{Mgh}{Dl^2} = \frac{0.5 \times 9.81 \times 0.5}{0.002 \times 0.005^2} && (35) \\ &\approx 49.05 \cdot 10^6 \text{ N/m}^2 > 30 \cdot 10^6 \text{ N/m}^2 && (36) \end{aligned}$$

La masse se casse donc contre le mur.

Exercice 2

Soit S le référentiel lié au garage et S' le référentiel lié à la trottinette, qui se déplace à une vitesse v par rapport S. Etant donné que les longueurs propres du garage et de la trottinette sont égales (2 m), le problème est symétrique. Afin de simplifier les calculs, on utilisera une seule variable pour les dimensions propres ($l_0 = 2\,\text{m}$), et une autre pour les dimensions contractées ($l = \frac{l_0}{\gamma} = 1.2\,\text{m}$).

a) Par rapport au référentiel S du garage, la longueur de la trottinette se contracte selon :

$$l = \frac{l_0}{\gamma} = l_0\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \tag{37}$$

D'où l'on tire la vitesse de la trottinette :

$$v = c\sqrt{1 - \left(\frac{l}{l_0}\right)^2} = 3 \cdot 10^8\sqrt{1 - \left(\frac{1.2}{2}\right)^2} = 2.4.10^8 \text{ m/s} \tag{38}$$

b) Par rapport au référentiel du garage, la trottinette parcourt une distance $d = l + l_0$ (longueur de la trottinette vue par le garage et longueur propre du garage) à une vitesse v. Donc, le temps que la trottinette passe à l'intérieur du garage vaut :

$$\Delta t = \frac{d}{v} = \frac{l + l_0}{v} = \frac{1.2 + 2}{2.4 \cdot 10^8} = 1.3 \cdot 10^{-8} \text{ s} \tag{39}$$

c) Par symétrie du problème, le temps mesuré par l'enfant est le même que celui mesuré par un observateur situé dans le garage (voir point b), donc :

$$\Delta t' = \Delta t = \frac{l + l_0}{v} = 1.3 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{s} \tag{40}$$

<u>Remarque :</u> Ceci peut être démontré en utilisant les transformations de Lorentz :

$$t' = \gamma t - \frac{\gamma v}{c^2}x \tag{41}$$

$$x' = -\gamma v t + \gamma x \tag{42}$$

et en définissant formellement les deux événements spatio-temporelles délimitant l'interval de temps recherché :

– A : "roue avant à la première porte"

– B : "roue arrière à la deuxième porte"

En choisissant x(1ère porte) $= 0$, x'(roue avant) $= 0$ et $t(\mathrm{A}) = 0$, on a : $(t_A, x_A) = (0, 0)$ et $(t_B, x_B) = (\Delta t, l_0)$. Par les transformations de Lorentz, on trouve :

$$(t'_A, x'_A) = (0, 0) \tag{43}$$

$$(t'_B, x'_B) = (\gamma \Delta t - \frac{\gamma v}{c^2} l_0, -\gamma v \Delta t + \gamma l_0) \tag{44}$$

En utilisant $\Delta t = (l + l_0)/v$ et $c^2 = v^2/(1 - (l/l_0)^2)$, on trouve $(t'_B, x'_B) = ((l + l_0)/v, -l_0)$. On a donc bien la même solution.

d) Vu que la trottinette n'est pas coupée dans le référentiel du garage (sa longueur apparente est plus petite que la longueur de l'entrée) et puisque la physique est la même dans les deux référentiels, elle ne doit pas être coupée dans son propre référentiel, même si la contraction de l'entrée du garage dans ce référentiel semble indiquer le contraire. Ce paradoxe apparent se résoud si l'on tient compte du fait que la simultanéité de l'arrivée de la trottinette à la deuxième porte avec la fermeture de la première porte n'est vraie que dans le référentiel du garage. Pour justifier complètement cet argument, il faut passer par les transformations de Lorentz. On définit deux événements :

– C : "roue avant à la deuxième porte"

– D : "la première porte se ferme"

Dans le référentiel du garage, ces événements s'écrivent : $(t_C, x_C) = (l_0/v, l_0)$ et $(t_D, x_D) = (l_0/v, 0)$ (NB : $t_C = t_D$). Par les transformations de Lorentz, on trouve l'équivalent de ces événements dans le référentiel de la trottinette :

$$(t'_C, x'_C) = (\gamma l_0/v - \frac{\gamma v}{c^2} l_0, -\gamma v l_0/v + \gamma l_0) = (\gamma l_0/v - \frac{\gamma v}{c^2} l_0, 0) \tag{45}$$

$$(t'_D, x'_D) = (\gamma l_0/v, -\gamma v l_0/v) = (\gamma l_0/v, -\gamma l_0) \tag{46}$$

En utilisant $c^2 = v^2/(1-(l/l_0)^2)$ et $l = l_0/\gamma$, on trouve $(t'_C, x'_C) = (l_0/(\gamma v), 0)$. On constate que $x'_D < -l_0$. Dès lors, dans le référentiel de la trottinette, la première porte se ferme au-delà de la position de la roue arrière et la trottinette n'est pas coupée. Ceci est dû à la non-simultanéité de C et D dans S' : $t'_C = l_0/(\gamma v) < \gamma l_0/v = t'_D$.

<u>Remarque :</u> le calcul de (t'_C, x'_C) n'est pas indispensable pour répondre à la question.

Exercice 3

a) La chaleur fournie par l'eau lorsqu'on la refroidit de 20°C à 0°C doit être égale à la chaleur nécessaire pour réchauffer la glace de −13°C à 0°C, puis la faire fondre totalement (on veut la quantité minimale de glace).

$$m_{eau}c_{eau}\Delta T_{eau} = m_{gl}L_{gl} + m_{gl}c_{gl}\Delta T_{gl} \tag{47}$$
$$m_{eau}c_{eau}\Delta T_{eau} = m_{gl}\left(L_{gl} + c_{gl}\Delta T_{gl}\right)$$
$$m_{gl} = \frac{m_{eau}c_{eau}\Delta T_{eau}}{L_{gl} + c_{gl}\Delta T_{gl}} \tag{48}$$

L'application numérique donne :

$$m_{gl} = \frac{100\text{ g } 1\text{ cal/g}^{\circ}\text{C } 20^{\circ}\text{ C}}{80\text{ cal/g } + 0.5\text{ cal/g}^{\circ}\text{C } 13^{\circ}\text{C}} = \frac{2000\text{ cal}}{86.5\text{ cal/g}} \simeq 23\text{ g} \tag{49}$$

où l'on a utilisé que 1 dl d'eau est équivalent à une masse de 100 g.

b) En général, la variation d'entropie liée à un changement de température sans changement de phase s'écrit :

$$\Delta S = \int_{T_1}^{T_2} \frac{\delta Q}{T} = \int_{T_1}^{T_2} \frac{mc\mathrm{d}T}{T} = mc\ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right), \tag{50}$$

Pour un changement de phase à température constante, on a simplement :

$$\Delta S = \frac{m_{gl}L_{gl}}{T_{fusion}}. \tag{51}$$

La variation ΔS_{gl} pour la glace est donc :

$$\Delta S_{gl} = m_{gl}c_{gl}\ln\left(\frac{T_{fusion}}{T_{1,gl}}\right) + \frac{m_{gl}L_{gl}}{T_{fusion}} \tag{52}$$
$$\Delta S_{gl} = 23\text{ g } 0.5\text{ cal/g}^{\circ}\text{C } \ln\left(\frac{273\text{K}}{260\text{K}}\right) + \frac{23\text{ g } 80\text{ cal/g}}{273\text{K}}$$
$$\Delta S_{gl} \simeq 7.3\text{ cal/}^{\circ}\text{C}$$

où l'on a préalablement converti les températures en Kelvin. La variation d'entropie ΔS_{eau} pour l'eau est quant à elle donnée par :

$$\Delta S_{eau} = m_{eau}c_{eau}\ln\left(\frac{T_{2,eau}}{T_{1,eau}}\right) \tag{53}$$
$$\Delta S_{eau} = 100\text{ g } 1.0\text{ cal/g}^{\circ}\text{C } \ln\left(\frac{273\text{K}}{293\text{K}}\right)$$
$$\Delta S_{eau} \simeq -7.1\text{ cal/}^{\circ}\text{C}$$

La variation d'entropie de l'univers est finalement donnée par la somme des deux :

$$\Delta S_{uni} = \Delta S_{eau} + \Delta S_{gl} \simeq 0.2\text{ cal/}^{\circ}\text{C} > 0 \tag{54}$$

c) L'application numérique dans l'équation (48) donne :

$$m_{gl} = \frac{100 \text{ g } 1 \text{ cal/g}^\circ\text{C } 0.5^\circ \text{ C}}{80 \text{ cal/g } + 0.5 \text{ cal/g}^\circ\text{C } 0.05^\circ\text{C}} = \frac{50 \text{ cal}}{80 \text{ cal/g}} = 0.625 \text{ g} \tag{55}$$

La variation ΔS_{gl} pour la glace est donc :

$$\begin{aligned}
\Delta S_{gl} &= m_{gl} c_{gl} \ln\left(\frac{T_{fusion}}{T_{1,gl}}\right) + \frac{m_{gl} L_{gl}}{T_{fusion}} \\
\Delta S_{gl} &= 0.625 \text{ g } 0.5 \text{ cal/g}^\circ\text{C } \ln\left(\frac{273\text{K}}{272.95\text{K}}\right) + \frac{0.625 \text{ g } 80 \text{ cal/g}}{273\text{K}} \\
\Delta S_{gl} &= 0.1833 \text{ cal/}^\circ\text{C}
\end{aligned} \tag{56}$$

La variation d'entropie ΔS_{eau} pour l'eau est quant à elle :

$$\begin{aligned}
\Delta S_{eau} &= m_{eau} c_{eau} \ln\left(\frac{T_{2,eau}}{T_{1,eau}}\right) \\
\Delta S_{eau} &= 100 \text{ g } 1.0 \text{ cal/g}^\circ\text{C } \ln\left(\frac{273\text{K}}{273.5\text{K}}\right) \\
\Delta S_{eau} &= -0.1830 \text{ cal/}^\circ\text{C}
\end{aligned} \tag{57}$$

Et la variation d'entropie de l'univers est la somme des deux :

$$\Delta S_{uni} = \Delta S_{eau} + \Delta S_{gl} = 0.0003 \text{ cal/}^\circ\text{C} > 0 \tag{58}$$

d)
- L'augmentation d'entropie est dominée par le changement de phase de la glace.
- Au point c), la masse de glace nécessaire est bien plus petite car l'eau est déjà proche de 0°C. La variation d'entropie est donc très faible.
- En terme d'équilibre thermodynamique, un système isolé va évoluer lorsque $dS > 0$ et atteindre l'équilibre lorsque $dS = 0$. Dans notre cas, la variation d'entropie de l'univers est donc plus petite lorsque l'eau et la glace sont plus proches du point de fusion parce que le système est ainsi plus proche de son état d'équilibre final.
- En terme de réversibilité, on constate que la variation d'entropie de l'univers est très proche de zéro au point c). Cela indique que la transformation est quasi réversible. On peut le comprendre en se rappelant que l'énergie échangée est la même pour la glace et pour l'eau et qu'ainsi, si la température des deux phases considérées est très proche, l'entropie perdue par l'une est quasi égale à l'entropie gagnée par l'autre.

e) La quantité de la chaleur perdue par l'eau lors du refroidissement de 20°C à 0°C est donnée par :

$$Q_1 = m_{eau} c_{eau} \Delta T_{eau} = 100 \text{ g } 1.0 \text{ cal/g}^\circ\text{C } 20^\circ\text{C} = 2000 \text{ cal} \tag{59}$$

La quantité de la chaleur nécessaire pour réchauffer la glace de -13°C au point de fusion est donnée par :

$$Q_2 = m_{gl} c_{gl} \Delta T_{gl} = 150 \text{ g } 0.5 \text{ cal/g}^\circ\text{C } 13^\circ\text{C} = 975 \text{ cal} \tag{60}$$

La quantité de la chaleur pour fondre totalement la glace est donnée par :

$$Q_3 = m_{gl} L_{gl} = 150 \text{ g } 80 \text{ cal/g} = 12000 \text{ cal} \tag{61}$$

Comme $Q_1 < Q_2 + Q_3$, il est impossible que toute la glace fonde. Par contre, $Q_1 > Q_2$ implique que le mélange finale sera un mélange eau-glace à 0°C où une partie de la glace $m_{gl,fondue}$ aura fondu. Il s'agit donc de la calculer.

$$\begin{aligned} m_{eau} c_{eau} \Delta T_{eau} &= m_{gl,fondue} L_{gl} + m_{gl} c_{gl} \Delta T_{gl} \\ m_{gl,fondue} &= \frac{m_{eau} c_{eau} \Delta T_{eau} - m_{gl} c_{gl} \Delta T_{gl}}{L_{gl}} \end{aligned} \tag{62}$$

L'application numérique donne :

$$m_{gl,fondue} = \frac{2000 \text{ cal} - 975 \text{ cal}}{80 \text{ cal/g}} \simeq 12.8 \text{ g} \tag{63}$$

Le mélange final contient donc $100 + 12.8 = 112.8$ g d'eau et $150 - 12.8 = 137.2$ g de glace.

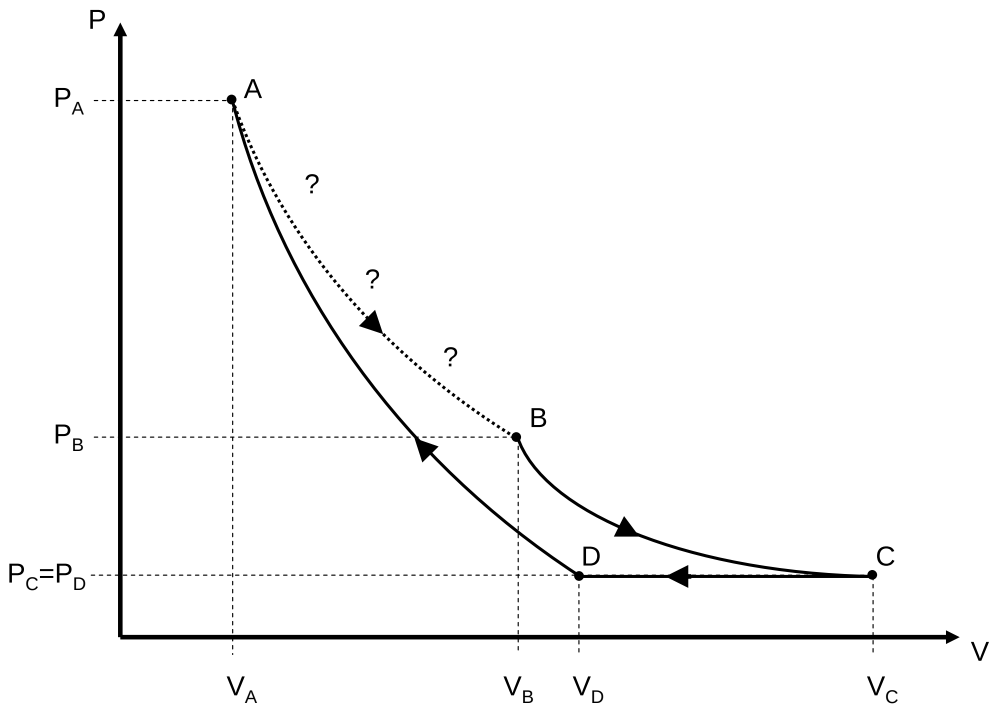
Exercice 4

Commençons par rappeler quelques constantes et formules.

- La loi des gaz parfaits : $PV = nRT$
- Sur une adiabatique, on a : $PV^\gamma = \text{cst}$
- Sur une isotherme, on peut réécrire la loi des gaz parfaits : $PV = nRT = \text{cst}$
- Sur une isobare, on peut réécrire la loi des gaz parfaits : $\frac{V}{T} = \frac{nR}{P} = \text{cst}$
- L'énergie interne d'un gaz parfait monoatomique vaut, en tout point du cycle : $U_{int} = \frac{3}{2} nRT$
- La chaleur spécifique molaire à volume constant vaut : $C_v = \frac{3}{2} R$
- Avec la constante des gaz parfaits : $R = 8.314\,\text{J/(mol K)}$, $n = 2$, et pour un gaz monoatomique : $\gamma = \frac{5}{3}$

a) Il s'agit d'un cycle moteur. En effet, le cycle est parcouru dans le sens horaire, de sorte que le travail fournit par le gaz lors des transformations AB et BC (représenté par la surface sous les courbes AB et BC) est plus élevé que le travail reçu par le gaz lors des transformations CD et DA.

b) Le diagramme P-V est représenté ci-dessous.



c) On calcule la pression, la température et le volume du gaz aux états A, B, C et D :

- Etat A. La pression et le volume sont donnés :

$$p_A = 12\,\mathrm{atm} = 1215600\,\mathrm{Pa} \quad \text{et} \quad V_A = 3\,\mathrm{L} = 3 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}^3 \tag{64}$$

La température en A est calculée grâce à la loi des gaz parfaits :

$$p_A V_A = nRT_A \quad \Rightarrow \quad T_A = \frac{p_A V_A}{nR} = 219.3\,\mathrm{K} \tag{65}$$

- Etat B. Le volume est donné :

$$V_B = 12\,\mathrm{L} = 12 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}^3 \tag{66}$$

La transformation AB étant isotherme, la température en B est égale à la température en A :

$$T_B = T_A = 219.3\,\mathrm{K} \tag{67}$$

On utilise ensuite la loi des gaz parfaits pour déterminer la pression à l'état B :

$$p_B V_B = nRT_B \quad \Rightarrow \quad p_B = \frac{nRT_B}{V_B} = 303900\,\mathrm{Pa} = 3\,\mathrm{atm} \tag{68}$$

- Etat C. La pression est donnée par :

$$p_C = 1\,\text{atm} = 101300\,\text{Pa} \tag{69}$$

La transformation BC étant adiabatique, les pressions et volumes en B et C sont liés par :

$$p_B V_B^\gamma = p_C V_C^\gamma \tag{70}$$

où γ est la constante adiabatique. Le gaz étant mono-atomique, ses molécules n'ont que $\nu = 3$ degrés de liberté, i.e. les degrés de liberté liés à la translation. La constante adiabatique vaut donc :

$$\gamma = \frac{\nu + 2}{\nu} = \frac{5}{3} \tag{71}$$

On obtient alors le volume à l'état C :

$$V_C = V_B \left(\frac{p_B}{p_C}\right)^{1/\gamma} \simeq 23.2\,\text{L} = 23.2 \cdot 10^{-3}\,\text{m}^3 \tag{72}$$

On détermine ensuite la température en C avec la loi des gaz parfaits :

$$p_C V_C = nRT_C \quad \Rightarrow \quad T_C = \frac{p_C V_C}{nR} \simeq 141.3\,\text{K} \tag{73}$$

- Etat D. La transformation CD étant isobare, les pressions en C et D sont identiques :

$$p_D = p_C = 1\,\text{atm} = 101300\,\text{Pa} \tag{74}$$

La transformation DA étant adiabatique, les pressions et volumes en D et A sont liés par :

$$p_D V_D^\gamma = p_A V_A^\gamma \quad \Rightarrow \quad V_D = V_A \left(\frac{p_A}{p_D}\right)^{1/\gamma} \simeq 13.3\,\text{L} = 13.3 \cdot 10^{-3}\,\text{m}^3 \tag{75}$$

Finalement, on détermine la température à l'état D grâce à la loi des gaz parfaits :

$$p_D V_D = nRT_D \quad \Rightarrow \quad T_D = \frac{p_D V_D}{nR} \simeq 81\,\text{K} \tag{76}$$

d) Le rendement d'un moteur est le rapport du travail net fournit par le système lors du cycle (i.e. la somme de tous les travaux effectués et reçus) sur la chaleur totale reçue par le système lors du cycle (i.e. la somme des chaleurs Q positives) :

$$\eta = \left|\frac{W_\text{net}}{Q_\text{reçue}}\right| \tag{77}$$

On doit donc déterminer les chaleurs et travaux échangés lors de chaque transformation du cycle.

- Transformation AB. Le travail effectué par le système est donné :

$$W_{AB} = 4000\,\text{J} \tag{78}$$

La transformation AB étant isotherme, la variation d'énergie interne du gaz est nulle :

$$\Delta U_{AB} = nC_v \underbrace{\Delta T_{AB}}_{=0} = 0 \tag{79}$$

On obtient alors la chaleur reçue par le gaz en utilisant le premier principe de la thermodynamique :

$$\Delta U_{AB} = Q_{AB} - W_{AB} \quad \Rightarrow \quad Q_{AB} = W_{AB} = 4000\,\mathrm{J} \tag{80}$$

Le signe de Q_{AB} étant positif, cette chaleur est effectivement reçue par le gaz.

- Transformation BC. La transformation étant adiabatique, le gaz ne reçoit ni ne cède aucune chaleur :

$$Q_{BC} = 0 \tag{81}$$

On peut ensuite calculer le travail effectué par le gaz grâce au premier principe :

$$\Delta U_{BC} = Q_{BC} - W_{BC} \quad \Rightarrow \quad W_{BC} = -\Delta U_{BC} = -nC_v \Delta T_{BC} \simeq 1945\,\mathrm{J} \tag{82}$$

On pourrait aussi intégrer le travail le long de BC grâce à la relation $pV^\gamma =$ constante :

$$pV^\gamma = \text{constante} \quad \Rightarrow \quad p(V) = p_B V_B^\gamma V^{-\gamma} \tag{83}$$

et on obtient

$$W_{BC} = \int_B^C p(V)\mathrm{d}V = \int_B^C p_B V_B^\gamma V^{-\gamma}\mathrm{d}V = p_B V_B^\gamma \left[\frac{V^{1-\gamma}}{1-\gamma}\right]_B^C \tag{84}$$

$$= p_B V_B^\gamma \frac{V_C^{1-\gamma} - V_B^{1-\gamma}}{1-\gamma} \simeq 1945\,\mathrm{J} \tag{85}$$

- Transformation CD. On calcule le travail effectué par le gaz :

$$W_{CD} = \int_C^D p\mathrm{d}V = p_C\left(V_D - V_C\right) \simeq -1003\,\mathrm{J} \tag{86}$$

où l'on a utilisé le fait que la pression est constante sur CD. Remarquez que le signe négatif de W_{CD} indique que le travail est en fait effectué sur le gaz (pour réduire son volume). Le premier principe donne ensuite la chaleur reçue par le gaz :

$$\Delta U_{CD} = Q_{CD} - W_{CD} \quad \Rightarrow \quad Q_{CD} = nC_v \Delta T_{CD} + W_{CD} \simeq -2507\,\mathrm{J} \tag{87}$$

Le signe négatif de Q_{CD} indique que le gaz en fait cède cette chaleur. Elle ne fait donc pas partie de la somme des chaleurs effectivement reçues par le gaz.

- Transformation DA. La transformation étant adiabatique, le gaz ne reçoit ni ne cède aucune chaleur :

$$Q_{DA} = 0 \tag{88}$$

Le travail effectué par le gaz est obtenu par le premier principe :

$$\Delta U_{DA} = Q_{DA} - W_{DA} \quad \Rightarrow \quad W_{DA} = -\Delta U_{DA} = -nC_v \Delta T_{DA} \simeq -3449.5\,\mathrm{J} \tag{89}$$

On peut aussi intégrer le travail le long de DA comme pour la transformation BC. Remarquez que le signe négatif du travail indique qu'il est en fait effectué sur le gaz pour le comprimer. Finalement, on calcule le rendement du cycle :

$$W_{\text{net}} = W_{AB} + W_{BC} + W_{CD} + W_{DA} \tag{90}$$

$$Q_{\text{reçue}} = Q_{AB} \tag{91}$$

$$\Rightarrow \quad \eta = \left| \frac{W_{\text{net}}}{Q_{\text{reçue}}} \right| = \left| \frac{W_{AB} + W_{BC} + W_{CD} + W_{DA}}{Q_{AB}} \right| \simeq 0.37 \tag{92}$$

e) Si l'isotherme AB est maintenant réversible, on peut la représenter sur le diagramme P-V. Le travail correspondant est donc obtenu par l'intégration de $p\mathrm{d}V$ sur AB :

$$W_{AB,\text{rév}} = \int_A^B p\mathrm{d}V = \int_A^B \frac{nRT}{V}\mathrm{d}V = nRT_A \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right) \simeq 5056\,\mathrm{J} \tag{93}$$

où l'on a utilisé la loi des gaz parfaits et le fait que la température est constante le long de AB. La variation de l'énergie interne du gaz est toujours nulle pour cette transformation :

$$\Delta U_{AB,\text{rév}} = nC_v \underbrace{\Delta T_{AB}}_{=0} = 0 \tag{94}$$

On utilise ensuite le premier principe pour déterminer la chaleur reçue par le gaz :

$$\Delta U_{AB,\text{rév}} = Q_{AB,\text{rév}} + W_{AB,\text{rév}} \quad \Rightarrow \quad Q_{AB,\text{rév}} = W_{AB,\text{rév}} \simeq 5056\,\mathrm{J} \tag{95}$$

Ces nouvelles valeurs $W_{AB,\text{rév}}$ et $Q_{AB,\text{rév}}$ entrent dans le calcul du rendement pour donner :

$$\eta_{\text{rév}} = \left| \frac{W_{\text{net,rév}}}{Q_{\text{reçue,rév}}} \right| = \left| \frac{W_{AB,\text{rév}} + W_{BC} + W_{CD} + W_{DA}}{Q_{AB,\text{rév}}} \right| \simeq 0.50 > \eta_{\text{irrév}} \tag{96}$$

On constate qu'un machine thermique opérant sur un cycle réversible est plus efficace qu'une machine thermique opérant sur un cycle irréversible.

f) L'entropie, l'enthalpie et l'énergie libre sont des variables d'états. Elles sont donc indépendantes de la transformation utilisée pour passer d'un état à l'autre. Ceci dit, si l'on doit intégrer des variables le long d'un chemin pour obtenir la variation d'une variable d'état entre deux états, ce chemin doit être réversible. Dans le cas d'une transformation irréversible, on doit donc trouver une transformation réversible équivalente. Dans notre cas, cette transformation doit mener le gaz de l'état A à l'état B par une transformation réversible, représentable dans le diagramme P-V. Pour l'isotherme irréversible entre A et B, on peut par exemple proposer le chemin A-D-C-B ou, de manière équivalente et plus simplement, l'isotherme réversible AB déjà utilisée en e). Dans ce cas, la variation d'entropie s'écrit :

$$\Delta S_{AB} = \int_{AB,\text{rév}} \frac{\delta Q}{T} = \frac{Q_{AB,\text{rév}}}{T_A} \simeq 23.05\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}}, \tag{97}$$

la variation d'enthalpie s'écrit :

$$\Delta H_{AB} = \int_A^B \mathrm{d}H = \int_A^B (\delta Q + V\mathrm{d}p) \tag{98}$$

$$= Q_{AB,\text{rév}} + \int_A^B \frac{nRT}{p}\mathrm{d}p \tag{99}$$

$$= Q_{AB,\text{rév}} + nRT_A \ln\left(\frac{p_B}{p_A}\right) = 0\,\mathrm{J} \tag{100}$$

et la variation d'énergie libre s'écrit :

$$\Delta F_{AB} = \int_A^B \mathrm{d}F = \int_A^B \left(-p\mathrm{d}V - S\underbrace{\mathrm{d}T}_{=0}\right) = -W_{AB} = -5056\,\mathrm{J} \tag{101}$$

Ces valeurs, calculées ici pour l'isotherme réversible, sont donc les mêmes pour l'isotherme irréversible puisque les états initiaux et finaux sont les mêmes. L'utilisation du chemin A-D-C-B, commun aux deux cycles (réversible et irréversible), aurait effectivement donné les mêmes résultats.
Remarque : dans le cas où la transformation AB est irréversible, l'échange de chaleur infinitésimal δQ n'est pas défini et, pour l'entropie par exemple, **on ne peut pas écrire** :

$$\Delta S_{AB} = \int_A^B \mathrm{d}S \underbrace{=}_{\text{Faux !}} \int_{AB,\text{irrév}} \frac{\delta Q}{T} = \frac{Q_{AB}}{T_A} \tag{102}$$

Exercice 5

a) Nous savons que la puissance thermique perdue par conduction d'un point chaud à un point froid est définie par la formule suivante :

$$P_c = k\frac{\Delta T}{l}S$$

où k est la conductivité thermique du matériau séparant le point chaud du point froid, ΔT la différence de température entre les deux points, l l'épaisseur du matériau ou la distance entre les deux points et S la surface de conduction. Lorsque la couche séparant les points chaud et froid est composée de plusieurs matériaux, la puissance thermique perdue est transmise à travers tous les matériaux et est donc la même pour chaque couche séparément (l'énergie est conservée). Cependant, il faut tenir compte des températures à chaque jonction afin de calculer correctement les gradients de température dans chaque matériau. Dans notre problème, cela s'écrit (l'indice 1 indique la couche intérieure et l'indice 2 la couche extérieure) :

$$P_{c1} = k_1\frac{T_i - T'}{l_1}S$$
$$P_{c2} = k_2\frac{T' - T_e}{l_2}S$$

avec
$$P_{c1} = P_{c2} = P_c$$
Il subsiste deux inconnues dans le problème : la puissance thermique P_c que nous cherchons et la température T' au niveau de la jonction des deux couches de matériaux. En réécrivant les équations afin de sortir T', nous obtenons :

$$T' = -\frac{P_c l_1}{S k_1} + T_i$$
$$T' = \frac{P_c l_2}{S k_2} + T_e$$

Et finalement par soustraction, nous obtenons :

$$\frac{P_c l_1}{S k_1} - T_i + \frac{P_c l_2}{S k_2} + T_e = 0$$

En sortant P_c, nous obtenons :

$$\begin{aligned} P_c &= (k_1 k_2)\frac{T_i - T_e}{k_2 l_1 + k_1 l_2} S = 0.5 \cdot 0.3 \frac{15-3}{0.3 \cdot 0.05 + 0.5 \cdot 0.02} 2 \cdot (2.5 \cdot 2.3 + 5 \cdot 2.3 + 5 \cdot 2.5) \\ &= 4284\,\mathrm{W}. \end{aligned}$$

b) Afin de calculer le temps nécessaire pour chauffer la caravane, il faut tenir compte :

1) De la chaleur nécessaire pour chauffer l'air dans la caravane. Cette chaleur est décrite par la formule :
$$Q_{air} = n C_v \Delta T$$
Le nombre de mole de gaz n peut être facilement déterminé en utilisant la loi des gaz parfaits (on suppose ici que l'air est un gaz parfait diatomique) : $pV = nRT$. La caravane étant un système fermé, on peut calculer n avec les valeurs initiales de p, V et T :

$$n = \frac{p_i V_i}{R T_i}$$

L'air étant considéré comme étant purement diatomique, le nombre de degrés de liberté vaut $\nu = 5$ et C_v est donné par $C_v = \frac{R\nu}{2}$. Finalement :

$$Q_{air} = \frac{p_i V_i}{T_i} \frac{\nu}{2} \Delta T$$

2) De l'énergie thermique perdue par conduction au cours du temps t nécessaire au chauffage de la caravane : $Q_{pertes} = P_c \cdot t$.

3) De l'énergie qui est fournie à l'air pendant ce temps t. Il existe deux sources d'énergie dans le problème : le chauffage fournissant une puissance $P_{chauff} = 20\,\mathrm{MJ/h} = \frac{2 \cdot 10^7}{3600}$ W et le ventilateur qui fournit indirectement $P_v = 300\,\mathrm{W}$ à l'air. Bien que la puissance indiquée soit celle de la consommation électrique du ventilateur, cette puissance reste à l'intérieur

de la caravane et contribue au chauffage de l'air (friction mécanique lors du brassage de l'air et chaleur dégagée par le moteur).
En faisant le bilan des énergies fournies et consommées (ou perdues), on obtient :

$$(P_{chauff} + P_v) \cdot t = Q_{air} + Q_{pertes} = \frac{\nu p_i V_i}{2T_i} \Delta T + P_c \cdot t$$

Finalement, il faudra un temps t donné par :

$$\begin{aligned} t &= \frac{\nu p_i V_i}{2T_i} \Delta T (P_{chauff} + P_v - P_c)^{-1} \\ &= \frac{5 \cdot 100 \cdot 10^3 \cdot 2.3 \cdot 5 \cdot 2.5}{2 \cdot 283} \cdot 10 (\frac{2 \cdot 10^7}{3600} + 300 - 4284)^{-1} \\ &= 162\text{s} = 2\,\text{min}\,42\,\text{s} \end{aligned}$$

afin de chauffer la caravane de 10° C.

c) La puissance rayonnée par la surface S_r d'un corps d'émissivité e et de température T_i dans un environnement à température T_e est donnée par :

$$P_r = \sigma \cdot e \cdot S_r ({T_i}^4 - {T_e}^4)$$

Afin de simplifier le calcul, on choisit d'utiliser une température moyenne pour $T_i = 15°$ C, comme au point a). Cela enlève la difficulté provenant de l'intégrale sur le temps (on ne connaît pas la dépendance de la température en fonction du temps) dans la formule précédente. Ainsi nous obtenons l'énergie rayonnée pendant le chauffage de la caravane en multipliant cette puissance par le temps de chauffage t :

$$\begin{aligned} Q_r &= P_r \cdot t = \sigma \cdot e \cdot S_r ({T_i}^4 - {T_e}^4) \cdot t \\ &= 5.7 \cdot 10^{-8} \cdot 0.3 \cdot (2.3 \cdot 5 + 2 \cdot 2.3 \cdot 2.5 + 2 \cdot 5 \cdot 2.5)(288^4 - 276^4) \cdot 162 \\ &= 143200\text{J} \end{aligned}$$

Afin de comparer cette énergie avec l'énergie perdue par conduction, on calcule cette dernière :

$$\begin{aligned} Q_c &= P_c \cdot t = 4284 \cdot 162 \\ &= 694000\text{J} \end{aligned}$$

L'énergie rayonnée par la surface est environ 5 fois moins grande que celle perdue par conduction. Nous faisons donc une erreur d'environ 20% dans notre approximation de l'énergie perdue. Comme le temps de chauffage calculé est inversement proportionnel à la puissance de chauffage effective (c'est à dire la puissance fournie moins les pertes), il faut estimer l'impact d'une augmentation de 20% des pertes sur cette puissance effective. Nous avons calculé que celle-ci vaut $P_{chauff} + P_v - P_c = 1572$ W. Quant à l'erreur sur les pertes, elle s'élève à 20% de $P_c = 4284$ W et vaut environ 850 W. L'erreur sur les pertes correspond donc à environ 50% de la puissance effective et induit une erreur d'un facteur 2 sur le temps calculé. Cependant, on peut conclure que notre approximation des pertes en ne tenant compte que de la conduction était suffisante pour nous renseigner sur l'ordre de grandeur du temps qu'il faut pour chauffer la caravane, qui est de quelques minutes.