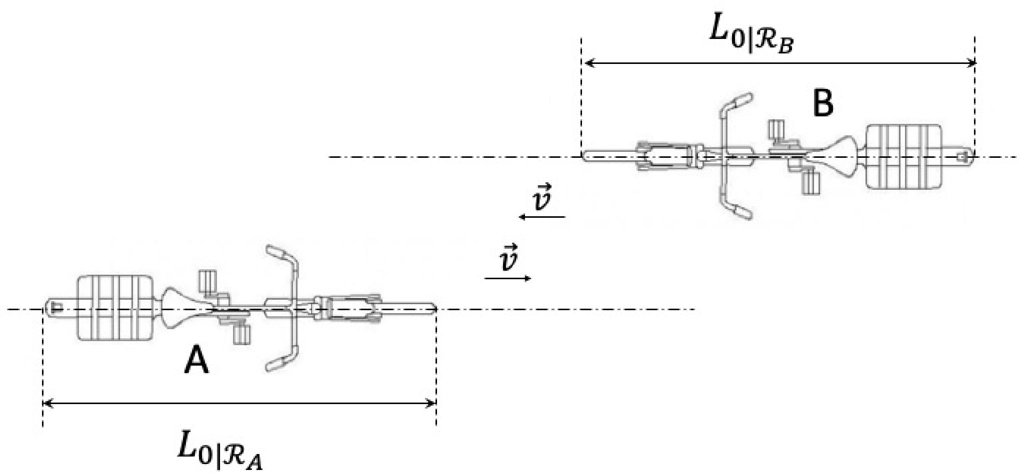
Test de mi-semestre

Exercice 1 (20 points)

Deux cavaliers intergalactiques, A et B, vont se défier dans un combat pour la paix du Grand Nuage de Magellan. Pour cela, les cavaliers se font face, sur des vélos électriques de longueur au repos $L_0 = 1$ m et de masse totale $m = 200$ kg, fonctionnant grâce à une batterie. Ces vélos électriques atteignent la vitesse relativiste $v = 0.8c$, avec c la vitesse de la lumière. Les règles du combat sont simples : les cavaliers foncent l'un vers l'autre suivant une trajectoire rectiligne avec un petit décalage latéral de façon à ne pas entrer en collision (voir figure ci-dessous). Ils doivent faire tomber leur adversaire de son vélo en décochant une flèche dans sa roue avant. La flèche située tout à l'arrière du vélo (en rouge sur la figure) est lancée perpendiculairement à la trajectoire et son temps de parcours est négligeable. Sur la figure, on a noté $L_0|_{\mathcal{R}_A}$ et $L_0|_{\mathcal{R}_B}$, les longueurs propres des vélos mesurées dans leur référentiel propre $\mathcal{R}_A$ et $\mathcal{R}_B$.

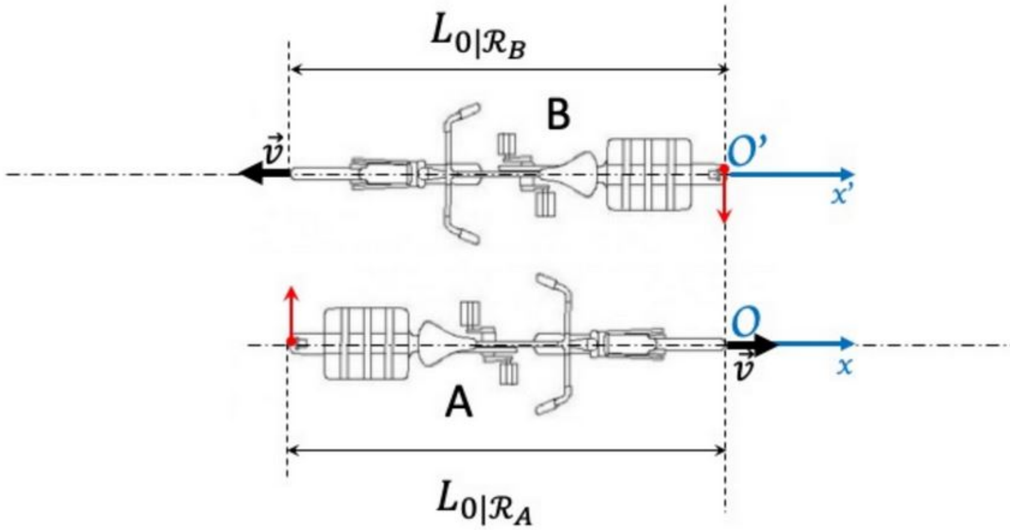


a) Le cavalier A décide de déclancher sa flèche au moment où l'avant de son vélo est parfaitement aligné avec l'arrière du vélo de B. Dans quel ordre, le cavalier B perçoit-il ces 2 événements ?

b) Est-ce que le cavalier A remporte le combat, c'est-à-dire arrive-t-il à atteindre la roue avant de B et faire tomber son adversaire ?

c) Après le combat, le vainqueur décélère jusqu'à l'arrêt total de son vélo électrique. On suppose que ce dernier est équipé d'un système capable de recharger la batterie avec une efficacité de $\eta = 0.3$. Quelle quantité d'énergie a été rajoutée à la batterie une fois le vélo arrêté ?

Corrigé



a) (7 points) Pour analyser cette situation, on introduit deux référentiel, $\mathcal{R}_A$ et $\mathcal{R}_B$, avec comme repère spatio-temporel $(0, t, x)$ and $(0', x', t')$ associés à A et B, respectivement (voir figure ci-dessous).

On définit les événements :

— $\mathcal{E}_1$: l'avant du vélo de A se trouve au même niveau que l'arrière du vélo de B,

— $\mathcal{E}_2$: Le cavalier A décoche sa flèche en direction de B.

Dans $\mathcal{R}_A$, les événements $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$ sont repérés par les coordonnées (x_1, t_1) et (x_2, t_2). On a donc que $\Delta x := x_2 - x_1 = -L_0$, car L_0 est la longueur du vélo de A mesurée dans $\mathcal{R}_A$, tandis que $\Delta t := t_2 - t_1 = 0$ car ces deux événements sont simultanés par le cavalier A dans son référentiel. Pour savoir dans quel ordre, le cavalier B, dans son référentiel, perçoit la tactique de A, on applique les transformations Lorentz, c'est-à-dire

$$c\Delta t' = c\,(t'_2 - t'_1) = \gamma(v)\,(c\Delta t - \beta\Delta x)\,, \tag{1}$$

où $\gamma(v) = 1/\sqrt{1-\beta^2}$, et $\beta = -v/c$, car le référentiel $\mathcal{R}_B$ se rapproche de $\mathcal{R}_A$ avec une vitesse $\boldsymbol{v} = -v\boldsymbol{e}_x$. On a donc que

$$c\,(t'_2 - t'_1) = -\gamma(v)\beta\Delta x = -\gamma(v)\frac{v}{c}L_0 < 0 \Rightarrow t'_1 > t'_2. \tag{2}$$

Ceci illustre bien un principe de la relativité : la simultanéité est relative. Dans ce cas, pour le cavalier B, A décoche sa flèche *avant* que l'arrière de son vélo soit au niveau de l'avant du vélo de A.

b) (7 points) Pour savoir si A remporte le combat durant cette tentative, il faut se demander où se trouve l'avant du vélo de B dans le référentiel $\mathcal{R}_A$, c'est-à-dire la longueur du vélo de B mesurée dans le référentiel de A. Pour cela, on définit :

— $\mathcal{E}_3$: position de la roue avant de B au moment de $\mathcal{E}_1$.

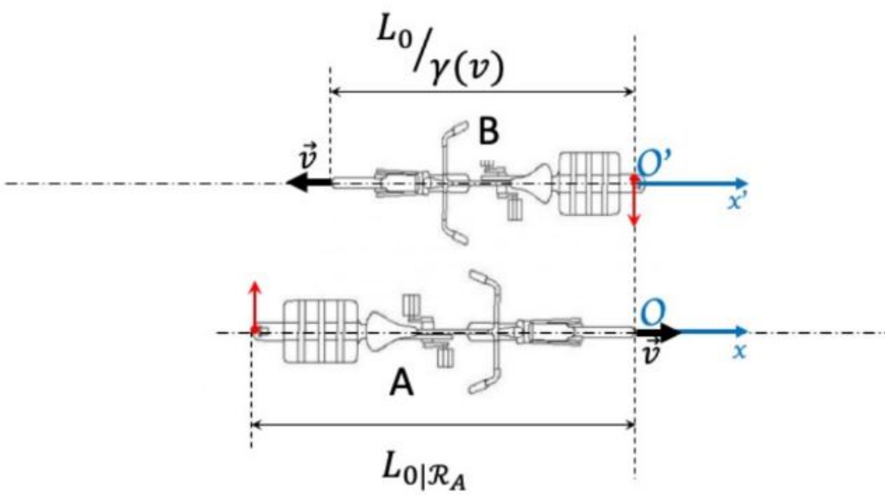
De plus, on introduit ses coordonnées spatio-temporelles par (x_3, t_3) et (x_3', t_3) dans $\mathcal{R}_A$ et $\mathcal{R}_B$, respectivement. Comme L_0 est une longueur propre du vélo de B dans $\mathcal{R}_B$, on a doit que $\Delta x' := x_3' - x_1' = -L_0$, tandis que $\Delta t := t_3 - t_1 = 0$ dans $\mathcal{R}_A$. On peut donc appliquer les transformation de Lorentz, c'est-à-dire

$$\Delta x' = \gamma(v)\left(\Delta x - \beta c \Delta t\right). \tag{3}$$

On obtient que la longueur

$$\Delta x = \frac{\Delta x'}{\gamma(v)}, \tag{4}$$

ce qui est la contraction des longueurs. On en déduit donc que le cavalier A va louper sa tentative, car l'avant de B se trouve en $-L_0/\gamma(v)$ avec $\gamma(v) > 1$. Par application numérique, avec $\gamma(0.8c) = 1/\sqrt{1-(0.8)^2} \simeq 1.67$, on trouve que la longueur de B perçue par A est de $L_0/1.67 \simeq 0.6$m.
Dans le repère $\mathcal{R}_A$ est donc illustrée par la figure ci-dessous.



c) (6 points) On suppose que le système est capable de convertir 30% ($\eta = 0.3$) de l'énergie cinétique perdue par le vélo lors du freinage. On peut donc écrire que l'énergie emmagasinée dans la batterie, U, est

$$U = \eta K, \tag{5}$$

où K est la variation cinétique. Comme la vitesse des vélos électriques est relativiste, $v = 0.8c$, l'énergie cinétique est donc donnée par

$$K = (\gamma(v) - 1)mc^2. \tag{6}$$

Par application numérique, on trouve que $K = 1.20 \times 10^{19}$ J, et donc $U = 3.60 \times 10^{18}$ J.

Exercice 2 (20 points)

Un récipient isolé, fermé par un piston de masse négligeable et de section $A = 20\,\mathrm{cm}^2$, qui peut bouger verticalement et également isolé, contient quatre moles de gaz parfait. La température du gaz à l'équilibre est de 20°C et la pression externe est la pression atmosphérique. Un poids de masse m est posé sur le piston, créant une situation hors équilibre. Le piston se déplace jusqu'à une nouvelle situation d'équilibre. La température et le volume du gaz sont alors 246°C et 58 litres, respectivement.

a) Quelle était la valeur du volume occupé par le gaz avant de déposer le poids ?

b) Calculer la masse m du poids ?

c) Le gaz dans le récipient est-il monoatomique ou diatomique ? Justifiez votre réponse.

Indications : Constante des gaz parfaits $R = 8.314\,\mathrm{J\,mol^{-1}\,K^{-1}}$; $1\mathrm{atm} = 1.01 \times 10^5\mathrm{Pa}$.

Corrigé

a) (5 points) Grâce à la loi de gaz parfaits $pV = nRT$, nous pouvons calculer le volume occupé par le gaz :

$$V = \frac{nRT}{p} \tag{7}$$

où la temperature est connue ainsi que n et R. Avant de mettre le poids, la pression est la même que la pression atmosphérique, alors on peut trouver le volume comme :

$$V_i = \frac{nRT_i}{p_0} \tag{8}$$

où p_0 est la pression atmosphérique, et T_i la temperature à l'etat initial.

Application numérique :

$$V_i = \frac{4 \times 8.314 \times 293}{1.01 \times 10^5} = 0.096\,\mathrm{m}^3 \tag{9}$$

b) (8 points) A l'état final, il faut considérer le système à l'équilibre mécanique : la pression à l'intérieur du cylindre est égale à la pression atmosphérique à laquelle s'ajoute la pression associée à la force de pesanteur du poids de masse m sur le piston :

$$p_{gaz} = p_f = p_0 + p_{poids} = p_0 + \frac{mg}{A} \tag{10}$$

La loi des gaz parfait s'applique toujours

$$p_f V_f = nRT_f \quad \Rightarrow \quad \left(p_0 + \frac{mg}{A}\right) V_f = nRT_f \quad \Rightarrow \quad m\frac{gV_f}{A} = nRT_f - p_0 V_f$$

La masse du poids est donc :

$$m = A\frac{nRT_f - p_0 V_f}{gV_f}. \tag{11}$$

Application numérique

$$m = 20 \times 10^{-4} \times \frac{4 \times 8.314 \times 519 - 1.01 \times 10^5 \times 0.058}{9.81 \times 0.058} = 40\,\mathrm{kg}$$

c) (7 points) Le récipient et le piston étant isolés, il n'y a pas d'échange de chaleur avec l'extérieur. Le processus étudié est donc adiabatique. Cependant, et c'est là le point-clé pour résoudre cette question, lorsque le poids est placé, le gaz dans le récipient est *hors équilibre* (c'est dit explicitement dans la donnée!) ce qui veut dire que la pression (et la température) n'est pas uniforme à l'intérieur du volume et n'est peut-être même pas définissable! On ne sait pas décrire l'évolution du gaz entre les états initial et final. C'est un processus irréversible. On étudie donc une expansion adiabatique irréversible. Dans ce cas, l'équation d'état $pV^\gamma = const.$ n'est pas valable. Par contre, le premier principe de la thermodynamique est toujours appliquable entre 2 états d'équilibre. De plus l'énergie interne étant une variable d'état, sa variation ne dépend pas du chemin suivi :

$$\Delta U = Q - W \Rightarrow \Delta U = 0 - W \Rightarrow W = -\Delta U = -nC_V(T_f - T_i). \tag{12}$$

De plus comme la transformation n'est pas quasi-statique, il faut revenir à la défi
nition générale du travail thermodynamique des forces de pression :

$$\delta W = p_{ext} dV \Rightarrow W = \int_{V_i}^{V_f} p_{ext} dV = \left(p_0 + \frac{mg}{A}\right)(V_f - V_i). \tag{13}$$

On a donc :

$$\left(p_0 + \frac{mg}{A}\right)(V_f - V_i) = -nC_V(T_f - T_i), \tag{14}$$

d'où :

$$C_V = \frac{-\left(p_0 + \frac{mg}{A}\right)(V_f - V_i)}{n(T_f - T_i)} \tag{15}$$

Pour comprendre si le gaz est monoatomique ou diatomique il faut trouver la valeur numérique de la chaleur spécifique molaire à volume contant : C_V. La chaleur spécifique molaire dépend du degré de liberté des molécules de gaz comme :

$$C_V = \frac{\nu}{2} R, \tag{16}$$

où ν est le nombre de degrés de liberté. Nous avons donc :
— gaz monoatomique $\Rightarrow \nu = 3 \Rightarrow C_V = \frac{3}{2}R$.
— gaz diatomique $\Rightarrow \nu = 5 \Rightarrow C_V = \frac{5}{2}R$.
Application numérique :

$$C_V = \frac{-\left(1.01 \times 10^5 + \frac{40 \times 9.81}{20 \times 10^{-4}}\right)(0.058 - 0.096)}{4 \times (519 - 293)} \simeq 12.5\,\mathrm{J\,mol^{-1}\,K^{-1}} = \frac{3}{2}R$$

Le gaz est monoatomique.

Exercice 3 (20 points)

Un cube d'or de 1.5 kg a été refroidi à −250°C. Le cube est lâché d'une hauteur de 4 m dans un récipient isolé contenant 3 kg d'eau à 2°C. On considère que le récipient est suffisamment profond pour que le cube ne touche pas le fond.

a) Quelle est la température du système une fois l'equilibre atteint ?
b) Est-ce que de l'eau sera transformée en glace ? Jusitifiez votre réponse.
c) Calculez la quantité de glace qui se forme, si elle s'est formée.
d) Est-ce que la Loi du Delong-Petit est verifiée pour l'or ?

Indications : Chaleur spécifique de l'or : $c_{\text{or}} = 129\,\text{J}\,\text{kg}^{-1}\,\text{K}^{-1}$; Chaleur spécifique de l'eau : $c_{\text{eau}} = 4186\,\text{J}\,\text{kg}^{-1}\,\text{K}^{-1}$; Chaleur latente de fusion de la glace : $L_{\text{fus.}} = 333\,\text{kJ}\,\text{kg}^{-1}$; Chaleur spécifique de la glace $c_{\text{glace}} = 2110\,\text{J}\,\text{kg}^{-1}\,\text{K}^{-1}$;Masse molaire de l'or : $M_{\text{or}} = 197\,\text{g}\,\text{mol}^{-1}$.

Corrigé

a) (7 points) Le cube d'or perd de l'énergie lors de sa chute et gagne de la chaleur au contact de l'eau. L'eau perd de la chaleur au contact du cube très froid et éventuellement fait une transition de phase. Le système "eau + cube" étant isolé, la somme des chaleurs échangées est nulle.

— Hypothèse 1 : $T_f > 0\,°\text{C}$: Aucune quantité d'eau n'a gelé.

$$-m_{\text{or}}gh + m_{\text{or}}c_{\text{or}}(T_f - T_{\text{or}}) + m_{\text{eau}}c_{\text{eau}}(T_f - T_{\text{eau}}) = 0$$

$$\Rightarrow \quad T_f = \frac{m_{\text{or}}gh + m_{\text{or}}c_{or}T_{\text{or}} + m_{\text{eau}}c_{\text{eau}}T_{\text{eau}}}{m_{\text{or}}c_{\text{or}} + m_{\text{eau}}c_{\text{eau}}}. \tag{17}$$

<u>Application numérique</u>

$$T_f = \frac{1.5 \times 9.81 \times 4 + 1.5 \times 129 \times (-250) + 3 \times 4186 \times 2}{1.5 \times 129 + 3 \times 4186} \simeq -2\,°\text{C}.$$

L'application numérique montre que cette hypothèse est fausse.

— Hypothèse 2 : $T_f < 0\,°\text{C}$: Toute l'eau a gelé.

$$-m_{\text{or}}gh + m_{\text{or}}c_{\text{or}}(T_f - T_{\text{or}}) + m_{\text{eau}}c_{\text{eau}}(0 - T_{\text{eau}}) - m_{\text{eau}}L_f + m_{\text{eau}}c_{\text{glace}}(T_f - 0) = 0.$$

$$\Rightarrow \quad T_f = \frac{m_{\text{or}}gh + m_{\text{or}}c_{\text{or}}T_{\text{or}} + m_{\text{eau}}c_{\text{eau}}T_{\text{eau}} + m_{\text{eau}}L_f}{m_{\text{or}}c_{\text{or}} + m_{\text{eau}}c_{\text{glace}}}. \tag{18}$$

<u>Application numérique</u>

$$T_f = \frac{1.5 \times 9.81 \times 4 + 1.5 \times 129 \times (-250) + 3 \times 4186 \times 2 + 3 \times 333 \times 10^3}{1.5 \times 129 + 3 \times 2110} \simeq +150\,°\text{C}.$$

L'application numérique montre que cette hypothèse est fausse.

Donc la réponse a la question posée est : la température finale du système est de 0 ℃.

b) (4 points) Dans le cas $T_f = 0\,°\text{C}$, le cube d'or est plongé dans de l'eau mais peut-être de glace s'est formée. Ceci est le cas si la quantité de chaleur reçue par le cube $|m_{\text{or}}c_{\text{or}}(T_f - T_{\text{or}})|$ est supérieure à la quantité de chaleur cédée par l'eau $|m_{\text{eau}}c_{\text{eau}}(T_f - T_{\text{eau}})|$.

<u>Application numérique :</u>

$$|1.5 \times 129 \times (0 + 250)| \simeq 4.8 \times 10^4\,\text{J} \quad > \quad 2.5 \times 10^4\,\text{J} \simeq |3 \times 4186 \times (0 - 2)|$$

L'application numérique montre que c'est bien le cas.

c) (5 points) La conservation de l'énergie thermique s'écrit alors :

$$-m_{\text{or}}gh + m_{\text{or}}c_{\text{or}}(T_f - T_{\text{or}}) + m_{\text{eau}}c_{\text{eau}}(T_f - T_{\text{eau}}) - m_{\text{glace}}L_f = 0.$$

$$\Rightarrow \quad m_{\text{glace}} = \frac{-m_{\text{or}}gh - m_{\text{or}}c_{\text{or}}T_{\text{or}} - m_{\text{eau}}c_{\text{eau}}T_{\text{eau}}}{L_f}. \tag{19}$$

<u>Application numérique</u>

$$m_g = \frac{-1.5 \times 9.81 \times 4 - 1.5 \times 129 \times (-250) - 3 \times 4186 \times 2}{333 \times 10^3} \simeq 0.070\,\text{kg} = 70\,\text{g}.$$

d) (4 points) La capacité calorifique molaire du cube d'or est :

$$C_{\text{or}} = c_{\text{or}} \times M_{\text{or}} = 0.129 \times 197 = 25.41 \ J\,mol^{-1}\,K^{-1} \simeq 3R$$

La Loi du Delong-Petit pour l'or est verifiée puisque la valeur de C est entre 23 et 27 $J\,mol^{-1}\,K^{-1}$.

Exercice 4 (20 points)

Trois moles de gaz parfait diatomique suivent une série de transformations thermodynamiques, faites d'une succession d'états proches de l'équilibre, en partant d'une pression de 1 atm et d'une température de 200°C (suffisamment élevée pour que les vibrations soient possibles). Le gaz subit une compression adiabatique jusqu'à la température de 600°C, suivie par une dimunition de température à volume constant qui le ramène à 200°C, et par une expansion isotherme jusqu'à sa pression initiale de 1 atm.

a) Quelles étapes de ce cycle peuvent être représentées dans un diagramme $p-V$? Justifiez votre réponse. Représentez-les.

b) S'agit-il d'un cycle moteur un d'un cycle réfrigérateur ? Justifiez votre réponse.

c) Calculez le travail fait *par* ou *sur* le gaz et la chaleur échangée sur chaque étape du cycle, ainsi que pour le cycle complet ;

d) En considérant que le gaz soit du diazote, N_2 de masse molaire 28 g/mol, représentez qualitivement les distributions des vitesses (supposées Maxwelliennes) pour les températures minimale et maximale du cycle. Justifiez vos choix.

Indications : Constante des gaz parfaits : $R = 8.3145\,\mathrm{J}\times\mathrm{mol}^{-1}\times\mathrm{K}^{-1}$, $1\,\mathrm{atm} = 101\,325\,\mathrm{Pa}$.

Corrigé

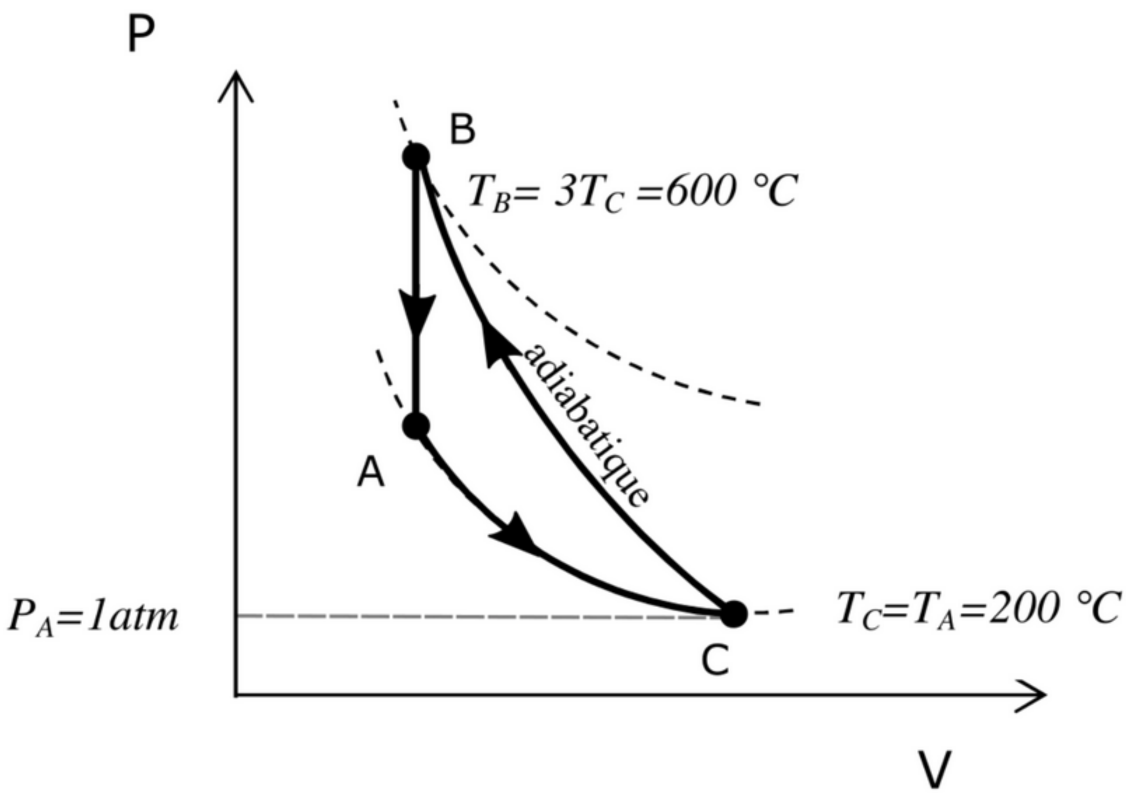


FIGURE 1 – cycle dans le diagramme P-V

a) (4 points) Il est clairement dit dans la donnée que *toutes* les transformations sont une succession d'états proches de l'équilibre, donc elles peuvent *toutes* être représentées dans le diagramme $p - V$. La figure ci-dessous représente ce cycle.

b) (2 points) A ce stade de résolution de l'exercice, on peut répondre à cette question en regardant le sens de parcours du cycle. Le parcours est effectué dans le sens anti-horaire, il s'agit donc d'un cycle réfrigérateur. On s'attend donc (et on le vérifiera) que le travail net soit negatif (i.e. le gaz utilise du travail pour fournir de la chaleur).

c) (8 points) Lors du processus C $\rightarrow$ B, nous avons une compression adiabatique, donc

$$Q_{CB} = 0.$$

Le gaz diatomique à 200°C (suffisamment élevée pour que les vibrations soient possibles) a $\nu = 7$ degrés de liberté. C_V a la valeur $C_V = \frac{\nu}{2}R = \frac{7}{2}R$.

$$W_{CB} = -\Delta U_{CB} = -nC_V\Delta T = -n\frac{7}{2}R(T_B - T_C) = -3\times\frac{7}{2}\times 8.31\times(600-200) = -34902\,\mathrm{J} < 0.$$

Le gaz reçoit du travail (le travail est fait sur le gaz).
Lors du processus B $\rightarrow$ A, nous avons un refroidissement isochore, donc

$$W_{BA} = 0 \;\; (\text{car } dV = 0) \quad \text{et} \quad Q_{BA} = \Delta U_{BA} = nC_V\Delta T$$

$$Q_{BA} = \Delta U_{BA} = n\frac{7}{2}R(T_A - T_B) = 3 \times \frac{7}{2} \times 8.31 \times (200 - 600) = -34902\,\mathrm{J} < 0.$$

Le gaz fournit une chaleur Q_{BA} au contact de la source à T_A.
Lors du processus A $\rightarrow$ C, nous avons un expansion isotherme, donc

$$\Delta U_{AC} = 0 \;\, (\text{car } \Delta T = 0)$$
$$Q_{AC} = W_{AC} = nRT_{A,C}\ln\left(\frac{V_C}{V_A}\right)$$

Or, C $\rightarrow$ B est adiabatique, donc :

$$T_B V_B^{\gamma-1} = T_C V_C^{\gamma-1}$$

$$\Rightarrow \frac{V_C}{V_A} = \frac{V_C}{V_B} = \left(\frac{T_B}{T_C}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} = \left(\frac{T_B}{T_C}\right)^{\frac{1}{\frac{2+\nu}{\nu}-1}} = \left(\frac{T_B}{T_C}\right)^{\frac{\nu}{2}}$$

Il vient donc :

$$Q_{AC} = W_{AC} = nRT_{A,C}\frac{\nu}{2}\ln\left(\frac{T_B}{T_C}\right) = 3 \times 8.31 \times 473 \times \frac{7}{2}\ln\left(\frac{873}{473}\right) = 25293\,\mathrm{J} > 0$$

Le gaz reçoit une chaleur $|Q_{AC}|$. Le travail est effectué par le gaz.
Lors du cycle complet, $\Delta U_textcycle = 0$, puisque l'énergie interne est une variable d'état. Le premier principe de la thermodynamique donne :

$$\Delta U_{\text{cycle}} = 0 = Q_{\text{cycle}} - W_{\text{cycle}} \Rightarrow Q_{\text{cycle}} = W_{\text{cycle}} = W_{\text{CB}} + W_{\text{BA}} + W_{\text{AC}} = -34902 + 0 + 25293 = -9609\,\mathrm{J} < 0$$

On vérfie donc bien que le travail net est negatif, la chaleur net échangée est positive. Le refrigérateur fournit de la chaleur et reçoit du travail.

d) (6 points) Pour dessiner qualitativement les fonctions de distribution, on doit quand même estimer au moins deux paramètres : la vitesse la plus probable et la largeur de la distribution. On suppose une distribution Maxwellienne donc la vitesse la plus probable est donnée par :

$$v_{\max} = \sqrt{\frac{2k_B T}{m}},$$

où $k_B = 1.38 \times 10^{-23}\,\mathrm{J\,K^{-1}}$ est la constante de Boltzmann. Il manquait cette indication dans la donnée !

Application numérique :

$$v_{\max,200} = \sqrt{\frac{2 \times 1.38 \times 10^{-23} \times 473.15}{28 \times 10^{-3}/6.022 \times 10^{23}}} \simeq 5.3 \times 10^{2}\,\mathrm{m\,s^{-1}}.$$

$$v_{\max,600} = \sqrt{\frac{2 \times 1.38 \times 10^{-23} \times 873.15}{28 \times 10^{-3}/6.022 \times 10^{23}}} \simeq 7.2 \times 10^{2}\,\mathrm{m\,s^{-1}}.$$

où nous avons utilisé le fait que la masse d'une molécule d'Azote est égale à la masse d'une mole d'Azote divisée par le nombre d'Avogadro : $m = M/\mathcal{N}_A$ avec $\mathcal{N}_A = 6.022 \times 10^{23}\,\mathrm{mol^{-1}}$. Il manquait cette indication dans la donnée !

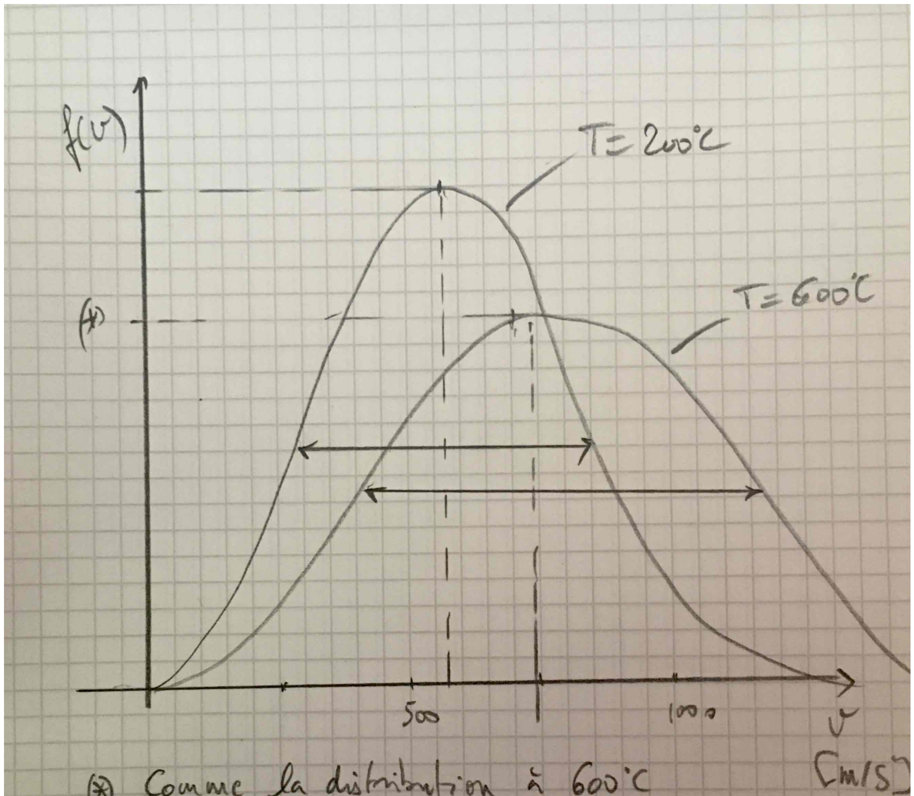
On a vu dans la série 4 que la largeur de la distribution maxwellienne peut s'écrire :

$$w_{\mathrm{Maxw}} \simeq w_{\mathrm{Gauss.}} \simeq 2.35\sigma = 2.35\sqrt{\frac{k_B T}{m}}.$$

Application numérique :

$$w_{\mathrm{Maxw.200}} = 2.35\sqrt{\frac{1.38 \times 10^{-23} \times 473.15}{28 \times 10^{-3}/6.022 \times 10^{23}}} = 880\,\mathrm{m\,s^{-1}}$$

$$w_{\mathrm{Maxw.600}} = 2.35\sqrt{\frac{1.38 \times 10^{-23} \times 873.15}{28 \times 10^{-3}/6.022 \times 10^{23}}} = 1196\,\mathrm{m\,s^{-1}}$$



(*) Comme la distribution à 600°C est plus large le maximum est plus bas que pour la distribution à 200°C de sorte que l'intégrale soit toujours égale à 1.