04 avril 2019 mis à jour le 4 avril 2019 à 14:59

Test de mi-semestre

Exercice 1 25 points

Le système solaire le plus proche du notre est *Proxima*, à 4.24 années-lumières soit 4×10^{13} km. En 2016, il a même été découvert une planète dans la zone habitable de cette étoile. La première mission interstellaire à bord du vaisseau SSV2019 se prépare donc. Cependant, les ingénieurs sont formels : dans ce type de vaisseau (m_v=1000 tonnes), on peut seulement stocker des ressources en eau et oxygène pour au maximum 3 ans. Les stocks pourront être rétablis à *Proxima*.

a) 5 points En négligeant les effets d'accélération, à quelle vitesse devra voyager ce vaisseau pour accomplir ce voyage dans les 3 ans ? Est-ce possible ?

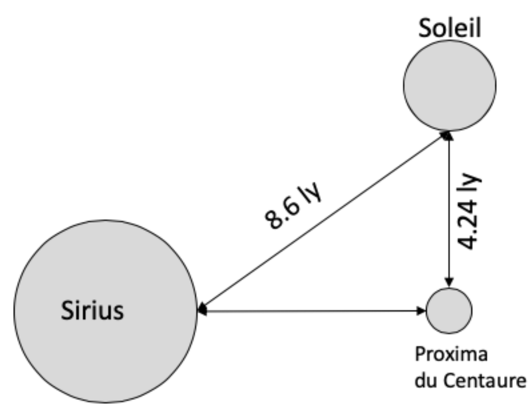
b) 5 points Le moteur du SSV2019 utilise la réaction nucléaire qui annihile $\bar{H}$ avec H. De quelle masse de $\bar{H}$ aura-t-on besoin pour atteindre la vitesse nécessaire ?

A mi-chemin vers *Proxima*, l'incroyable arrive : l'équipage du SSV2019 reçoit un message radio envoyé par un vaisseau extra-terrestre en provenance de Sirius se dirigeant également vers *Proxima*. Selon le message, les extra-terrestres se trouvent à mi-chemin de *Proxima* et ils donnent rendez-vous à l'équipage du SSV2019 sur *Proxima*.

c) 5 points A quelle vitesse est-ce que les extra-terrestres voyagent, vu par le vaisseau SSV2019 ?

d) 5 points Toujours depuis le référentiel du vaisseau SSV2019, quelle durée se sera écoulée entre l'envoi du message et l'arrivée des extra-terrestres sur *Proxima* ?

e) 5 points Une fois à *Proxima*, l'équipage envoie un message radio à la Terre concernant ce premier contact. A la réception de ce message sur Terre, combien de temps se sera-t-il écoulé depuis le départ du vaisseau SSV2019 ?



Corrigé

<u>Indication :</u> Notez que

$$
\begin{aligned}
1\,[\mathrm{ly}] &= 1\,[\mathrm{y}]\,c && (1)\\
&= \underbrace{(365 \times 24 \times 3600)[\mathrm{s}]}_{1[\mathrm{y}]} \times 3 \times 10^8 \left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right] && (2)
\end{aligned}
$$

Avec la 1ère équation, il est possible (mais pas nécessaire) de simplifier toutes applications numériques pour rester dans les unitées de [ly] (années-lumières) pour distances et [y] (années) pour durées.

a) Dans la suite, on désignera le référentiel des systèmes solaires (approximés comme stationaires) comme $\mathcal{R}$, et le référentiel du vaisseau SSV2019 comme $\mathcal{R}'$, avec le choix de coordonnées donné sur le schéma.
Une distance (en $\mathcal{R}$) de $D = 4.24\,\text{ly}$ n'empêche pas que le voyage soit fait en $\Delta t' = 3\,\text{y}$ en $\mathcal{R}'$, à cause de la dilatation de temps :

$$\Delta t' = \frac{\Delta t}{\gamma} = \frac{1}{\gamma}\frac{D}{v} \tag{3}$$

Ou, si on met v (la vitesse rélative entre $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$) sur l'autre coté de l'équation, on retrouve (comme considération équivalente) la contraction de longueur.

$$D' = v\Delta t' = \frac{D}{\gamma} \Rightarrow v = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\frac{D}{\Delta t'}$$

En prenant le carré, on peut isoler v^2

$$v^2 = \left[\left(\frac{\Delta t'}{D}\right)^2 + \frac{1}{c^2}\right]^{-1}$$

Et en divisant par c^2 on trouve après la racine

$$\frac{v}{c} = \left[\left(\frac{c\Delta t'}{D}\right)^2 + 1\right]^{-1/2}$$

Comme on sait que

$$1\,[\text{ly}] = \underbrace{(365 \times 24 \times 3600)[\text{s}]}_{1[\text{y}]} \times c\left[\frac{\text{m}}{\text{s}}\right],$$

on peut simplifier l'application numérique

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{v}{c} &= \left[\left(\frac{\Delta t'[\text{y}]}{D[\text{ly}]}\right)^2 + 1\right]^{-1/2} = \left[\left(\frac{3}{4.2}\right)^2 + 1\right]^{-1/2} \\ \Rightarrow v &= 0.81\,c \end{aligned}} \tag{4}$$

b) En laissant réagir de l'anti-hydrogène $\bar{H}$ avec de l'hydrogène H dans une annihilation

$$\bar{H} + H = 2\gamma^\star$$

on libère une énergie totale de $E = mc^2$, sous forme de 2 photons $\gamma^\star$.
On suppose que toute l'énergie des réactions est utilisé pour fournir l'énergie cinétique nécessaire au vaisseau $E_{c,v}$ de masse m.

$$E_{c,v} = (\gamma - 1)m_v c^2 = (m_{\bar{H}} + m_H)c^2$$

Comme il faut un atome d'anti-hydroge par atome d'hydrogène, et ils sont de masse égale, on trouve la masse d'anti-hydrogène directement avec $\gamma = 1.73$ (calculé à la question a))

$$\boxed{m_{\bar{H}} = \frac{(\gamma - 1)m_v}{2} = 365\,\text{t}} \tag{5}$$

c) On considéra le vaisseau extra-terrestre comme stationaire dans un troisième référentiel $\mathcal{R}''$. D'abord, on peut directement trouver la vitesse relative v_e des extra-terrestres entre $\mathcal{R}''$ et $\mathcal{R}$, comme on l'avait fait pour SSV2019 :

$$\frac{v_e}{c} = \left[\left(\frac{\Delta t''_e[\mathrm{y}]}{D_e[\mathrm{ly}]}\right)^2 + 1\right]^{-1/2}$$

où $\Delta t''_e = 5\,\mathrm{y}$ est la durée de leur trajet dans leur référentiel $\mathcal{R}''$ et on trouve la distance entre Sirius et *Proxima* en $\mathcal{R}$ par Pythagore comme $D_e = 7.5\,\mathrm{ly}$. Si on prend la direction du trajet de SSV2019 comme $+\vec{e_x}$, on trouve donc la vitesse du vaisseau extra-terrestre observé en $\mathcal{R}$ comme $\vec{u_e} = +v_e\vec{e_y} + 0\vec{e_x}$. On trouve la vitesse $u'_{e,y}$ observé en $\mathcal{R}'$ selon $\vec{e_y}' = \vec{e_y}$ avec la transformation de Lorentz correspondante

$$\frac{u'_{e,y}}{c} = \frac{u_e}{c\gamma(1 - \frac{vu_{e,x}}{c^2})} = \frac{v_e}{c\gamma} = 0.48$$

Ici, on utilise γ (et v) de a), car on tansforme une observation entre $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$. En plus, la vitesse $u_{e,x}$ des extra-terrestres selon $\vec{e_x}$, vu en $\mathcal{R}$, est clairement zéro. Par contre il faut aussi considérer la transformation de vitesse selon $\vec{e_x}$:

$$\frac{u'_{e,x}}{c} = \frac{u_e - v}{c(1 - \frac{v}{c}\frac{u_{e,x}}{c})} = -\frac{v}{c} = -0.81$$

Clairement, depuis le vaisseau SSV2019, *Proxima* et les extra-terrestres approchent avec $-v$ selon $\vec{e_x}$. Donc la vitesse totale des extra-terrestres se trouve encore avec Pythagore

$$\boxed{\frac{u'_e}{c} = \frac{\sqrt{u'^2_{e,x} + u'^2_{e,y}}}{c} = 0.95 \qquad (6)}$$

ce qui est inférieur à c, comme il faut.

d) D'abord, on détermine le temps $\Delta t'_{mc}$ qu'il reste aux extra-terrestres pour terminer le voyage vers *Proxima*. On peut trouver cela en $\mathcal{R}$ et utiliser la dilatation des temps, ou, on peut directement utiliser $u'_{e,y}$ que l'on vient de calculer. Comme ils doivent faire le trajet uniquement selon $\vec{e_y} = \vec{e_y}'$, la vitesse $u'_{e,x}$ n'entre pas dans le calcul (*Proxima* se déplace aussi avec $u'_{e,x} = -v$ en $\mathcal{R}'$). On a donc simplement

$$\Delta t'_{mc} = \frac{D'_e}{2u_{e,y}} = \frac{D_e}{2u'_{e,y}}$$

car les longueurs selon $\vec{e_y}$ sont invariantes entre des référentiels $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ liés par une vitesse selon $\vec{e_x}$.

De plus, on doit également calculer le temps écoulé $\Delta t'_{ms}$ entre l'instant où le message est envoyé par les extra-terrestres (à mi-chemin) et l'instant de réception par l'équipage du SSV2019 (également à mi-chemin). Comme il s'agit d'ondes radio qui se propagent avec vitesse c dans chaque référentiel, on a $\Delta t'_{ms} = D'_{ms}/c$. La distance de propagation D'_{ms} en $\mathcal{R}'$ se trouve avec Pythagore encore

$$D'_{ms} = \sqrt{\left(\frac{D'}{2}\right)^2 + \left(\frac{D'_e}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{D}{2\gamma}\right)^2 + \left(\frac{D_e}{2}\right)^2}$$

En tout on trouve donc pour le temps $\Delta t'_{arr}$ qu'il faudra entre la réception du message et l'arrivé vers *Proxima*

$$\Delta t'_{arr} = \Delta t'_{mc} - \Delta t'_{ms} = \frac{D_e}{2u'_{e,y}} - \frac{\sqrt{\left(\frac{D}{2\gamma}\right)^2 + \left(\frac{D_e}{2}\right)^2}}{c}$$

$$\boxed{\Rightarrow \Delta t'_{arr}\,[\mathrm{y}] = \frac{D_e[\mathrm{ly}]}{\frac{u'_{e,y}}{c}} - \sqrt{\left(\frac{D\,[\mathrm{ly}]}{2\gamma}\right)^2 + \left(\frac{D_e\,[\mathrm{ly}]}{2}\right)^2} = 3.85\,\mathrm{y} \qquad (7)}$$

Ceci est bien plus que les 1.5 y qui restent pour le voyage des humains. Donc il va falloir attendre les extra-terrestres ! (Vous pourriez même calculer pour combien de temps, une fois qu'on est arrivé et stationaire, mais ceci n'est pas tout-à-fait nécessaire.)

e) D'abord on trouve l'instant du premier contact Δt_{pc} depuis le lancement de la mission, vu en $\mathcal{R}$. On trouve dans le référentiel $\mathcal{R}'$ directement

$$\Delta t'_{pc} = 1.5\,\mathrm{y} + 3.8\mathrm{y} = 5.3\,\mathrm{y}$$

puisqu'il a fallu au SSV2019, 1 an et demi pour arriver à mi-chemin, et qu'on vient de calculer le reste du temps en d).
Mais le "premier contact" se fait dans un lieu différent de celui du lancement, donc il faut considérer une transformation de Lorentz complète, avec $\Delta x' = +D' = D/\gamma$.
De plus, le référentiel $\mathcal{R}'$ continue son mouvement à la vitesse constante v, même une fois que le vaisseau s'arrête et attende les extra-terrestres vers *Proxima*. Ce temps d'attente se déduit de la question d) :

$$\Delta t'_{att} = \Delta t'_{arr} - 1.5\,\mathrm{y}$$

Pendant ce temps, l'origine du référentiel $\mathcal{R}'$ s'éloignera de *Proxima*, et lui donne donc une position (x'_{pc}) négative qui vaut

$$x'_{pc} = -v\Delta t'_{att} \qquad \Rightarrow \qquad \Delta x'_{pc}\,[\mathrm{ly}] = x'_{pc}\,[\mathrm{ly}] = -\frac{v}{c}\Delta t'_{att}\,[\mathrm{y}]$$

Je ne comprends pas la deuxième partie de l'équation. La transformation sécrit finalement avec un signe positif car elle est inverse (de $\mathcal{R}'$ à $\mathcal{R}$)

$$\Delta t_{pc} = \gamma\left(\Delta t'_{pc} + \frac{v\Delta x_{pc'}}{c^2}\right)$$

et on trouve donc

$$\Rightarrow \Delta t_{pc}\,[y] = \gamma\left(\Delta t'_{pc}\,[\mathrm{y}] - \left(\frac{v}{c}\right)^2 \Delta t'_{att}\,[\mathrm{y}]\right) = 6.6\,\mathrm{y}$$

Pour etre informé ici à Δt_{inf}, il va falloir un autre message radio, qui aura besoin de 4.2 y pour arriver ici en provenance de Proxima. Donc on trouve finalement

$$\boxed{\Delta t_{inf} = \Delta t_{pc} + 4.2\,\mathrm{y} = 10.8\,\mathrm{y} \qquad (8)}$$

Difficile à croire aux temps de Tweeter et Facebook...

Exercice 2 25 points

Au pied d'un immeuble de 50 étages (2.5m/étage) se trouve une piscine de surface (10 m × 1.5 m) et de profondeur 3 m remplie d'eau liquide à 0°C sur une hauteur de 2 m sauf les 2 premiers centimètres qui forment une couche de glace également à 0°C. On veut faire fondre la glace et augmenter la température de l'eau. Pour cela vous disposez d'un bloc d'aluminium de masse 5000 kg et dont la température est égale à 650°C.

a) 8 points Vous lâchez le bloc d'aluminium du toit de l'immeuble. Quelle sera la température finale T_{finale} de l'eau une fois l'équilibre thermique atteint ?

b) 6 points En considérant que la loi de Dulong-Petit s'applique au bloc d'aluminium, comment changerait la température finale ? Justifiez qualitativement votre réponse.

c) 11 points On se place dans la situation à la fin de la question a). Un locataire souhaite une température d'eau à 25°C. Pour y arriver, il envisage de jeter dans la piscine, depuis une hauteur h, 100 kg d'aluminium sous forme liquide à la température de fusion de l'aluminium $T_{\text{f,alu.}}$. A l'équilibre thermique, le locataire veut que tout l'aluminium soit à l'état solide et l'eau à l'état liquide. Calculez h. Commentez votre résultat.

Indications : On néglige les échanges de chaleur avec l'environement. On fait l'approximation que les propriétés thermiques de l'eau et de l'aluminium ne changent pas avec la température. Supposez que toute l'énergie cinétique du bloc est donnée au système glace-eau et n'est pas utilisée pour rompre la couche de glace. Masse volumique de l'eau $\rho_{\text{eau}} \simeq 1000\,\text{kg}\,\text{m}^{-3}$. Masse volumique de la glace $\rho_{\text{glace}} = 917\,\text{kg}\,\text{m}^{-3}$. Chaleur latente de fusion de la glace à 0°C : $L_{\text{f}} = 333.6\,\text{kJ}\,\text{kg}^{-1}$. Chaleur spécifique à volume constant de l'eau liquide : $c_{\text{eau}} \simeq 4186\,\text{J}\,\text{kg}^{-1}\,\text{K}^{-1}$. Chaleur spécifique à volume constant de la glace à 0°C : $c_{\text{glace}} \simeq 2110\,\text{J}\,\text{kg}^{-1}\,\text{K}^{-1}$. Chaleur latente de fusion de l'aluminium : $L_{\text{f,alu.}} = 335\,\text{kJ}\,\text{kg}^{-1}$. Chaleur spécifique à volume constant de l'aluminium : $c_{\text{alu.}} \simeq 900\,\text{J}\,\text{kg}^{-1}\,\text{K}^{-1}$. Température de fusion de l'aluminium : $T_{\text{f,alu.}} = 660$°C. Masse molaire de l'aluminium : 27 g/mol. Constante des gaz parfaits : $R = 8.314\,\text{J}\,\text{mol}^{-1}\,\text{K}^{-1}$.

Corrigé

a)

$$Q_{alu} + Q_{eau-gla} = 0$$

$$\underbrace{-m_{\text{alu}} g |h| + m_{\text{alu}} c_{\text{alu}} \left(T_{\text{finale}} - T_{\text{init,alu}}\right)}_{\text{Chaleur perdue par l'aluminium } (<0)} + \underbrace{V_{\text{glace}} \rho_{\text{glace}} L_{\text{f}} + m_{\text{eau}} c_{\text{eau}} \left(T_{\text{finale}} - T_{\text{init,eau}}\right)}_{\text{Chaleur gagnee par eau+glace } (>0)} = 0,$$

où V_{glace} est le volume occupé par la glace et $m_{\text{eau}} = V \rho_{\text{eau}}$ la masse totale de l'eau une fois que toute la glace a fondu.

On peut isoler T_{finale} :

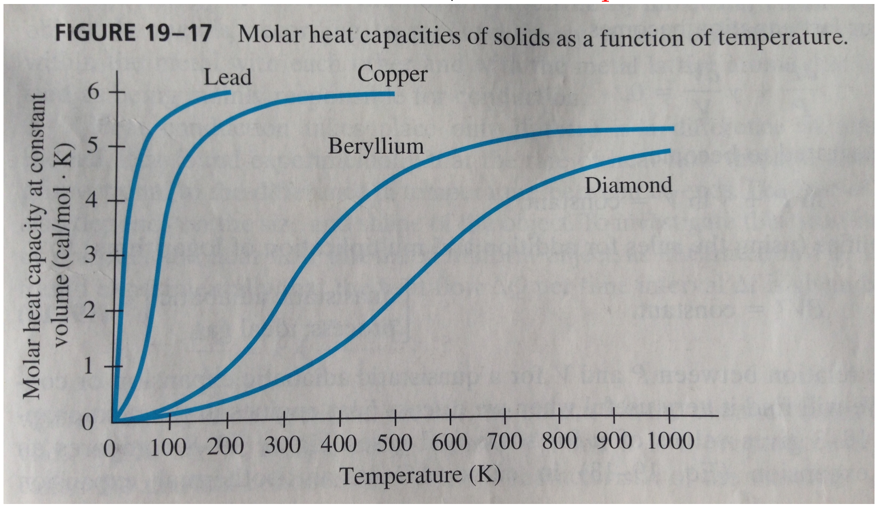
$$\boxed{T_{\text{finale}} = \frac{m_{\text{alu}} g h - V_{\text{glace}} \rho_{\text{glace}} L_{\text{f}} + m_{\text{alu}} c_{\text{alu}} T_{\text{init,alu}}}{m_{\text{alu}} c_{\text{alu}} + V \rho_{\text{eau}} c_{\text{eau}}} \quad \text{5 points.}} \tag{9}$$

Application numérique :

La masse de l'eau liquide vaut $m_{\text{eau}} = V \rho_{\text{eau}} = (10 \times 1.5 \times 2) \times 1000 = 3 \times 10^4$kg.

$$\begin{aligned} T_{\text{finale}} &= \frac{5000 \times 9.81 \times 50 \times 2.5 - 10 \times 1.5 \times 0.02 \times 917 \times 333.6 \times 10^3 + 5000 \times 900 \times 650}{5000 \times 900 - 3 \times 10^4 \times 4186} \\ &\simeq 22°\text{C}. \quad \text{2 points} \end{aligned}$$

b) La loi de Dulong-Petit stipule qu'à haute température, la capacité thermique molaire C_V de tout solide tend vers la valeur $C_V = 3R$ 2 points où R est la constante des gaz parfaits.



Cette loi peut se comprendre en utilisant l'approche microscopique. Dans un solide, les atomes sont arrangés en un réseau cristallin. L'énergie emmagasinée dans un réseau cristallin correspond à l'énergie d'agitation des atomes du réseau autour de leur position d'équilibre. Chaque atome qui vibre a 6 degrés de liberté (3 de translation, 3 de rotation). Pour chaque atome, à chaque degré de liberté correspond $k_B T/2$ joules. Pour une mole de solide avec une masse molaire M, on a donc une chaleur $Q = 3N_A k_B T$ avec nombre N_A le nombre d'Avogadro. Or $R = N_A k_B$, donc $Q = 3RT$ et ainsi $c_V = 3R/M$.

Application numérique :

$$c_V = \frac{3 \times 8.314}{27 \times 10^{-3}} = 923\,\mathrm{Jk^{-1}K^{-1}}. \quad \text{2 points}$$

$\boxed{\text{Etant donnée que } c_V \text{ augmente légèrement, la température finale sera un peu plus élevée. 2 points}}$

c) Pour avoir de l'eau liquide et l'aluminium solide à l'équilibre thermique, tout l'aluminium versé, doit se solidifier, donc l'énergie mise à disposition par l'aluminium liquide est :

$$E_{\mathrm{alu}} = m'_{\mathrm{alu}} \left(gh + L_{\mathrm{f,alu}} - c_{\mathrm{alu}} \left(T_{\mathrm{finale,2}} - T_{\mathrm{f,alu}} \right) \right),$$

où m'_{alu} est la masse d'aluminium versée. L'énergie dont a besoin la piscine (eau et bloc d'aluminium solide) pour augmenter sa température jusqu'à $T_{\mathrm{finale,2}} = 25°\mathrm{C}$ s'écrit :

$$E_{\mathrm{piscine}} = \left(m_{\mathrm{eau}} c_{\mathrm{eau}} + m_{\mathrm{alu}} c_{\mathrm{alu}} \right) \left(T_{\mathrm{finale,2}} - T_{\mathrm{finale}} \right),$$

où T_{finale} est la température finale de la question a).

Par la conservation de l'énergie $E_{\mathrm{alu}} = E_{\mathrm{piscine}}$:

$$\boxed{h = \frac{1}{g} \left(\frac{\left(m_{\mathrm{eau}} c_{\mathrm{eau}} + m_{\mathrm{alu}} c_{\mathrm{alu}} \right)}{m'_{\mathrm{alu}}} \left(T_{\mathrm{finale,2}} - T_{\mathrm{init,piscine}} \right) + c_{\mathrm{alu}} \left(T_{\mathrm{finale,2}} - T_{\mathrm{f,alu}} \right) - L_{\mathrm{f,alu}} \right). \quad \text{5 points} \qquad (10)}$$

Application numérique :

$$h = \frac{1}{9.81}\left(\frac{\left(3\times10^4\times4186+5000\times900\right)}{100}\left(25-22\right)+900\left(25-660\right)-335\times10^3\right)$$
$$\simeq 3\times10^7\text{m!!!} \quad \text{3 points}$$

Cette valeur est evidemment irréalisable. Ceci démontre qu'il n'est pas éfficace de rechauffer de l'eau en utilisant un metal fondu. Tout ceci étant dû au fait que l'eau est un très grand reservoir de chaleur, en effet sa capacité thermique est très élévée par rapport à l'aluminium. En général c'est l'eau qui est utilisée pour refroidir les métaux fondus. 3 points

Exercice 3 25 points

La pression atmosphérique $p(z)$ varie avec l'altitude z selon la relation

$$p(z) \simeq p_0 (1 - Cz)^5 ,$$

où $p_0 = 101325$ Pa est la pression au niveau de la mer, z est l'altitude en mètres, et $C = 2.25577 \times 10^{-5}$ m^{-1}. Ceci va vous être utile pour votre expédition jusqu'au sommet de l'Everest ($z_E = 8848$ m, $T_E = -28$°C) ! Vous partez depuis le niveau de la mer ($z = 0$) avec une bouteille d'oxygène à la pression $p_{B,0} = 200$ bar et la température $T_0 = 20$ °C. Vous utiliserez cette bouteille seulement lorsque le sommet sera atteint. On suppose que la bouteille et l'oxygène sont toujours en équilibre thermique.

a) 4 points Quelle est la pression de l'oxygène à l'intérieur de la bouteille au sommet de l'Everest ($z = z_E$), une fois que l'équilibre thermique entre la bouteille avec l'oxygène et l'extérieur est atteint ?

b) 7 points On suppose maintenant que vous êtes arrivés au sommet de l'Everest. En sachant que votre corps peut supporter des températures aussi extrêmes pendant au maximum 10 minutes ($\Delta t_{max} = 10$ min), et que, durant une respiration, il a besoin de 2 litres d'oxygène au rythme de 12 respirations par minute, quel doit-être le volume minimal de la bouteille, V_B, afin de vous assurer un temps maximum au sommet ?

c) 7 points Calculer la chaleur échangée ΔQ entre la bouteille avec l'oxygène et l'extérieur lors de votre ascension vers le sommet de l'Everest. On supposera que la bouteille a une volume constant V_B, négligeant ainsi la dilatation de la bouteille due au changement de température.

d) 7 points On suppose une bouteille cylindrique de hauteur L=1 m. Calculez le temps moyen que met une molécule pour traverser la bouteille dans sa longueur au niveau de la mer puis au sommet de l'Everest.

Indication : L'oxygène est un gaz idéal diatomique avec degrés de liberté translationnel et rotationnel. Constante de Boltzmann $k_B = 1.38 \times 10^{-23}\,\mathrm{m^2\,kg\,s^{-2}\,K^{-1}}$. Masse molaire de l'oxygène $M = 16\,\mathrm{g\,mol^{-1}}$.

Corrigé

a) Afin de déterminer la pression de l'oxygène à l'intérieur de la bouteille au sommet de l'Everest ($z = z_E$), on utilise la relation des gaz parfaits. Comme la bouteille est un système fermé, c'est-à-dire que la quantité de moles de gaz est conservée durant l'ascension, on a que

$$\frac{p}{T} = nR,$$

avec $n = N/V$ la concentration molaire de gaz dans la bouteille. En évaluant l'équation précédente en $z = 0$ et $z = z_E$, on obtient que

$$\boxed{\frac{p_{B,0}}{T_0} = \frac{p_E}{T_E} \Rightarrow p_E = \frac{T_E}{T_0} p_{B,0}. \quad \text{3 points}} \tag{11}$$

Par application numérique, on trouve

$$p_E = \frac{245.15K}{293.15\text{ K}} \times 200\text{ bar} = 167.25\text{ bar}. \quad \text{1 point}$$

b) On veut déterminer le volume de la bouteille, V_B, nécessaire pour rester un temps maximal de $\Delta t_{max} = 10$ min au sommet de l'Everest. Pour cela, on suppose que notre corps respire au rythme de 12 respirations de 2 L d'oxygène à pression ambiante par minute. Le volume d'oxygène, V_{O_2}, nécessaire pour un temps Δt_{max} est donc

$$V_{O_2} = 2 \times 10^{-3} \times 12 \times \Delta t_{max} = 0.24 \text{ m}^3. \quad \text{2 points}$$

On calcule maintenant le volume occupé, V', par l'oxygène une fois libéré de la bouteille. L'oxygène est initialement à une pression p_E et occupe le volume total de la bouteille V_B. Au cours de l'expansion, le gaz reste en équilibre thermique. Cela correspond donc à une expansion isothermal. On peut écrire que

$$p_E V_B = p(z_E) V' \Rightarrow V_B = \frac{p(z_E)}{p_E} V'.$$

En égalisant V_{O_2} et le volume après expansion V', on peut résoudre pour le volume de la bouteille V_B,

$$\boxed{V_B = \frac{p(z_E)}{p_E} V_{O_2}. \quad \text{4 points}} \tag{12}$$

Par application numérique, on trouve

$$V_B = \frac{p(8848) \times 10^{-5} \text{ bar}}{167.25 \text{ bar}} \times 0.24\text{m}^3 \simeq 4.78 \times 10^{-4} \text{ m}^3.\text{1 point}$$

c) On s'intéresse à la variation de chaleur ΔQ entre l'oxygène contenu dans la bouteille lors de son ascension vers le somment. Comme on s'intéresse à la variation de la chaleur à volume constant, c'est-à-dire à une transformation isochore à V_B 1 point donc pas de travail ($W = 0$ 1 point), la variation de chaleur ΔQ est donnée par le premier principe :

$$\boxed{\Delta U = Q - \underbrace{W}_{=0} \Rightarrow \Delta U = Q \quad \text{1 point} \quad \text{avec} \quad \Delta U = N c_V \Delta T \Rightarrow Q = N c_V \Delta T \text{2 points}} \tag{13}$$

avec la chaleur spécifique molaire à volume constant $c_V = (5/2)R = 20.785$ J mol^{-1} K^{-1} pour un gaz diatomique. Le nombre de moles d'oxygène contenu dans la bouteille est

$$N = \frac{P_{0,B} V_B}{R T_0} = \frac{200 \times 10^5\text{Pa} \times 4.78 \times 10^{-4} \text{ m}^3}{8.314\text{Jmol}^{-1}\text{K}^{-1} \times 293.15\text{K}} \simeq 0.02 \text{ mol} \quad \text{1 point}$$

Par application numérique, on trouve

$$\Delta Q = N c_v (T_E - T_0) = 0.02 \text{ mol} \times \frac{5}{2} R \times (245.15 \text{ K} - 293.15 \text{ K}) = -19.95 \text{ J} < 0. \quad \text{1 point}$$

d) Afin de calculer le temps Δt que met une molécule de O_2 pour parcourir la hauteur $L = 1$ m de la bouteille cylindrique, il faut déterminer la vitesse quadratique moyenne dans la direction de l'axe de la bouteille, c'est-à-dire $\overline{v_z^2}$. Pour une température T, la vitesse moyenne quadratique est

$$\overline{v^2} = 3 \frac{k_B T}{m_{O_2}}, \text{2 points}$$

où $k_B = R/N_A$ est la constante de Boltzmann et m_{O_2} est la masse d'une molécule d'oxygène. On en déduit que

$$\overline{v_z^2} = \frac{1}{3}\overline{v^2} = \frac{k_B T}{m_{O_2}}.\text{2 points}$$

Ainsi, le temps Δt que met une molécule d'oxygène pour parcourir une distance L est simplement donné par

$$\Delta t = \frac{L}{\sqrt{\overline{v_z^2}}} = L\sqrt{\frac{m_{O_2} N_A}{RT}}.\text{2 points}$$

Par application numérique, un niveau de la mer, c'est-à-dire en $z = 0$, avec $T = 293.15$ K et $m_{O_2} N_A = 2 \times 16 \times 10^{-3}$ kg mol $^{-1}$ pour l'oxygène, on obtient

$$\boxed{\Delta t(z=0) = 1 \text{ m} \times \sqrt{\frac{2 \times 16 \times 10^{-3} \text{ kg mol}^{-1}}{8.314 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1} \times 293.15 \text{ K}}}, \simeq 0.0036\text{s}\,\text{0.5 point}} \tag{14}$$

et, au sommet de l'Everest en $z = z_E$,

$$\boxed{\Delta t(z=z_E) = 1 \text{ m} \times \sqrt{\frac{2 \times 16 \times 10^{-3} \text{ kg mol}^{-1}}{8.314 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1} \times 245.15 \text{ K}}} \simeq 0.004\text{s.}\,\text{0.5 point}} \tag{15}$$

Exercice 4 25 points

2 moles de di-hydrogène (H_2), considéré comme un gaz parfait, se trouvent à la température initiale de $T_A = 3000$°C et la pression $p_A = 100$ bars et occupent un volume V_A. Ce gaz subit les 4 transformations suivantes :

$A \to B$ Expansion adiabatique jusqu'à $T_B = 1500$°C.
$B \to C$ Expansion adiabatique jusqu'à $V_C = 2V_B$.
$C \to D$ Compression isobare jusqu'à $V_D = V_A$
$D \to A$ Transformation isochore.

a) 5 points Dessinez le cycle dans un diagramme $p - V$.
b) 7points Calculez pour chaque transformation la chaleur échangée.
c) 11 points Calculez le travail total effectué au cours du cycle.
d) 2 points Calculez le rendement de ce cycle.

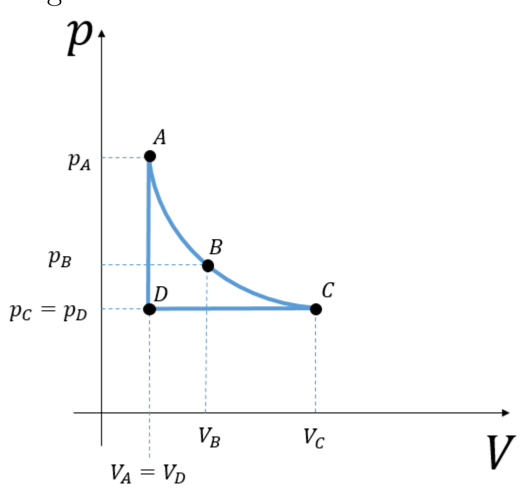
Indication : Constante des gaz parfaits : $R = 8.314\,\mathrm{J\,mol^{-1}\,K^{-1}}$. En dessous de 1500°C, on négligera les effets vibrationels. 1 bar = 10^5 Pa.

Corrigé

La subtilité de l'exercice est que l'index adiabatique de la transformation $A \to B$ n'est pas le même que celui de la transformation $B \to C$. En effet, le nombre de degrés de liberté des molécules dépend de la température :

$$\boxed{\gamma_{A\to B} = 1 + \frac{2}{\nu} = 1 + \frac{2}{7} = \frac{9}{7} \quad \text{et} \quad \gamma_{B\to C} = 1 + \frac{2}{\nu} = 1 + \frac{2}{5} = \frac{7}{5}}$$

a) $\gamma_{B\to C} > \gamma_{A\to B}$ donc la courbe BC doit être "au dessous" de la courbe AB si celle-ci était prolongée au delà de B. Les 2 autres transformations ne posent pas de problèmes.



	p [Pa]	V [m^3]	T [K]
A	100×10^5	$V_A = \frac{nRT_A}{p_A}$=0.0054	3273
B	$p_A \left(\frac{V_A}{V_B}\right)^{\gamma_{A\to B}} \simeq 4.6 \times 10^5$	$V_A \left(\frac{T_A}{T_B}\right)^{\frac{1}{\gamma_{A\to B}-1}} \simeq 0.048$	1753
C	$\frac{nRT_C}{V_C} \simeq 2.3 \times 10^5$	$2V_B = 0.096$	$T_B \left(\frac{V_B}{V_C}\right)^{\gamma_{B\to C}-1} \simeq 1328$
D	p_C	V_A	$\frac{p_C V_A}{nR} \simeq 74$

1 point pour le cycle qui retourne en A, 1 point par transformation, -2 points pour 2 adiabatiques evec la même pente.

b) **Transformation adiabatique AB :**
Par définition, il n'y a pas d'échange de chaleur lors d'une transformation adiabatique on a donc : $Q_{A\to B} = 0$.
On calcule le travail entre A et B, avec $\gamma = \gamma_{A\to B}$:

$$\begin{aligned} W_{A\to B} &= \int_{V_A}^{V_B} pdV = p_A V_A^\gamma \int_{V_A}^{V_B} V^{-\gamma} dV \\ &= p_A V_A^\gamma \frac{1}{1-\gamma} \left(V_B^{1-\gamma} - V_A^{1-\gamma}\right) = \frac{p_A V_A}{1-\gamma} \left(\left(\frac{T_B}{T_A}\right) - 1 \right) \\ &\simeq 88\,\text{kJ}. \end{aligned} \tag{16}$$

Alors : $\Delta U_{AB} = -W_{AB} = -88\,\text{kJ}$.
Trasformation adiabatique BC :

Attention : il faut compter juste aussi pour ceux qui ont calculé : $\Delta U = nc_V \Delta T = \underbrace{Q}_{=0} - W$

Par définition, il n'y a pas d'échange de chaleur lors d'unee transformation adiabatique. Alors : $Q_{BC} = 0$.
On calcule le travail entre B et C, avec $\gamma = \gamma_{B\to C}$:

$$\begin{aligned} W_{B\to C} &= \int_{V_B}^{V_C} pdV = p_B V_B^\gamma \int_{V_B}^{V_C} V^{-\gamma} dV \\ &= p_B V_B^\gamma \frac{1}{1-\gamma} \left(V_C^{1-\gamma} - V_B^{1-\gamma}\right) = \frac{p_B V_B}{1-\gamma} \left(\left(\frac{V_C}{V_B}\right)^{1-\gamma} - 1 \right) \\ &\simeq 14\,\text{kJ}. \end{aligned} \tag{17}$$

Alors : $\Delta U_{BC} = -W_{BC} = -14\,\text{kJ}$.

Transformation isobare CD :
On calcule le travail, la variation d'énergie interne et la chaleur échangée entre C et D :

$$W_{C\to D} = \int_{V_C}^{V_D} pdV = p_C(V_D - V_C) \simeq -20\,\text{kJ}. \tag{18}$$

$$\Delta U_{CD} = nc_v \Delta T = n \left(\frac{5}{2}R\right) \Delta T \simeq -52\,\text{kJ}. \tag{19}$$

$$Q_{CD} = \Delta U_{CD} + W_{CD} = -52 + (-20) = -72\,\text{J}. \tag{20}$$

Transformation isochore DA :
Par définition, il n'y a pas de travail lors d'une transformation isochore. Alors : $W_{D\to A} = 0$.
On calcule la chaleur échangée entre D et A :

$$Q_{DA} = \Delta U_{DA} = -\Delta U_{ABCD} = -\Delta U_{AB} - \Delta U_{BC} - \Delta U_{CD} = 88 + 14 + 52 = 154\,\text{kJ} \tag{21}$$

c) Le travail total est :

$$\boxed{W_{\text{cycle}} = W_{A\to B} + W_{B\to C} + W_{C\to D} + W_{D\to A} = 88 + 14 - 20 + 0 = 82\,\text{kJ}.} \tag{22}$$

On trouve un travail positif. C'est donc bien un moteur.

d) Le rendement de cycle est :

$$\boxed{\eta = \frac{W_{\text{cycle}}}{Q_{DA}} = \frac{82}{154} \simeq 0.53.} \tag{23}$$

En resume :